

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE
ROYALE
DES SCIENCES.

ANNÉE M. DCC. LXXXVIII.

Avec les Mémoires de Mathématique & de Physique, pour la même Année,

Tirés des Registres de cette Académie.



A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

M. DCC. XCI.

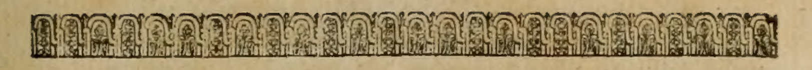


TABLE POUR L'HISTOIRE.

TABLE

POUR LES MÉMOIRES.

C'est en 1738, que pour la première fois M. le Monnier a pu observer au gnomon qu'il a élevé dans l'église de Saint-Sulpice, la différence de hauteurs solsticiales. Il l'a observée cette année au bout d'un demi siècle, & a trouvé que les variations de cette différence répondoient à une diminution apparente de 10″ dans l'obliquité de l'écliptique.

L'objet de ce Mémoire est de déduire d'une méthode générale les différentes formes de polyèdres qui peuvent être engendrés par un rhomboïde composé de lames superposées, dont on imagine que les angles & les côtés décroissent suivant une loi régulière, par la suppression des rangées de molécules dont ces lames sont formées.

Par ce moyen, M. l'abbé Hauy parvient à connoître toutes les formes de criſtaux, qui, malgré une diſſemblance apparente, appartiennent cependant à une première forme primitive.

On ſait que cette idée d'appliquer la géométrie à reconnoître les loix de la figure des criſtaux, en attendant qu'elle puiſſe calculer celles de leur formation, propoſée d'abord par Bergman, a été ſuivie avec tant de ſuccès par M. Hauy, qu'elle eſt devenue en quelque ſorte ſon domaine.

Le phénomène d'un corps tranſparent dans lequel un rayon de lumière éprouve une réfraction double, eſt très-ſenſible dans le criſtal d'Iſlande, & peut être obſervé dans pluſieurs autres ſubſtances criſtalliſées. Newton en a donné une explication, qui ſuppoſe que ces ſubſtances exercent ſur les rayons de lumière une action particulière.

M. Hauy s'eſt propoſé dans ce mémoire d'analyſer ce phénomène avec une nouvelle préciſion, & cette analyſe le conduit au même réſultat que Newton.

C'eſt à dater de l'année 1785, que l'inſtitution d'élèves aſtronomes attachés à l'Obſervatoire, permet à M. Caſſini de publier un recueil complet des obſervations météorologiques & aſtronomiques qui ont pu être faites dans l'année.

Il avoit joint à celles de 1787, un tableau abrégé des précédentes obſervations depuis 1777 juſqu'en 1785. Ce volume contient celles qui ont été faites depuis 1767 juſqu'en 1777, & il ſe propoſe de donner ainſi ſucceſſivement l'hiſtoire de toutes les obſervations raſſemblées à l'Obſervatoire depuis ſon inſtitution.

M. Charles avoit montré (*Mémoire de l'Académie 1786*) que les équations aux différences finies, peuvent dans certain cas avoir deux intégrales, dont l'une n'eſt pas compriſe dans l'équation que les géomètres regardoient comme l'intégrale générale de la propoſée.

Il examine ici ce que cette ſeconde intégrale devient dans les cas des différences infiniment petites, & il établit qu'alors elle donne cette eſpèce de ſolution connue ſous le nom d'intégrale particulière, qui n'eſt qu'une intégrale incomplette compriſe dans cette nouvelle ſolution.

L'eſpèce d'agathe verdâtre, connue ſous le nom de *praſe*, eſt colorée par le cobalt & par le nikel ; elle porte le nom de *cryſopraſe* lorſqu'elle eſt parſemée de taches couleur d'or, & alors elle contient de la terre martiale jaune.

Ce ſpath très-pur ne contient ni terre calcaire, ni chaux métallique lorſqu'il eſt blanc & tranſparent.

M. Sage examine dans ce mémoire, les ſels formés par la combinaiſon de ce ſpath avec les trois acides minéraux.

Quoique le fruit du muſcadier ſoit en uſage depuis pluſieurs ſiècles, le monopole exercé ſur le commerce des épiceries

par les Hollandois, avoit empêché jusqu'ici de connoître l'arbre qui le produit. M. Poivre l'a transporté à l'Isle de France, & c'est à des branches de cet arbre envoyées par M. Céré, directeur du jardin du Roi, dans cette île, que nous en devons la première description exacte.

Les fleurs mâles & les fleurs femelles se trouvent sur des individus separés.

Il résulte des expériences rapportées dans ce mémoire, que l'acier d'Angleterre est le plus propre à recevoir la vertu magnétique: l'acier d'Allemagne connu sous le nom d'*etoffe de sons*, vient immédiatement après. Les aciers fondus ne peuvent acquérir que très-peu de force magnétique.

Dans ces deux derniers mémoires, M. de la Lande suppose d'un 500e l'aplatissement de la terre, & c'est d'après cette hypothèse qu'il corrige les élémens qu'il s'est proposé d'y déterminer.

Comme les objets cessent d'être sensibles lorsque leur diamètre est vu sous un angle trop petit, il doit en résulter que les satellites de Jupiter paroissent s'éclipser plus tôt, & sortir plus tard de l'ombre, qu'ils ne le font réellement, ce qui produit une différence entre la durée apparente & la durée réelle de l'éclipse. M. de Fouchy a proposé un moyen très-ingénieux de reconnoître cette différence. M. Bailli, dans les Mémoires de 1771, l'a

M. le Gentil s'occupe, dans ces trois Mémoires, de ces monumens de l'astronomie Égyptienne ou Indienne que les constructeurs ignorans de nos temples gothiques faisoient entrer dans les ornemens de ces édifices sacrés.

On sait que les superstitions Égyptiennes avoient infecté les Gaules; mais on ignoroit que l'astronomie Indienne, ou du moins les figures symboliques de cette astronomie, y eussent pénétré.

M. le Gentil a observé que presque toutes les tiges d'une espèce de vareck qu'il a rencontrée sur les côtes de Normandie, servoient de retraite à un petit coquillage du genre des patelles, qui s'établissant dans ces tiges, y forme une cavité où il vit, & à laquelle il est adhérent. Ce coquillage est d'une couleur verdâtre très-approchante de celle de la plante.

Dans les temps où les peuples n'avoient point de communication entre eux, la nourriture commune des hommes de chaque pays devoit être la graine, le fruit, la racine qu'on y trouvoit en plus grande abondance, qui exigeoit le moins de soins, dont la récolte étoit moins sujette aux accidens. Cette nourriture commune devoit être plus variée qu'on ne l'observe aujourd'hui, où des

rapports plus longs & plus fréquens entre les peuples, les ont rapprochés davantage dans leurs habitudes. Les poëtes, les historiens, les naturalistes anciens ont beaucoup parlé d'un peuple d'Afrique, qu'ils appeloient *Lotophages* (*mangeurs de lotos*); mais l'on ignoroit quelle étoit cette nourriture sur laquelle ils ne nous avoient donné que des notions vagues, mêlées de beaucoup de fables. M. Desfontaines qui a visité le pays habité autrefois par ces peuples, prouve que le lotos étoit une espèce de jujubier très-commun encore dans le pays.

La recherche des intégrales doubles est principalement utile pour trouver la grandeur des solides, & pour calculer leur attraction; & l'on sent dans combien de questions importantes d'analyse ou de mécanique, cette même recherche peut devenir également nécessaire.

M. le Gendre donne ici un moyen ingénieux & simple d'en diminuer les difficultés à l'aide d'une transformation des variables, & il en déduit plusieurs théorêmes importans sur l'attraction des sphéroïdes.

M. le Paute d'Agelet, quelques mois après son entrée à l'Académie, s'est embarqué avec M. de la Peyrouse, & les observations faites dans ce premier voyage, entrepris par lui à l'âge de vingt ans, doivent augmenter les regrets de ceux qui s'intéressent aux progrès des sciences.

M. Charles examine dans ce Mémoire la solution d'une équation aux différences finies, dans laquelle on

prendroit alternativement les côtés des deux polygones qui, suivant la manière ordinaire d'envisager ces questions, sont le lieu de l'équation, & il montre que cette solution repond précisément à cette deuxième integrale, qu'il a déjà trouvée par une méthode purement analytique.

Il y joint une formule d'interpolation très-générale & très-simple.

Dans ces Mémoires l'auteur suit constamment la même marche ; il cherche par l'expérience seule la loi du phénomène qu'il examine, & ce n'est qu'après l'avoir trouvée, qu'il examine par le calcul, si cette loi est d'accord avec celles que les premières expériences lui ont fait reconnoître, avec les principes généraux qu'il en a déduits.

L'experience le conduit encore à l'hypothèse de deux fluides electriques, tels que les molécules de chacun d'eux se repoussent entre elles, & attirent celles de l'autre.

On a senti depuis longtemps l'utilité d'une carte générale de la France levée topographiquement, mais dont une suite de triangles astronomiquement déterminés fixent un nombre de points suffisant pour répondre de la précision de tout l'ouvrage. Cet immense travail est terminé, & il

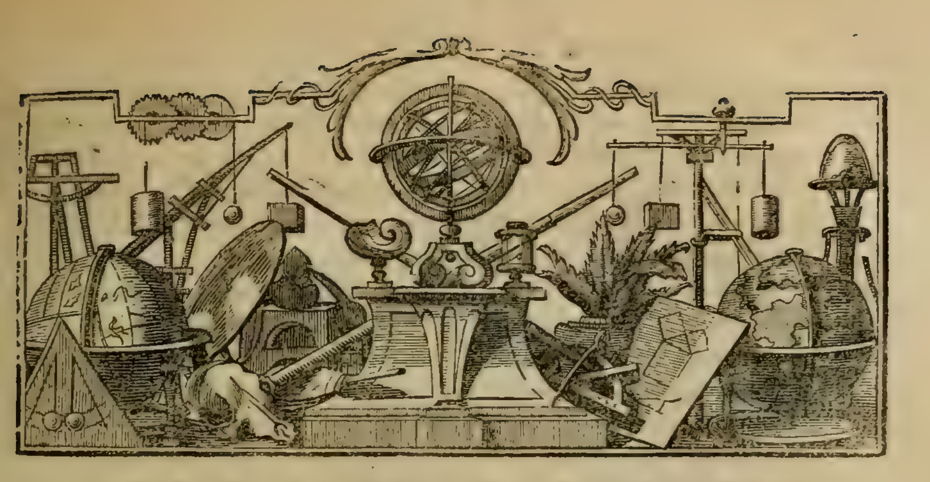
reçoit un nouveau lustre de celui, par lequel on est parvenu à joindre par d'autres triangles astronomiques les observatoires de Paris & de Gréenwich. Par ce moyen les cartes de France & d'Angleterre ne forment plus qu'un même tout, entrent dans un même système, & donnent lieu d'espérer que cette entreprise, dont la France a donné l'exemple, embrassera bientôt l'Europe entière.

La vieillesse de M. Maraldi & ses infirmités ne lui permettoient plus de suivre ses travaux astronomiques, que son éloignement de l'Académie n'avoit pas interrompus. Il en avoit chargé M. Jacques-Philippe Maraldi son neveu. La mort nous a enlevé un confrère qui étoit depuis long-temps perdu pour nous, mais qui jusqu'à la fin de sa longue carrière ne l'a point été pour les sciences.

Les métaux combinés avec l'oxigène, donnent des composés qui peuvent se combiner avec les substances alkalines, & former avec elles de véritables sels; en sorte que les métaux qui peuvent se dissoudre dans les acides & qui dans ces combinaisons se rapprochent des alkalis & en remplissent en quelque sorte la fonction, deviennent, lorsqu'ils sont oxigenés, des espèces d'acides & entrent comme tels dans de nouvelles combinaisons salines.

Cette combinaison faite immédiatement, excéderoit dans beaucoup de pays le prix commun de l'alun. M. Chaptal propose de l'exécuter en soumettant la terre argileuse qui est la base de ce sel à l'action de l'acide qui se dégage pendant la combustion du soufre. Mais si on enduit de plomb la chambre où cette combustion s'exécute, il en résulte une dépense trop considérable encore. Il falloit donc chercher un mastic inattaquable par cette vapeur, qui l'empêchât de s'échapper, & que la chaleur ne pût ni gercer ni faire couler. Un mélange de partie égale de poix resine, de térébenthine & de cire lui a présenté tous ces avantages, & ce mastic peut devenir utile à beaucoup d'autres usages importans.





HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES SCIENCES.

ANNÉE M. DCCLXXXVIII.

RAPPORT

FAIT à l'Académie des Sciences, par MM. BORDA, LAGRANGE, LAVOISIER, TILLET & CONDORCET, le 27 Octobre 1790.

L'ASSEMBLÉE NATIONALE a demandé l'opinion de l'Académie ſur la queſtion de ſavoir *s'il convient de fixer invariablement le titre des métaux monnoyés, de manière que les*

espèces ne puissent jamais éprouver d'altération que dans le poids, & s'il n'est pas utile que la différence tolérée sous le nom de remède, *soit toujours en dehors. Elle a chargé en même temps l'Académie d'indiquer aussi l'échelle de division qu'elle croira la plus convenable, tant pour les poids que pour les autres mesures, & pour les monnoies.*

Le titre des monnoies, c'est-à-dire, le rapport entre la masse du métal précieux dont elles sont composées & l'alliage qu'il est d'usage d'y joindre, peut être fixé avec une assez grande précision, mais non avec une exactitude rigoureuse. On peut répondre de ne pas ou tomber au-dessous ou s'élever au-dessus d'un terme fixé, de rester dans une limite très-étroite, mais non d'atteindre exactement un point déterminé.

Ainsi pour l'argent, par exemple, on peut à la rigueur répondre de se tenir dans les limites d'un grain ou d'un grain & demi de fin, c'est-à-dire, qu'on peut répondre de l'exactitude à 2 ou 3 576.es près. Pour l'or, on peut se tenir dans les limites d'un ou deux trente-deuxièmes de karat, c'est-à-dire, qu'on peut répondre de l'exactitude à un ou deux 768.es près.

Cette erreur tient à deux causes; à la difficulté de rendre parfaitement homogènes les métaux alliés, & de prévoir rigoureusement l'altération que l'action du feu peut occasionner, & à l'impossibilité d'avoir une méthode d'essayer absolument rigoureuse: il n'est d'ailleurs aucune expérience de physique, aucune opération réelle qui ne soit exposée à ces petites incertitudes.

Il faut donc laisser une certaine latitude, & par conséquent dire, par exemple : la monnoie d'argent sera au titre de 11 deniers, mais si elle se trouve entre 10 deniers 22 grains & demi & 11 deniers, elle sera réputée bonne; ou dire, la monnoie sera au titre de 11 deniers, mais on tiendra compte au fabricateur de ce qu'elle contiendra au-dessus jusqu'à 11 deniers 1 grain & demi. On suppose alors que malgré les soins du fabricateur, il ne peut vouloir fabriquer à

11 deniers & non au-deſſus, ſans riſquer de tomber juſqu'à 10 deniers 22 grains & demi, & qu'il ne peut vouloir fabriquer à 11 deniers au moins, ſans riſquer de s'élever juſqu'à 11 deniers 1 grain & demi.

Il en eſt de même du poids de chaque monnoie. Si on ſuppoſe qu'une pièce doive peſer 200 grains, il faut ou regarder comme bonne celle qui n'en pèſera que 199, ſi telles ſont les bornes de l'exactitude à laquelle on peut parvenir, ou paſſer au fabricateur les pièces ſuivant leur poids réel, pourvu qu'elles ſoient entre 200 & 201 grains.

Cette latitude accordée, ſoit dans le titre, ſoit dans le poids, s'appelle *remède*. On dit que le remède eſt en dedans, ſi on admet comme bonnes les pièces qui ſont d'une moindre quantité au-deſſous du titre ou du poids établi; on dit que le remède eſt en dehors, ſi on exige que les pièces ayent au moins le titre & le poids fixés par la loi, mais en tenant compte de l'excédant juſqu'à une limite déterminée.

Les monnoies ne ſont priſes en général dans le commerce que comme ayant le poids & le titre au-deſſous deſquels elles ſeroient condamnées. Ainſi, par exemple, une monnoie d'argent à 11 deniers de fin au remède d'un grain & demi, ſera priſe comme une monnoie à 10 deniers 22 grains & demi; & ſi le remède étoit en dehors, une monnoie à 10 deniers 22 grains & demi, mais qui pourroit aller juſqu'à 11 deniers, ne ſeroit priſe également que pour une monnoie à 10 deniers 22 grains & demi.

Il eſt donc indifférent en ſoi, ſous ce point de vue, de placer le remède en dehors ou en dedans, mais il ne l'eſt jamais d'employer un langage précis, un langage qui préſente les objets tels qu'ils ſont, au lieu de celui qui les repréſente ſous un faux jour.

Ainſi, il vaut mieux dire: la monnoie ſera au titre de 10 deniers 22 grains & demi, le remède étant en dehors, que de dire, la monnoie ſera au titre de 11 deniers avec un remède d'un grain & demi, puiſque dans les deux cas elle ſera toujours priſe comme étant au titre de 10 deniers

22 grains & demi. Il en eſt de même du remède de poids.

Le ſeul cas où l'on ſeroit obligé de mettre en dedans le remède d'aloi, c'eſt-à-dire, le remède qui ſe rapporte au titre, mais qui alors ſeroit très-petit, ſeroit celui où l'on voudroit fabriquer de la monnoie d'un métal auſſi pur que l'art peut le donner. (1)

On pourroit croire qu'il y auroit plus de ſimplicité à établir que la monnoie contiendroit rigoureuſement un tel poids de fin, ce qui confondroit les deux remèdes en un ſeul; mais cette ſimplicité apparente auroit un grand inconvénient, on ignoreroit ſi une telle pièce, dont on a vérifié le poids, eſt au-deſſous, par exemple, du poids fixé par la loi, parce qu'elle eſt réellement trop foible, ou parce qu'elle ſe trouve à un titre plus élevé. Il convient de ſéparer l'exactitude du poids de celle du titre, parce que la première peut toujours être vérifiée par des moyens ſimples; il ſuffit de peſer les pièces avec de bonnes balances.

Le titre des monnoies ne doit être changé que dans les circonſtances où il eſt convenable de faire une refonte

(1) Nous ne nous arrêterons pas à examiner ici les avantages qu'auroit l'adoption de ce principe, qui donneroit une eſpérance plus grande de voir un jour les différens peuples employer une monnoie uniforme. Les frais de fabrication ſeroient augmentés à la vérité, mais ces métaux purs conſerveroient comme lingots l'augmentation de valeur que l'affinage leur donne dans le commerce, & la conſerveroient par-tout. Comme en fondant ces monnoies on perdroit les frais de fabrication qu'alors il faudroit retenir, on n'auroit pas à craindre d'être forcé à une fabrication ſuperflue, & il n'y auroit même alors aucun inconvénient qu'elles fuſſent fondues en petites parties, pour remplacer les métaux affinés lorſqu'on éprouveeoit quelques difficultés à s'en procurer. L'objection la plus forte contre l'uſage des métaux purs dans les monnoies, eſt la crainte qu'elles ne s'uſent plus vîte. Mais la dureté que l'alliage leur communique, augmente-t-elle ou diminue-t-elle la perte qu'elles eſſuient par le frottement! c'eſt une queſtion qui n'a jamais été réſolue par des expériences directes; & l'Académie ſe propoſe d'en faire, pour éclairer un fait dont la connoiſſance peut être utile non ſeulement pour l'art de fabriquer les monnoies, mais pour un grand nombre d'autres.

Les premières expériences ont prouvé que les monnoies d'argent pur perdoient moins que les monnoies alliées, lorſque le frottement avoit lieu entre des pièces ſemblables, mais qu'elles perdoient davantage, lorſque le frottement avoit lieu entre les pièces pures & les pièces alliées.

générale ; autrement on introduit dans le commerce de la monnoie de même métal à deux titres différens, ce qui y jette de la confusion.

Le rehaussement du titre est utile : l'expérience a prouvé que plus les monnoies sont pures, plus elles ont de valeur dans les pays où elles n'ont pas cours, & que l'échange en est plus favorable.

Mais c'est dans le cas d'une opération générale qu'il faut s'occuper de ces avantages secondaires.

Nous ne parlons point des altérations de titre qui auroient pour objet de changer la valeur de la livre nominale, comme celle qui conserveroit le nom d'écu de trois livres à une pièce qui ayant le même poids, mais fabriquée d'un métal moins pur, n'auroit que la valeur de cinquante sous. La foi publique proscrit ces sortes d'altérations.

Il est utile que toutes les divisions des mesures, quel que soit l'usage auquel on les emploie, que celles des mesures de longueur, de surface & de continence, que celles des poids, que celles des monnoies dans leurs valeurs nominales comme pour les pièces employées dans le commerce, soient assujetties à une même échelle. Enfin, l'échelle arithmétique doit servir de base à toutes ces divisions.

On sent combien cette unité simplifie toutes les opérations par lesquelles on est obligé de comparer les volumes avec le poids, les prix avec les poids ou les mesures. De même en prenant pour base commune l'échelle arithmétique, tous les calculs de commerce se réduisent à des calculs de nombres entiers, quelles que soient les dénominations que portent les diverses divisions; au lieu que si on prend des échelles de division différentes de l'échelle arithmétique, on est obligé, pour chacune, d'avoir des règles particulières. Ainsi, dans l'usage actuel, tel homme sait calculer des sous & des deniers, qui ne sait pas calculer des toises, pieds, pouces & lignes, des livres, onces, gros & grains.

L'adoption de l'échelle arithmétique pour toutes les

divisions, diminuera beaucoup les embarras qui doivent naître de l'établissement des nouvelles mesures, & tous ceux qui sauront l'arithmétique simple, pourront en calculer toutes les divisions, tandis que ceux qui savent calculer les anciennes n'éprouveront aucun embarras, puisqu'ils pourront calculer les nouvelles avec encore plus de facilité.

On auroit pu proposer de changer aussi l'échelle arithmétique, & de prendre l'échelle duodécimale, c'est-à-dire, celle qui emploie onze chiffres, & qui suit la progression des puissances de douze; mais ce changement ajouté à tous les autres, en ôtant à ceux qui ne sont pas accoutumés au calcul, une base à l'aide de laquelle ils puissent entendre les changemens & s'y conformer, en rendroit le succès presqu'impossible. Ajoutons que, non-seulement il faudroit deux chiffres nouveaux, mais que l'arithmétique parlée a pour base l'arithmétique décimale, ce qui obligeroit à la changer encore, de manière que les effets de tous ces changemens réunis, incommodes aux personnes les plus habituées à réfléchir, seroient insupportables à toutes les autres.

Nous conclurons donc que l'échelle décimale doit servir de base à toutes les divisions, & que même le succès de l'opération générale sur les poids & mesures tient en grande partie à l'adoption de cette échelle. L'impossibilité d'avoir en nombres ronds de la division immédiatement inférieure, le quart d'une unité quelconque, & celle d'en avoir jamais le tiers, sont le seul inconvénient de cette échelle; mais il est très-foible pour le quart. Au lieu de dire, par exemple, que celui d'une livre est quatre onces, on diroit qu'il est deux onces cinq gros, si la livre se divisoit en dix onces, & l'once en dix gros, & celui de la non divisibilité par trois, n'est pas assez important pour sacrifier la concordance de toutes les divisions, ou s'exposer aux embarras qui naîtroient de l'adoption d'une nouvelle échelle arithmétique.

RAPPORT

FAIT À L'ACADÉMIE DES SCIENCES,

Sur le choix d'une unité de Mesures.

Par MM. BORDA, LAGRANGE, LAPLACE, MONGE & CONDORCET.

L'IDÉE de rapporter toutes les mesures à une unité de longueur prise dans la nature, s'est présentée aux mathématiciens dès l'instant où ils ont connu l'existence d'une telle unité & la possibilité de la déterminer. Ils ont vu que c'étoit le seul moyen d'exclure tout arbitraire du système des mesures, & d'être sûr de le conserver toujours le même, sans qu'aucun autre événement, qu'aucune révolution dans l'ordre du monde pût y jeter de l'incertitude; ils ont senti qu'un tel système n'appartenant exclusivement à aucune nation, on pouvoit se flatter de le voir adopter par toutes. *19 mars 1791*

En effet, si on prenoit pour unité une mesure déjà usitée dans un pays, il seroit difficile d'offrir aux autres des motifs de préférence capables de balancer l'espèce de répugnance, sinon philosophique, du moins très-naturelle, qu'ont les peuples pour une imitation qui paroît toujours l'aveu d'une sorte d'infériorité : il y auroit donc au moins autant de mesures que de grandes nations. D'ailleurs, quand même presque toutes auroient adopté une de ces bases arbitraires, mille événemens faciles à prévoir, pourroient faire naître des incertitudes sur la véritable grandeur de cette base; & comme il n'existeroit point de moyen rigoureux de vérification, il s'établiroit à la longue des différences entre les mesures. La diversité qui existe

aujourd'hui entre celles qui ſont en uſage dans les divers pays, a moins pour cauſe une diverſité originaire qui remonte à l'époque de leur établiſſement, que des altérations produites par le temps. Enfin, on gagneroit peu, même dans une ſeule nation, à conſerver une des unités de longueur qui y ſont uſitées; il n'en faudroit pas moins corriger les autres vices du ſyſtème des meſures, & l'opération entraîneroit une incommodité preſque égale pour le plus grand nombre.

On peut réduire à trois les unités qui paroiſſent les plus propres à ſervir de baſe; la longueur du pendule, un quart du cercle de l'équateur, enfin un quart du méridien terreſtre.

La longueur du pendule a paru en général mériter la préférence. Elle préſente l'avantage d'être plus facile à déterminer & par conſéquent à vérifier, ſi quelques accidens arrivés aux étalons en amenoient la néceſſité. De plus, ceux qui voudroient adopter cette meſure déjà établie chez un autre peuple, ou qui après l'avoir adoptée auroient beſoin de la vérifier, ne ſeroient pas obligés d'envoyer des obſervateurs à l'endroit où la première opération auroit été faite.

En effet, la loi des longueurs du pendule eſt aſſez certaine, aſſez confirmée par l'expérience pour être employée dans les opérations ſans avoir à craindre que des erreurs imperceptibles. Quand même d'ailleurs on ne voudroit pas avoir égard à cette loi, on ſent qu'une comparaiſon de la différence de longueur entre les pendules une fois exécutée, pourroit toujours être vérifiée, & qu'ainſi l'unité de meſure deviendroit invariable pour tous les lieux où cette comparaiſon auroit été faite; ainſi l'on y pourroit réparer immédiatement l'altération accidentelle des étalons, ou y déterminer la même unité de meſure à quelqu'époque que l'on prît la réſolution de l'adopter. Mais nous verrons dans la ſuite qu'on peut rendre ce dernier avantage commun à toutes les meſures naturelles,

&

& employer les obſervations du pendule à les vérifier, quoiqu'elles n'ayent pas ſervi de baſe à leur détermination.

En employant la longueur du pendule, il paroît naturel de préférer celle du pendule ſimple, qui bat les ſecondes au 45.e degré. En effet, la loi que ſuivent depuis l'équateur juſqu'aux pôles les longueurs des pendules ſimples faiſant des oſcillations égales, eſt telle, que celle du pendule au 45.e degré eſt préciſément la valeur moyenne de toutes ces longueurs, c'eſt-à-dire, qu'elle eſt égale à leur ſomme diviſée par leur nombre. Elle eſt également une moyenne & entre les deux longueurs extrêmes priſes, l'une au pôle, l'autre à l'équateur, & entre deux longueurs quelconques correſpondantes à des diſtances égales, l'une au nord & l'autre au midi, de ce même parallèle. Ce ne ſeroit donc pas la longueur du pendule ſous un parallèle déterminé qui ſeroit ici l'unité de meſure, mais la longueur moyenne des pendules inégaux entr'eux qui battent les ſecondes aux diverſes latitudes.

Cependant nous devons obſerver que cette unité ainſi déterminée, renferme en elle-même quelque choſe d'arbitraire. La ſeconde de temps eſt la quatre-vingt-ſix mille quatre centième partie du jour, & par conſéquent une diviſion arbitraire de cette unité naturelle. Ainſi, pour fixer l'unité de longueur, on emploie non-ſeulement un élément hétérogène (le temps), mais un élément arbitraire.

A la vérité on éviteroit ce dernier inconvénient, en prenant pour unité le pendule hypothétique, qui ne feroit qu'une oſcillation en un jour, longueur qui, diviſée en dix milliards de parties, donneroit une unité de meſure uſuelle d'environ vingt-ſept pouces; & cette unité répondroit au pendule qui fait cent mille oſcillations dans un jour. Mais alors on conſerveroit encore l'inconvénient d'admettre un élément hétérogène, d'employer pour déterminer une unité de longueur, le temps, ou ce qui eſt la même choſe ici, l'intenſité de la force de gravité à la ſurface de la terre: or s'il eſt poſſible d'avoir une unité de longueur qui ne dépende

d'aucune autre quantité, il paroît naturel de la préférer. D'ailleurs, une unité de meſure priſe ſur la terre même, a un autre avantage, celui d'être parfaitement analogue à toutes les meſures réelles, que dans les uſages communs à la vie, on prend auſſi ſur la terre, telles que les diſtances entre des points de ſa ſurface, ou l'étendue de portions de cette même ſurface. Il eſt bien plus naturel en effet de rapporter la diſtance d'un lieu à un autre, au quart d'un des cercles terreſtres, que de la rapporter à la longueur d'un pendule.

Nous avons donc cru devoir nous déterminer pour ce genre d'unité de meſure, & préférer enſuite le quart du méridien au quart de l'équateur. Les opérations néceſſaires pour déterminer ce dernier élément, ne pourroient s'exécuter que dans des pays trop éloignés de nous, pour qu'elles n'entraînaſſent pas des dépenſes & des difficultés fort au-deſſus des avantages qu'on pourroit s'en promettre. Les vérifications, ſi jamais on vouloit y recourir, ſeroient plus difficiles pour toutes les nations, du moins juſqu'au temps où les progrès de la civiliſation s'étendront aux peuples de l'équateur, temps malheureuſement encore bien éloigné de nous. La régularité de ce cercle n'eſt pas plus aſſurée que la ſimilitude ou la régularité des méridiens. La grandeur de l'arc céleſte, répondant à l'eſpace qu'on auroit meſuré, eſt moins ſuſceptible d'être déterminé avec préciſion; enfin on peut dire que chaque peuple appartient à un des méridiens de la terre; mais qu'une partie ſeulement eſt placée ſous l'équateur.

Le quart du méridien terreſtre deviendroit donc l'unité réelle de meſure, & la dix millionième partie de cette longueur en ſeroit l'unité uſuelle. On voit ici que nous renonçons à la diviſion ordinaire du quart du méridien en degrés, du degré en minutes, de la minute en ſecondes; mais on ne pourroit conſerver cette ancienne diviſion, ſans nuire à l'unité du ſyſtème de meſure, puiſque la diviſion décimale qui répond à l'échelle arithmétique, doit être préférée pour les meſures d'uſage; & qu'ainſi l'on auroit pour celles

de longueur seules deux systèmes de division, dont l'un s'adapteroit aux grandes mesures, & l'autre aux petites. La lieue, par exemple, ne pourroit être à la fois & une division simple du degré, & un multiple de la toise en nombres ronds. Les inconvéniens de ce double système seroient éternels : au contraire ceux du changement seront passagers ; ils ne tomberont d'ailleurs que sur un petit nombre d'hommes accoutumés au calcul, & nous n'avons pas cru que la perfection de l'opération dût être sacrifiée à un intérêt, qu'à beaucoup d'égards nous pouvions regarder comme personnel.

En adoptant ces principes, on n'introduira rien d'arbitraire dans les mesures que l'échelle arithmétique sur laquelle leurs divisions doivent nécessairement se régler. De même il n'y aura rien d'arbitraire dans les poids que le choix de la substance homogène, & facile à retrouver toujours dans le même degré de pureté & de densité, à laquelle il faut rapporter la pesanteur de toutes les autres, comme, par exemple, si on choisit pour base l'eau distillée, pesée dans le vide, ou rappelée au poids qu'elle y auroit, & prise au degré de température où elle passe de l'état de solide à celui de liquide. C'est encore à ce même point de température que seroient rapportées toutes les mesures réelles employées dans les opérations, en sorte qu'il n'existeroit dans tout l'ensemble du système rien d'arbitraire, que ce qui l'est nécessairement & par la nature même des choses. Encore le choix & de cette substance & de ce terme de température est-il fondé sur des raisons physiques, & la conservation de l'échelle arithmétique actuelle prescrite par la crainte du danger auquel ce changement, ajouté à tous les autres, exposeroit le succès de l'opération entière.

La mesure immédiate du quart d'un méridien terrestre seroit impraticable ; mais on peut parvenir à en déterminer la grandeur, en mesurant un arc d'une certaine étendue pour en conclure la valeur de l'arc total, soit immédiatement, soit en déduisant de cette mesure, la grandeur d'un

arc du méridien répondant à la centième partie de l'arc céleſte de 90 degrés, & pris de manière qu'une moitié de cet arc ſoit au midi, & l'autre au nord, du 45e parallèle. En effet, comme cet arc eſt la valeur moyenne de ceux qui depuis l'équateur juſqu'aux pôles répondent à des parties égales de l'arc céleſte, ou ce qui revient au même, à des diſtances égales en latitudes, en multipliant cette meſure par cent, on aura encore la valeur du quart du méridien. Les accroiſſemens de ces arcs terreſtres ſuivent la même loi que ceux du pendule, & l'arc qui répond à ce parallèle eſt moyen entre tous les autres, de la même manière que le pendule du 45e degré l'eſt entre tous les autres pendules.

On pourroit objecter ici que la loi des accroiſſemens des degrés, en s'avançant vers les pôles, n'eſt pas auſſi certaine que celle des accroiſſemens du pendule, quoique l'une & l'autre ne renferment que la même ſuppoſition, celle de l'ellipticité des méridiens; on pourroit dire qu'elle n'a pas été confirmée également par les obſervations. Mais, 1.° il n'exiſte pas d'autre moyen d'avoir la valeur du quart d'un des cercles terreſtres. 2.° Il n'en réſulte aucune inexactitude réelle, puiſque l'on a la longueur immédiate de l'arc meſuré, avec laquelle celle que l'on aura conclue ſera toujours dans un rapport connu. 3.° L'erreur qu'on peut commettre ici dans la détermination de la centième partie du quart du méridien ne ſeroit pas ſenſible. L'hypothèſe elliptique ne peut s'éloigner de la réalité dans l'arc dont la grandeur ſera meſurée immédiatement; elle repréſentera néceſſairement avec une exactitude ſuffiſante la petite portion de courbe preſque circulaire, & un peu aplatie, que forme cet arc. 4.° Enfin, ſi cette erreur pouvoit être ſenſible, elle pourroit auſſi, par une conſéquence néceſſaire, être corrigée par les obſervations même : il ne peut ſubſiſter d'erreurs qu'autant qu'elles ſeroient inappréciables.

Plus l'arc meſuré ſera étendu, plus les déterminotions

qui en résultent seront précises; en effet, les erreurs commises dans la détermination de l'arc céleste, ou même dans les mesures terrestres, & celles de l'hypothèse, auront une influence d'autant moins sensible sur les résultats, que cet arc sera plus grand. Enfin, il y a de l'avantage à ce que les points extrêmes se trouvent l'un au midi, l'autre au nord du parallèle de 45 degrés, à des distances qui, sans être égales, ne soient pas trop disproportionnées.

Nous proposerons donc de mesurer immédiatement un arc du méridien, depuis Dunkerque jusqu'à Barcelone, ce qui comprend un peu plus de neuf degrés & demi. Cet arc seroit d'une étendue très-suffisante, & il y en auroit environ six degrés au nord, & trois & demi au midi du parallèle moyen. A ces avantages se joint celui d'avoir les deux points extrêmes également au niveau de la mer : c'est pour satisfaire à cette dernière condition qui donne l'avantage d'avoir des points de niveau invariables & déterminés par la nature, pour augmenter la grandeur de l'arc mesuré, pour qu'il soit partagé d'une manière plus égale, enfin pour s'étendre au-delà des Pyrénées, & se soustraire aux incertitudes que leur effet sur les instrumens peut produire dans les observations, que nous proposons de prolonger la mesure jusqu'à Barcelone. On ne peut satisfaire en même temps à la condition d'avoir les deux points extrêmes au niveau de la mer, & à celle de traverser le 45.e parallèle, ni en Europe, ni même dans aucune autre partie du monde, sans être obligé de mesurer un arc d'une étendue beaucoup plus grande, à moins de prendre ou la ligne que nous proposons, ou bien un autre méridien plus occidental, depuis la côte de France jusqu'à celle d'Espagne.

Ce dernier arc seroit plus également partagé par le 45.e parallèle : mais nous avons préféré celui qui s'étend de Barcelone à Dunkerque, parce qu'il suit la méridienne tracée en France, & qu'ainsi il existe déjà une mesure de cet arc, depuis Dunkerque jusqu'à Perpignan, & qu'il est

a[illegible] ceux de trouver dans les travaux déjà faits une vérification de ceux que l'on doit exécuter. En effet, si dans les nouvelles opérations on retrouve, pour la distance de Perpignan à Dunkerque, un résultat semblable dans toutes ses parties, on a un motif de plus de compter sur la bonté de ses opérations. S'il se trouve des différences, en cherchant quelles en sont les causes, & de quel côté est l'erreur, on sera sûr de découvrir ces causes & de corriger l'erreur. D'ailleurs, en suivant cette direction, on traverse les Pyrénées dans une ligne plus facile à parcourir.

Les opérations nécessaires pour ce travail seroient; 1.° de déterminer la différence de latitude entre Dunkerque & Barcelone, & en général de faire sur cette ligne toutes les observations astronomiques qui seroient jugées utiles; 2.° de mesurer les anciennes bases qui ont servi à la mesure du degré faite à Paris, & aux travaux de la carte de France; 3.° de vérifier par de nouvelles observations la suite des triangles qui ont été employés pour mesurer la méridienne, & de les prolonger jusqu'à Barcelone; 4.° de faire au 45.e degré des observations qui constatent le nombre des vibrations que feroit en un jour dans le vide au bord de la mer, à la température de la glace fondante, un pendule simple, égal à la dix millionième partie de l'arc du méridien, afin que ce nombre étant une fois connu, on puisse retrouver cette mesure par les observations du pendule. On réunit par ce moyen les avantages du système que nous avons préféré, & de celui où l'on auroit pris pour unité la longueur du pendule. Ces observations peuvent se faire avant que cette dix millionième partie soit connue. Connoissant en effet le nombre des oscillations d'un pendule d'une longueur déterminée, il suffira de connoître dans la suite le rapport de cette longueur à cette dix millionième partie, pour en déduire d'une manière certaine le nombre cherché. 5.° Vérifier par des expériences nouvelles, & faites avec soin, la

pesanteur, dans le vide, d'un volume donné d'eau distillée, prise au terme de la glace. 6.° Enfin, réduire aux mesures actuelles de longueur les différentes mesures de longueur, de surface ou de capacité usitées dans le commerce, & les différens poids qui y sont en usage, afin de pouvoir ensuite par de simples règles de trois les évaluer en mesures nouvelles lorsqu'elles seront déterminées.

On voit que ces diverses opérations exigent six commissions séparées, occupées chacune d'une de ces parties du travail. Ceux à qui l'Académie en confieroit le soin, seroient en même temps chargés de lui exposer la méthode qu'ils se proposent de suivre.

Nous nous sommes bornés dans ce premier rapport, à ce qui regarde l'unité de mesures ; nous nous proposons de présenter dans un autre, le plan du système général qui doit être établi d'après cette unité. En effet, cette première détermination exige des opérations préliminaires qui demandent du temps, & qui doivent être préalablement ordonnées par l'Assemblée Nationale. Nous nous sommes cependant déjà assez occupés de ce plan, & les résultats des opérations tant pour la mesure de l'arc du méridien que pour le poids d'un volume d'eau donné, peuvent être prévus d'une manière assez approchée pour que nous puissions assurer dès aujourd'hui qu'en prenant l'unité de mesure que nous venons de proposer, on peut former un système général où toutes les divisions suivent l'échelle arithmétique, & dont aucune partie ne renferme rien qui puisse gêner dans les usages habituels.

Nous nous bornerons à dire ici, que cette dix millionième partie du quart du méridien qui seroit notre unité usuelle de mesure, ne différeroit du pendule simple, que d'un cent quarante-cinquième environ, & qu'ainsi l'une & l'autre unité conduisent à des systèmes de mesures absolument semblables dans leurs dispositions.

Nous n'avons pas cru qu'il fût nécessaire d'attendre le concours des autres nations, ni pour se décider sur le choix

de l'unité de mesure, ni pour commencer les opérations. En effet, nous avons exclu de ce choix toute détermination arbitraire, nous n'avons admis que des élémens qui appartiennent également à toutes les nations; le choix du quarante-cinquième parallèle n'est point déterminé par la position de la France, il n'est pas considéré ici comme un point fixe du méridien, mais seulement comme celui auquel correspondent la longueur moyenne du pendule & la grandeur moyenne d'une division quelconque de ce cercle. Enfin, nous avons choisi le seul méridien où l'on puisse trouver un arc aboutissant au niveau de la mer, coupé par le parallèle moyen, sans être cependant d'une trop grande étendue qui en rende la mesure actuelle trop difficile. Il ne se présente donc rien ici qui puisse donner le plus léger prétexte au reproche d'avoir voulu affecter une sorte de prééminence.

En un mot, si la mémoire de ces travaux venoit à s'effacer, si les résultats seuls étoient conservés, ils n'offriroient rien qui pût servir à faire connoître quelle nation en a conçu l'idée, en a suivi l'exécution.

Nous concluons en conséquence à présenter ce Rapport à l'Assemblée Nationale, en la priant de vouloir bien décréter les opérations proposées, & les mesures nécessaires pour l'exécution de celles qui doivent s'étendre sur le territoire de l'Espagne.



EXPOSÉ

EXPOSÉ

DES TRAVAUX DE L'ACADÉMIE,

Sur le projet de l'uniformité des Mesures & des Poids.

L'ÉTABLISSEMENT d'un ſyſtème de poids & de meſures uniformes dans toutes les parties de la France, & qui, ayant pour baſe une unité naturelle, pût mériter d'être adopté par toutes les nations, une opération ſi grande, ſi utile, devoit être un des bienfaits de l'Aſſemblée Nationale. Pouvoit-elle négliger un moyen d'épargner au commerce du temps & des erreurs, d'établir plus d'union entre les hommes, plus d'égalité entre les citoyens; de rapprocher les nations comme les individus, de donner enfin plus de juſteſſe aux eſprits, en répandant plus de ſimplicité, plus de clarté ſur des opérations qui ſont pour tous d'un uſage habituel & néceſſaire?

Il étoit de ſa deſtinée de ne laiſſer aucune inſtitution fondée ſur l'erreur ou la violence, aucune habitude de l'ignorance ou du préjugé, ſans l'avoir ou ébranlée ou détruite, & d'étendre ſur tous les objets l'empire éternel & paiſible de la raiſon.

Cette heureuſe hardieſſe ſemble en effet former le caractère diſtinctif de la révolution Françoiſe.

Lorſque les Helvétiens & les Bataves chaſsèrent leurs tyrans, ſatisfaits d'avoir repris leur antique indépendance, ils conſervèrent leurs loix, leurs formes, leurs uſages, & ils ſe crurent libres, parce qu'ils n'obéiſſoient plus qu'aux coutumes de leurs ancêtres.

L'Angleterre, après trois révolutions, ſe contenta de confirmer par un acte ſolennel, & d'établir ſous une forme plus régulière quelques points conteſtés de ſon ancienne

constitution. L'Amérique s'en donna une nouvelle, & garda le reste de ses loix. Au milieu de ces grandes agitations, tous ont voulu se borner aux réformes nécessaires, tous ont craint de toucher aux parties de l'édifice qui se soutenoient encore. L'idée d'une régénération totale ou ne s'étoit pas offerte à eux ou les avoit effrayés. Leur raison n'avoit pas osé profiter de ses victoires, & ils n'avoient pas senti que les préjugés ébranlés par une première secousse, & dont la ligue une fois rompue n'a pas eu le temps de se former de nouveau, en deviennent plus faciles à vaincre, que c'est là le moment de profiter de leur désunion & de leur foiblesse, pour les envelopper dans une destruction commune. Cette gloire étoit réservée à la France; elle a donné la première au monde ce grand exemple & d'audace & de sagesse.

L'Assemblée Nationale a consacré par son approbation les bases adoptées par l'Académie, qui s'est empressée de nommer plusieurs commissions chargées des opérations que nécessite l'exécution des décrets. MM. Cassini, Mechain & le Gendre doivent déterminer la distance en latitude des deux points extrêmes de la ligne méridienne, & en mesurer l'étendue par une suite de triangles qui s'étendront de Dunkerque à Barcelone : depuis Dunkerque jusqu'à Perpignan ce travail a été exécuté ; mais ils le répéteront de nouveau, & soit que les mesures s'accordent, soit qu'elles se contrarient, il en résultera un moyen précieux de vérification. On a réuni ces deux objets dans une seule commission.

MM. Monge & Meusnier mesureront sur le terrain les bases sur lesquelles s'appuie cette suite de triangles. Cette mesure a été déjà faite ; ainsi l'on retrouve encore ici l'avantage de ne pouvoir se tromper, ou ce qui est la même chose, d'être assuré de reconnoître l'erreur qu'on auroit pu commettre, & d'avoir des moyens certains d'en deviner les causes & de la corriger.

MM. de Borda & Coulomb détermineront le nombre des oscillations que fait dans un jour au quarante-cinquième parallèle, un pendule simple égal à l'unité de

mesure usuelle. Ainsi, la longueur moyenne du pendule qui fait ses oscillations dans un temps déterminé, suffira sur tous les points du globe pour connoître, pour retrouver cette unité de mesure, & l'on se procurera le seul avantage qui pouvoit faire regretter de n'avoir pas choisi pour unité la longueur du pendule.

MM. Lavoisier & Haüy chercheront le poids d'un volume donné d'eau distillée, prise au terme de la glace & pesée dans le vide.

On sera surpris peut-être de voir répéter ici des opérations déjà faites, des expériences déjà connues ; mais cette surprise cessera si l'on songe que depuis un petit nombre d'années, le perfectionnement des instrumens & des méthodes a permis d'aspirer à une précision inconnue jusqu'ici ; que l'exactitude des moyens de pratique s'est rapprochée de celle de la théorie : si on considère enfin que des élémens qui peuvent influer sur les habitudes, sur les usages de tous les peuples, doivent être déterminés avec une sorte de solennité, être le résultat d'un plan régulier & combiné d'opérations liées entr'elles, qu'il faut que chacun de ces élémens ait un garant qui puisse répondre de son travail, résoudre toutes les difficultés, dissiper tous les scrupules.

On objectera peut-être encore que ce même perfectionnement des instrumens qui sans doute n'est pas à son dernier terme, est un obstacle à cette même invariabilité de l'unité de mesure, donnée pour un des principaux avantages de l'opération ; mais la perfection des instrumens est telle, que jamais le degré de précision qu'ils pourroient acquérir ne deviendra sensible dans l'usage des mesures. La différence d'un étalon & de la mesure usuelle dont il détermine l'étendue, sera toujours plus grande que l'erreur des instrumens employés aujourd'hui, ou du moins l'espace de temps qui nous sépare de celui où les opérations usuelles exigeroient & pourroient atteindre une telle précision, est si étendue, que pour un être d'une aussi courte durée que l'homme, il se confond avec l'éternité même.

Une dernière commiſſion, pour laquelle MM. Tillet, Briſſon & Vandermonde ont été nommés, eſt chargée de comparer avec la toiſe & la livre de Paris, toutes les meſures de longueur, de ſuperficie ou de capacité, tous les poids uſités en France, afin de pouvoir enſuite par le ſimple calcul, connoître leur rapport avec les nouvelles unités de meſures & de poids, travail immenſe, dans lequel le patriotiſme ſoutiendra leurs forces.

Chaque commiſſion doit rendre à l'Academie un compte détaillé & motivé des moyens qu'elle ſe propoſera d'employer, de la ſuite des opérations qu'elle jugera néceſſaires. Ainſi, le travail exécuté ſéparément & par des coopérateurs différens, ſera cependant dirigé ſur un plan unique & ſuivi dans un même eſprit.

Il ne reſtera plus qu'à établir ſur ces baſes immuables un ſyſtème nouveau de meſures & de poids, travail dont les difficultés purement philoſophiques ſont plus grandes qu'elles ne le paroiſſent d'abord, & dans lequel il faut ménager les habitudes ſans leur ſacrifier la perfection de l'enſemble, adoucir les embarras d'un changement ſans rien diminuer des avantages plus éloignés qu'il doit produire.

Tel eſt le tableau du travail confié au zèle de l'Académie par l'Aſſemblée Nationale, & accepté avec reconnoiſſance. Depuis long-temps nos recherches l'avoient préparé, nos vœux en avoient appelé l'exécution. C'eſt dans le ſein de cette compagnie, qu'un homme d'un grand génie, Huyghens, en a conçu & propoſé la première idée il y a plus d'un ſiècle. Il quitta la France parce qu'il ne pouvoit y être libre, & les bienfaits d'un prince qui ne reſpectoit pas l'aſyle de la conſcience ne purent l'y retenir : il la choiſiroit aujourd'hui pour ſa patrie ; car la véritable patrie de l'homme de génie n'eſt-elle pas le pays où ſous l'égide de la liberté il peut ſuivre en paix ſes ſolitaires méditations, & appliquer immédiatement au bonheur des peuples les vérités qu'elles lui ont révélées ?

LES Mémoires approuvés par l'Académie, & destinés pour le volume des *Savans étrangers*, sont au nombre de vingt-deux.

Sur une pierre silicée, calcaire, alumineuse, ferreuse & magnésienne, de couleur verte, en masse spathique demi-transparente, & dont la surface est cristallisée en faisceaux, par M. Hassenfratz.

Sur un moyen de perfectionner les objectifs des lunettes acromatiques : par M. Grateloup.

Sur l'acide fluorique, son action sur la terre siliceuse, & l'application de cette propriété à la gravure sur verre : par M. de Puymaurin.

Sur les tables de Jupiter & de Saturne, déduites du principe de la pesanteur universelle, suivant la théorie de M. de la Place : par M. de Lambre.

Sur l'origine de l'acide phosphorique qui se trouve dans plusieurs mines de fer : par M. Hassenfratz.

Sur la description d'une machine construite à Vrigny en Gatinois, avec laquelle on a mesuré la quantité d'eau de pluie qui est tombée en 1787, & aussi la quantité de l'évaporation : par M. de Blaveau.

Sur deux plantes, dont la fructification s'exécute dans l'intérieur de la terre & à son extérieur : par M. Gerard.

Sur les élémens de l'orbite solaire : par M. de Lambre.

Observation de la décomposition de l'eau & de la production de l'ammoniaque pendant la dissolution de l'étain dans l'acide nitrique : par M. de Morveau.

Observations sur trois espèces de chênes qui croissent dans le Bearn : par M. l'abbé Palassou.

Examen du ſel que l'on obtient en traitant l'étain avec l'acide nitreux : par M. Pelletier.

Sur le muriate d'étain fumant ou liqueur fumante de Libanius: par M. Adet.

Suite d'obſervations de la comète de 1787, faites à l'île de Bourbon : par M. de Lanux.

Recueil d'obſervations aſtronomiques faites à Viviers: par M. Flaugergues.

Sur la nitrière naturelle qui ſe trouve à Molfetta, dans la terre du Bari en Pouille : par M. Zimmermann.

Sur le mouvement horaire de la lune : par M. de Lambre.

Sur de nouveaux écueils, vigies & dangers qui ſe trouvent dans le ſud de Madagaſcar, & reconnus depuis 1780 juſqu'à 1787 : par M. Fortin.

Deſcription de la vallée du Gave Béarnois, dans les Pyrénées ; par M. Reboul.

Sur les combinaiſons qui réſultent de l'union directe du phoſphore avec les ſubſtances métalliques : par M. Pelletier.

Sur la deſcription d'un arc-en-ciel lunaire, obſervé à Lyon : par M. l'abbé Rozier.

Obſervations météorologiques faites à la Chine : par M. de Guignes le fils.

Sur la quadrature d'un eſpace terminé par des arcs de cercle : par M. de la Cipierre.

MACHINE approuvée par l'Académie, & deſtinée à être inſérée dans le *Recueil des Machines.*

Un ventilateur : par M. l'Iſle Saint-Martin, lieutenant de frégate.



ÉLOGE

DE M. DE LASSONE.

JOSEPH-MARIE-FRANÇOIS DE LASSONE, premier médecin du Roi & de la Reine, docteur-régent de la Faculté de Médecine de Paris, de l'Inſtitut de Bologne, de l'Académie de Médecine de Madrid, de la Société de Médecine, & penſionnaire vétéran de l'Académie des Sciences, naquit à Carpentras, le 3 juillet 1717, d'Antoine-Joachim de Laſſonne & de Marguerite de Bagnole.

Le père de M. de Laſſonne n'avoit accepté la place de médecin ordinaire du Roi, & quitté le comtat Vénaiſſin ſa patrie, que pour procurer à ſon fils ces inſtructions des grands maîtres que la capitale ſeule peut offrir, & cependant ne pas le ſouſtraire aux regards paternels, encore plus difficiles à remplacer.

Le ſuccès répondit à la ſageſſe de ces vues; & à vingt-cinq ans M. de Laſſonne entra comme anatomiſte à l'Académie des Sciences.

Il ne devoit pas cet honneur à ſon opiniâtreté dans le travail : plus d'une fois ſa famille avoit été allarmée de ſon goût pour les plaiſirs de ſon âge, & chaque fois il la raſſuroit par quelqu'ouvrage qui lui méritoit ou une couronne académique ou l'eſtime de ſes maîtres. Ces allarmes furent ſur-tout très-vives lorſque ſes parens apprirent qu'il étoit de la ſociété de cette actrice célèbre par ſa beauté, dont le nom lié à celui de Zaïre eſt devenu immortel. On ſut qu'il avoit même fait une comédie, on en exigea le ſacrifice : il ſe ſoumit, & jamais depuis il n'a voulu dire le titre de cette

pièce, qui cependant avoit été jouée avec succès sous un autre nom, & étoit restée au théâtre. Ce travail si étranger à ses études & ce sacrifice, étoient l'un & l'autre une preuve de la facilité, de la fléxibilité qui depuis lui permirent d'acquérir dans plusieurs genres de sciences une juste célébrité.

S'il n'eut pas cette force de tête qui par des combinaisons profondes conduit à des vérités nouvelles, il eut cette heureuse sagacité qui éclaire & qui perfectionne, s'empare de ce que les premiers inventeurs ont laissé échapper, & qui unie à un esprit juste, marche d'un pas égal mais sûr, avance toujours & ne s'égare jamais.

M. de Lassone parut d'abord se livrer presque exclusivement à l'anatomie.

Ses principaux ouvrages ont pour objet la structure intime des os, de la tunique des artères & de la rate.

Il montra que le tissu des os est entièrement fibreux, que c'est dans chaque fibre même & non entre leurs mailles, entre les divers réseaux formés par elles que la matière terreuse se dépose.

Il fit voir qu'une des membranes des artères jouit d'une force musculaire qui lui est propre, & qui contribue avec celle du cœur à entretenir la circulation.

Ruisch regardoit la rate comme entièrement vasculaire. Malpighi y avoit observé une substance pulpeuse & des cellules membraneuses; & les anatomistes étoient partagés entre deux observateurs célèbres par leur exactitude, qui savoient bien voir & qui étoient d'un avis opposé, en ne parlant cependant que de ce qu'ils avoient vu.

M. de Lassone décida cette question; il expliqua pourquoi la substance pulpeuse avoit échappé à Ruisch, & pourquoi cette même substance avoit présenté à Malpighi l'apparence illusoire de véritables membranes.

Il se proposoit de suivre ce travail; il osoit même espérer de deviner l'usage de la rate, qui est encore inconnu, quoique ce viscère, sans être rigoureusement nécessaire à la conservation

conſervation inſtantanée de la vie, paroiſſe l'être à ſa durée.

Mais un événement extraordinaire mit un terme aux travaux anatomiques de M. de Laſſone. En choiſiſſant parmi quelques cadavres un ſujet propre à ſes diſſections, il croit n'apercevoir ſur l'un d'eux que des ſignes de mort trop incertains, & il cherche à ranimer une vie qui peut-être n'eſt pas encore éteinte. Long-temps ſes efforts ſont vains, mais la première impreſſion l'emporte ſur cette longue inutilité; enfin il aperçoit des mouvemens qui ne ſont plus équivoques. Cette mort apparente n'étoit qu'une criſe ſalutaire. M. de Laſſone guérit le malade : il étoit pauvre; M. de Laſſone le nourrit, le conſole. Il craint que cette nouvelle vie ne ſoit pour cet infortuné qu'un préſent funeſte; il croit moins avoir rendu un ſervice à l'humanité, qu'avoir contracté une dette envers elle, & il regarde comme un devoir de ſe charger du bonheur de celui qui doit à ſes ſoins la funeſte poſſibilité de pouvoir encore être malheureux. L'idée d'avoir été expoſé à commettre un crime involontaire, ne permit plus à M. de Laſſone de ſe livrer à des travaux que depuis il ne pouvoit enviſager ſans effroi. L'hiſtoire naturelle prit la place de l'anatomie, & les connoiſſances qu'il avoit déja, le trouvèrent prêt à ſuivre cette nouvelle carrière.

Nous ne citerons ici que ſon travail ſur les grès criſtalliſés de Fontainebleau. M. de Laſſone ne ſe borne pas à décrire ces criſtalliſations que M. Bezout avoit obſervées le premier, il cherche à montrer comment elles ont pu ſe former. En général les molécules des criſtaux échappent à nos ſens : c'eſt au ſein d'un fluide qu'ils ſe forment, ſoit que leur ſubſtance y ſoit diſſoute comme dans les ſels, ſoit qu'elle-même ſoit réduite en liqueur, comme dans la criſtalliſation de l'eau ou des métaux par le refroidiſſement. Dans les criſtaux de grès, les molécules ſont ſenſibles; mais ce n'eſt pas, comme on pourroit le croire au premier coup-d'œil, une exception à la règle générale. M. de Laſſone prouve qu'ils ſont de véritables criſtaux ſpathiques calcaires, qui

dans leur formation ont enveloppé une grande quantité de particules quartzeuſes. Des deux ſubſtances qui compoſent ce grès, celle dont les parties étoient dans l'état élémentaire au moment de la réunion, eſt la ſeule qui ait pris une forme régulière, & cette forme la même qu'elle auroit affectée ſi elle avoit été pure & ſéparée des particules plus groſſières qu'elle a entraînées.

La chimie, ſi étroitement liée à l'hiſtoire naturelle, devint enfin l'occupation chérie de M. de Laſſone. Ses nombreux mémoires offrent une ſuite précieuſe d'obſervations nouvelles, utiles, ſoit au progrès de la ſcience, ſoit à celui de l'art de compoſer les remèdes : par-tout on voit la ſagacité de l'obſervateur, une ſage critique, un eſprit toujours juſte, toujours méthodique.

La médecine lui doit de nouvelles préparations de mercure & d'antimoine. Les combinaiſons de ce demi-métal avec les acides, lui ont offert des ſels inconnus aux chimiſtes, & lorſque l'analyſe des airs a enrichi la chimie d'une branche ſi féconde, & répandu ſur la ſcience entière une lumière inattendue, il n'a pas craint d'entrer dans la carrière, & on lui doit l'obſervation curieuſe de la propriété qu'a l'air nitreux d'ôter à l'air inflammable mêlé à l'air vital, la propriété de détoner. C'eſt auſſi M. de Laſſone qui, dans un travail commun entre lui & M. Cornette, le compagnon fidèle de ſes travaux, obſerva le phénomène ſingulier de l'inflammation du phoſphore par l'affuſion de l'eau froide, phénomène qui ſeroit pris encore dans les neuf dixièmes du globe pour un véritable miracle.

Une révolution dans une ſcience eſt preſque toujours un malheur pour ceux qui la cultivent, lorſqu'ils ont perdu l'ardeur & la flexibilité de la jeuneſſe. Il leur eſt difficile de ſuivre le progrès des idées nouvelles, alors d'autant plus rapide que chaque fait, chaque expérience eſt en quelque ſorte une découverte, & il ſeroit dangereux pour leur gloire de s'obſtiner à ſuivre les idées anciennes. Il faut peut-être autant de ſimplicité dans le caractère que de juſteſſe d'eſprit

pour ſavoir échapper en même temps à ces deux inconvéniens; M. de Laſſone en fut préſervé. Naturellement éloigné des théories hypothétiques, ſe bornant preſque toujours à des expériences, il ne vit dans cette révolution que des faits de plus à obſerver; il n'y eut guère de changé pour lui que les mots: il crut pouvoir ſe diſpenſer d'adopter ce changement puiſque l'ancienne langue étoit encore généralement entendue, & il continua paiſiblement ſes travaux.

M. de Laſſone, quoique le nombre de ſes ouvrages eût pu faire croire qu'il s'étoit excluſivement livré aux ſciences, n'avoit pas négligé la pratique de la médecine. Après l'avoir exercée long-temps dans les hôpitaux & dans les cloîtres, il fut appelé à la Cour, & parcourant ainſi la chaîne ſociale toute entière, il put obſerver ce que les inſtitutions humaines ajoutent aux maux de la nature, & voir comment, en modifiant les paſſions & les habitudes, elles changent le tempérament des malades & le caractère des maladies. Il vit que l'excès de la richeſſe & celui de la pauvreté, le déſir immodéré des honneurs ou du pouvoir, irrité par le ſuccès même, & le reſſentiment de l'oppreſſion ou de l'injure que la crainte force à diſſimuler, le vide que les jouiſſances inquiétes de la vanité laiſſent dans une ame qui ne connoît plus qu'elles, & l'abattement d'une longue humiliation, ſont également funeſtes à la ſanté comme ils le ſont au bonheur; & que ce n'eſt ni près du trône ni dans les réduits de la misère qu'on peut eſpérer de trouver des tempéramens ſains & robuſtes, des ames fortes & paiſibles. Mais c'eſt dans les cloîtres ſur-tout où la vie eſt plus uniforme, où tous les individus ſont ſoumis à une loi commune, qu'il ſentit plus fortement l'effet des affections morales, parce que chaque cauſe y agit d'une manière plus égale & plus iſolée: & ſi l'on avoit beſoin de preuves de fait pour ſavoir combien il eſt téméraire de s'impoſer des ſacrifices éternels, & cruel de conſacrer ces vœux indiſcrets par la force des loix & de l'autorité publique, les

obſervations de M. de Laſſone en fourniroient de certaines. Les cloîtres lui montroient les effets lents & terribles d'une lutte éternelle entre la nature & le devoir, des regrets d'une liberté que rien ne peut plus rendre, & du poids d'une chaîne qu'il faut traîner juſqu'au tombeau. Mais heureuſement cette chaîne eſt briſée, & nous approchons de l'époque où les inſtitutions ſociales en perfectionnant la nature ſans la contraindre, en aſſurant, en étendant les droits des hommes ſans les bleſſer jamais, ſeconderont l'ordre éternel du monde qu'elles ont contrarié ſi long-temps.

A Verſailles, ſucceſſivement premier médecin de deux reines, devenu enſuite premier médecin du Roi, réunion dont avant lui le célèbre Fernel étoit le ſeul exemple, il obtint dans deux cours différentes la même confiance & la même eſtime. Les miniſtres, les courtiſans avoient changé; ces eſpèces d'aſſociations ſi mobiles, qui pour quelques inſtans réuniſſent ſur elles la faveur ou le pouvoir, s'étoient plus d'une fois formées d'individus différens & de partis oppoſés, & M. de Laſſone avoit conſervé les mêmes amis. Son crédit reſtoit toujours le même, parce qu'il n'aſpiroit qu'à faire en ſilence un peu de bien, & ne vouloit de crédit que celui qui accompagne toujours une probité reconnue.

Il eſt ſi naturel à l'homme de chercher à conſerver les prérogatives de ſa place, qu'on eſt parvenu à en faire un honneur, & preſqu'un devoir. Ce n'eſt point pour ſoi-même qu'on les réclame, c'eſt pour ne pas laiſſer diminuer entre ſes mains le dépôt qui leur a été confié. Ce langage eſt reçu, il inſpire une ſorte de reſpect; ſouvent il a fait pardonner l'orgueil & même l'avidité. M. de Laſſone étoit ſupérieur à ces préjugés: à peine a-t-il la ſurvivance de la place de premier médecin, qu'il s'occupe des moyens de détruire, ce qu'on appeloit les droits de cette place, ce qu'il en regardoit comme les abus; mais il veut que cet abandon ſoit utile, & il imagine de confier à une académie de médecine l'examen des remèdes nouveaux & la police des eaux minérales du royaume.

Un droit levé ſur la vente de ces eaux, vente que pour la ſûreté du public on aſtreint à des formalités, faiſoit partie du traitement du premier médecin, & il doit être à l'avenir le patrimoine de la nouvelle ſociété. Ainſi cette portion importante des remèdes vraiment utiles ſera ſoumiſe à une inſpection plus ſûre, & on trouvera ſans doute des moyens de concilier les droits de la liberté & de la propriété avec une vigilance néceſſaire. Les remèdes ſecrets, ſouvent ſi dangereux, ne tromperont plus ſous la foi d'une permiſſion trop facilement accordée, & cette police confiée à une ſociété d'hommes éclairés ſous une conſtitution libre, ſe bornera ſans doute à avertir les citoyens des dangers qu'ils courent, à les inſtruire des reſſources réelles que l'art leur prépare, ſans cependant gêner leur confiance, & leur ôter le droit qu'a chaque homme de choiſir pour lui ſes médecins & ſes remèdes. En même temps la médecine comme ſcience devint l'objet des recherches d'une ſociété chargée d'en étendre la ſphère, & d'en approfondir les principes. Jamais un médecin n'avoit plus fait pour ſon art, & cette action, à la fois ſi noble, ſi utile, n'a été pour lui qu'une ſource de chagrins. En vain par amour pour l'égalité, & dans la crainte qu'un foible intérêt de vanité ne parût ſouiller la pureté du ſacrifice qu'il avoit fait aux ſciences, abdiqua-t-il l'honneur de préſider la nouvelle ſociété, honneur attaché à ſa place par les premiers règlemens. L'implacable eſprit de corps ne ceſſa de le pourſuivre : il éprouva qu'un bien général, foible pour chacun de ceux qui le partagent eſt méconnu & bientôt oublié, tandis que les prétentions particulières que ce bien contrarie, ſont actives & bruyantes; & il apprit par ſon expérience que les abus qui ont tant de cenſeurs lorſqu'on les menace de loin, ne trouvent plus que des défenſeurs lorſqu'on commence à enviſager leur deſtruction comme réelle & prochaine. M. de Laſſone ſupporta la calomnie avec une tranquillité que le témoignage de ſa conſcience lui rendoit facile.

Des amis vertueux ſont la plus douce conſolation contre l'injuſtice; & M. de Laſſone jouit pendant toute ſa vie de ce bonheur. L'amitié de Fontenelle avoit honoré de ſes conſeils ſes premiers pas dans le monde & dans la carrière des ſciences. Winſlou avoit voulu être ſon inſtituteur dans l'anatomie, & en reprendre pour lui les fonctions. D'Alembert & Buffon furent ſes contemporains, ſes confrères & ſes amis. L'abbé Arnaud ſon compatriote conſerva pour lui juſqu'à la mort la tendre affection que leur enfance avoit vu naître, & cette union fondée ſur le ſentiment & ſur l'eſtime ne fut point refroidie par l'oppoſition de leurs goûts, de leurs caractères, de leurs occupations. Plus âgé, ſa douceur, ſon zèle éclairé pour les progrès des lumières, lui méritèrent des amis parmi les jeunes ſavans, dont il encourageoit les travaux, dont la gloire étoit devenue une de ſes plus vives jouiſſances. La tendreſſe de ces enfans adoptifs égaloit celle des enfans que la nature lui avoit donnés & ne la ſurpaſſoit pas.

Le bonheur d'être aimé de tous ceux dont le ſort l'avoit entouré, fut la juſte récompenſe de la ſenſibilité douce, de l'égalité d'humeur, de l'oubli de ſoi-même, de ce déſir de rendre les autres heureux par des attentions de chaque inſtant, comme par de grands ſervices, enfin de cette amabilité conſtante qui formoient le fonds de ſon caractère.

Dans ſa jeuneſſe, un de ſes ouvrages compoſé pour le prix de l'académie de chirurgie ne l'obtint pas, & M. de Laſſone ne put ignorer que ſa qualité de médecin, & de médecin voulant s'occuper de chirurgie, avoit rendu ſes juges plus ſévères & moins équitables que dans un premier concours où il n'étoit pas connu. Ce dégoût l'avoit déterminé à ne pas refuſer l'offre qu'on lui faiſoit d'une chaire dans l'univerſité de Padoue, & l'honneur d'être le collégue de Morgnagni, alors dans tout l'éclat de ſa gloire, pouvoit flater un jeune anatomiſte; mais cette réſolution affligeoit trop un oncle qui lui ſervoit de tuteur & de père, &

elle ne tint pas contre les larmes de l'amitié. Celui qui dans sa jeunesse lui avoit sacrifié son amour-propre, méritoit qu'elle ne cessât d'embellir sa vie, & qu'elle consolât ses derniers jours.

Quoiqu'éloigné de sa patrie dès son enfance, M. de Lassone ne l'oublia point & n'en fut pas oublié. Au moment où la France prit en 1768 une possession momentanée du Comtat Vénaissin, les États du pays chargèrent M. de Lassone de présenter au Roi les cahiers où ils demandoient la conservation de leurs franchises, foibles restes de leurs droits naturels, qu'un souverain éloigné avoit été obligé de respecter.

Ses aïeux avoient répandu des bienfaits sur l'hôpital de Carpentras; il voulut les imiter, mais en homme éclairé; il donna des lits de fer dont il seroit à désirer que l'usage exclusif s'introduisît dans les hôpitaux, & au bienfait en lui-même, il ajouta celui de l'exemple, peut-être plus utile encore.

Depuis long-temps l'usage destinoit le fils d'un premier médecin à posséder une de ces charges qui donnoient un droit presque exclusif de remplir les places de l'administration, & à fonder une nouvelle famille patricienne. M. de Lassone préféra pour son fils l'état où ses pères s'étoient distingués; il ne trouva point d'obstacles dans un jeune homme dont la raison prématurée apprécioit les objets d'après leur valeur réelle, & non d'après celle qu'y attache le préjugé; & c'étoit dans un temps où il étoit impossible de prévoir que ces chaînes de la vanité qui servoient à resserrer toutes les autres, seroient brisées du même coup, & qu'un système d'inégalité que quatorze siècles avoient péniblement combiné, pourroit disparoître en quelques instans.

Lorsque la délicatesse naturelle du tempérament de M. de Lassone, lui fit éprouver les incommodités d'une vieillesse prématurée, il devint plus triste, plus solitaire, mais il conserva son caractère. Toujours attaché à la

religion, ſans ceſſer jamais un inſtant d'avoir pour les opinions d'autrui cette indulgence entière que la philoſophie la plus profonde ne donne qu'aux ames douces & pures, ces ſentimens religieux ſe réveillèrent dans ſon ame, à meſure que les diſtractions du monde & l'étude ceſſoient de pouvoir remplir ſa vie, & ajoutèrent leurs conſolations à celles de la nature & de l'amitié. Éclairé ſur ſon état, il vit paiſiblement la mort s'approcher de lui, en fixa lui-même le jour, & le 8 décembre 1788, un paiſible ſommeil termina une vie partagée entre des travaux utiles, des actions de bienfaiſance, & les plaiſirs que les ſentimens tendres font goûter à une ame vertueuſe.



ÉLOGE



ÉLOGE

DE M. LE CARDINAL DE LUYNES.

PAUL D'ALBERT DE LUYNES, cardinal-prêtre de la ſainte égliſe Romaine, archevêque de Sens, primat des Gaules & de Germanie, abbé de Corbie, commandeur de l'ordre du Saint-Eſprit, &c. &c. de l'Académie Françoiſe & de celle des Sciences, &c. naquit à Verſailles le 5 février 1703, d'Honoré-Charles d'Albert duc de Luynes & de Montfort, connu ſous ce dernier nom, & d'Anne-Jeanne de Courcillon, fille du marquis de Dangeau, l'un de nos premiers Académiciens.

Le duc de Montfort étoit arrière-petit-fils de Charles d'Albert, qui mourut à quarante-trois ans connétable, garde des ſceaux, premier miniſtre, & dont la mort prompte ne permit pas de juger ſi cette élévation ſi rapide, ſouillée par la mort des Concini & par la priſon de la mère du Roi, étoit au moins juſtifiée par des talens réels.

M. le cardinal de Luynes, colonel à 16 ans, fut évêque de Bayeux à 26.

Le goût des ſciences eſt héréditaire dans les deux branches de la maiſon de Luynes. Le duc de Chevreuſe qui à la cour de Louis XIV oſa preſque ſeul ſe montrer l'ami de Fenelon dans la diſgrace, s'étoit inſtruit chez les ſolitaires de Port-Royal dans les principes de la nouvelle philoſophie de ſon temps : car chaque ſiècle & preſque

chaque génération a la ſienne, qui toujours calomniée par la ſotiſe contemporaine, devient enſuite l'un des préjugés de la poſtérité. L'ouvrage long-temps célèbre ſous le titre de l'*Art de penſer*, avoit été le fruit de ces ſavantes converſations. Nous devons à feu M. le duc de Chaulnes une machine à diviſer, faite d'après un principe ingénieux & nouveau; & à ſon fils des Mémoires ſur les arts & ſur la chimie, où l'on trouve à la fois des vues utiles & des réſultats neufs & piquans.

M. le cardinal de Luynes ne crut pas que les travaux des ſciences fuſſent incompatibles avec les devoirs de l'épiſcopat; il avoit du moins pour excuſe l'exemple du pape Gerbert, qui a introduit dans l'Europe chrétienne l'uſage de l'arithmétique décimale, & qui, pour avoir été le premier mathématicien de ſon temps, n'en mérita pas moins par ſes vertus l'archevêché de Reims & le trône pontifical.

L'aſtronomie, la gnomonique, la conſtruction des inſtrumens de météorologie rempliſſoient tour à tour les loiſirs de M. le cardinal de Luynes.

Ces occupations douces & faciles étoient de véritables plaiſirs pour un eſprit naturellement actif, & peut-être même il leur dut en partie de n'avoir jamais regretté ceux dont l'auſtérité de ſon état le condamnoit à ſe priver.

Dans les premières années de ſon ſéjour à Bayeux, on lui dénonça de prétendues poſſédées; il eut aſſez de philoſophie pour ne regarder cet événement que comme un phénomène de phyſique qu'il falloit examiner, & ces preſtiges qui un ſiècle auparavant auroient fait élever des bûchers, diſparurent aux premiers regards d'un prélat auſſi éclairé que pieux. On lui a reproché de les avoir même examinés; mais peut-être eſt-il plus ſage de dévoiler les erreurs populaires que de les dédaigner, ou d'attendre pour les attaquer qu'elles ayent déjà des enthouſiaſtes prêts à ſe ſacrifier pour elles, des ſophiſtes armés pour les défendre, des fourbes intéreſſés à les protéger. Combien d'erreurs ont long-temps avili l'eſpèce humaine, qui auroient été

étouffées dans leur berceau si une sage prévoyance avoit dissipé les illusions dont la crédulité ou la fourberie l'avoient entouré! Sans parler d'exemples plus anciens & plus effrayans, n'a-t-on pas vu de nos jours une chimère, dont le nom même est devenu ridicule, former en peu d'années une secte nombreuse, ayant des prosélytes dans toutes les classes portant déjà tous les caractères du fanatisme, & disparoître cependant au moment même où les physiciens qui l'avoient méprisée, ont laissé tomber sur elle quelques-uns de leurs regards?

Peu d'évêques ont mieux rempli que M. le cardinal de Luynes le double devoir d'instruire les hommes de leurs devoirs & de les soulager dans leurs malheurs. Il avoit une éloquence naturelle, peut-être un peu verbeuse, mais douce, facile, harmonieuse, toujours claire, souvent noble & même élégante.

Il parloit sur le champ & sans la moindre préparation: on l'a vu remplacer dans la chaire un orateur à qui la mémoire avoit manqué, reprendre son texte & ses divisions, les suivre & les remplir. Dans ces occasions, ni ses traits, ni le son de sa voix ne laissoient apercevoir la moindre trace ni d'effort, ni même de la plus légère contention; on auroit cru qu'il prononçoit un discours sur lequel sa mémoire s'étoit long temps exercée, si une noble familiarité, un abandon touchant n'avoient empêché d'en avoir même l'idée.

La moitié de son revenu étoit distribuée en aumônes, & il tenoit une balance égale entre tous les infortunés qui vivoient dans ses bénéfices. Que le riche dépositaire du bien des pauvres compatisse à leur misère, qu'il cède au sentiment de la bienfaisance dont son état lui fait un devoir, rien sans doute n'est plus simple; mais que cette bienfaisance soit réglée par une justice impartiale, que l'indigent éloigné ait la même part que celui dont le bienfaiteur peut entendre les bénédictions, c'est-là que la vertu commence, & telle fut la conduite constante de M. le cardinal de Luynes.

Il craignit même que par la suite trop commune de sa non résidence dans les abbayes, les pauvres de Corbie ne fussent négligés par ses successeurs, & il plaça quarante mille écus pour leur assurer des secours perpétuels. Aussi sa mort fut-elle une calamité publique pour ce peuple qui n'avoit point connu le bienfaiteur qu'il pleuroit; & des yeux qui jamais n'avoient rencontré ses regards, répandirent sur son tombeau les larmes de la reconnoissance.

Zélé pour la religion, il voyoit avec peine qu'elle n'eût pas dans tous ceux qui la professoient des enfans bien fidèles. Il s'efforça par des sermons, par des instructions pastorales d'empêcher l'incrédulité de faire des progrès dans le troupeau confié à ses soins. Il opposoit aux objections des raisonnemens simples comme ceux à qui il les destinoit; mais ce zèle infatigable n'étoit souillé d'aucune amertume. Sincère dans sa croyance, il pensoit que d'autres pouvoient l'être dans une croyance contraire, & que pour l'intérêt même de sa cause, il devoit donner l'exemple de l'indulgence & de la justice. Un jour qu'un homme soupçonné de n'être pas assez religieux, lui demandoit sa voix pour une place qui, à la vérité, n'intéressoit que les sciences: *On m'a dit*, lui répondit M. le cardinal de Luynes, *que vous étiez incrédule. Si cela est, c'est un malheur pour vous, & je dois chercher à vous détromper; mais d'autres m'ont assuré que vous étiez digne de la place, & vous aurez ma voix* (1).

M. le cardinal de Luynes termina une carrière paisible & vertueuse par une mort douce le 22 janvier 1788.

Sa place d'honoraire à l'Académie des Sciences a été remplie par M. le maréchal de Castries.

---

(1) C'est à l'auteur même de cet Éloge que M. le Cardinal de Luynes a donné cette preuve de sa tolérance.





ÉLOGE

DE M. DE FOUCHY.

JEAN-PAUL GRANDJEAN DE FOUCHY, auditeur des comptes, ſecrétaire ordinaire de M. le duc d'Orléans, ſecrétaire perpétuel honoraire de l'Académie des Sciences & de la Société royale de Londres, &c. naquit à Paris le 17 mars 1707, de Philippe Grandjean de Fouchy & de Marie-Magdeleine Hynault.

Son pere iſſu d'une famille noble du Mâconnois & deſtiné par ſes parens à l'état eccléſiaſtique, l'avoit été par la nature à s'occuper des arts, & le fut par le haſard à perfectionner celui de l'imprimerie. Conduit par la curioſité dans l'atelier d'un imprimeur, il fut frappé de l'imperfection des caractères alors employés par les preſſes Françoiſes. Dès le ſoir même il eſſaya de deſſiner quelques lettres capitales & de leur donner l'élégance, la netteté & les belles proportions dont le défaut avoit révolté ſon goût. Ces eſſais confiés ſans deſſein à un de ſes amis, furent portés par lui au chancelier de Pontchartrain, & montrés bientôt à Louis XIV, qui ſaiſit avec l'empreſſement d'un prince amoureux de toutes les eſpèces de gloire, l'occaſion de donner aux éditions Françoiſes l'avantage ſur celles de la Hollande, & de faire ceſſer à l'égard d'une nation ennemie, cette infériorité que le grand nombre d'écrivains éloquens & d'hommes de génie dont s'honoroit alors la France, sembloit rendre encore plus humiliante.

Le jeune Granjean fut chargé du soin de dessiner & de faire fondre de nouveaux caractères, & par un hasard heureux qui justifia le choix du ministre, il se trouva réunir au mérite de dessiner avec goût, le talent & l'amour des arts, l'activité & la patience dans le travail.

La découverte de l'imprimerie a ouvert à l'humanité entière la route du bonheur comme celle de la liberté. Elle seule a rendu les vérités éternelles, elle seule en a fait le patrimoine commun de tous les hommes, & c'est par elle seule qu'il n'existe plus aucun terme ni aux progrès de l'esprit humain, ni à la perfection des institutions sociales.

La reconnoissance suffiroit donc pour excuser le luxe des belles éditions, mais il est juste d'observer encore que la perfection même la plus recherchée dans les arts utiles, ne doit pas être regardée comme un rafinement de fantaisie. Sans ces éditions superbes qui ne servent qu'à flatter le goût de quelques amateurs riches, on ne parviendroit pas à rendre faciles à lire les éditions communes. Pour que le grand nombre jouisse du progrès d'un art, il faut presque toujours qu'auparavant ces mêmes progrès ayent procuré au petit nombre des plaisirs exclusifs. Les productions des arts, qui joignent une utilité réelle & nouvelle à la magnificence & à la rareté, ne doivent donc point attirer à ceux qui les recherchent la censure des moralistes même les plus sévères, & il est juste de pardonner aux riches des fantaisies qui peuvent un jour ouvrir à tous les hommes de nouvelles sources de jouissances.

Rempli d'enthousiasme pour son art, le pere de M. de Fouchy destinoit son fils à lui succéder, & lui réservoit l'honneur d'achever son ouvrage, en y ajoutant les alphabets des langues Orientales qui manquoient encore. Aussi après une éducation soignée & dirigée suivant le vœu de son pere qu'il avoit perdu dès son enfance, M. de Fouchy s'occupa de dessiner & de faire graver des lettres Hébraïques. Mais les circonstances avoient changé. Louis XIV attachoit un si haut prix à la perfection exclusive des éditions Fran-

çoises, qu'il refusa une frappe des matrices de l'Imprimerie royale, gravées par le pere de M. de Fouchy, à ce même Philippe V son petit-fils, pour lequel il avoit prodigué le sang & les trésors de la France. Mais M. de Fouchy s'aperçut bientôt que la protection de Louis XIV avoit seule empêché les administrateurs subalternes de confondre avec de simples ouvriers les artistes qui en perfectionnant un art utile, servoient à la gloire de la nation, à son commerce, & même à répandre les lumières, puisqu'il résulte de la perfection de l'imprimerie, qu'on peut lire plus long-temps de suite sans fatigue & lire davantage dans un temps égal.

M. de Fouchy fut donc obligé de renoncer à suivre les traces de son père, & déterminé par son goût naturel que l'éducation avoit favorisé, il se consacra tout entier à l'étude des sciences. Il s'étoit formé à Paris une société composée de savans & d'artistes, qui devoient s'occuper d'appliquer aux arts les principes & les théories scientifiques qui peuvent en diriger, en assurer, en perfectionner la pratique. Cette société qui comptoit au nombre de ses membres MM. Clairault, de Gua, la Condamine, l'abbé Nollet, Rameau, Sulli, Julien le Roy & ses fils, pouvoit être également utile aux sciences & aux arts.

En cherchant à trop rapprocher les sciences de la pratique, à leur interdire les pures spéculations, sous prétexte de l'inutilité actuelle de ces spéculations, on s'exposeroit à retarder leur progrès. Ce seroit ôter au génie son indépendance, & borner son essor dans une carrière trop étroite, ce seroit même troubler sa marche, puisque la chaîne des vérités qui s'appellent mutuellement, & dont la découverte devient successivement possible par celle des méthodes nouvelles, n'a aucun rapport avec la suite des vérités qui doivent devenir aussi, chacune à leur tour, d'une utilité pratique. C'est précisément parce que les recherches difficiles, les découvertes qui agrandissent la sphère de l'esprit humain, peuvent rester long-temps inapplicables aux usages de la

vie, qu'il eſt bon que des compagnies ſavantes en maintiennent le goût, raſſemblent les hommes qui s'en occupent, leur offrent des récompenſes, les encouragent enfin en fixant ſur eux les regards, en leur aſſurant l'eſtime de ceux qui ne ſont pas en état de les juger. Si ces ſociétés elles-mêmes paroiſſoient accorder la préférence aux travaux qui ſe rapportent à la pratique, qui déjà donnent une gloire plus populaire & réuniſſent plus de facilité à l'eſpérance d'avantages plus grands, les ſciences ſeroient menacées d'une langueur qui bientôt s'étendroit juſque ſur les arts même auxquels on les auroit imprudemment ſacrifiées. D'un autre côté il réſultoit de l'heureuſe réunion des artiſtes & des ſavans, que ceux-ci devenoient en quelque ſorte d'utiles intermédiaires entre les ſavans qui ignorent les arts, & les artiſtes qui n'ont pas pénétré aſſez avant dans le ſanctuaire des ſciences. Tantôt diſcutant avec les ſavans les principes qui pouvoient ſervir de guides dans les arts, tantôt éclairés par les artiſtes ſur les difficultés de ces applications, inſtruiſant à leur tour les premiers ſur les vues que la pratique des arts peut offrir pour le progrès des ſciences, les autres ſur l'utilité qu'ils peuvent retirer de ces mêmes progrès, ils auroient procuré à la fois & aux ſciences & aux arts tous les avantages réciproques qui peuvent naître de leur réunion. Des préjugés, de petites jalouſies firent tomber cette inſtitution utile, qu'on ne peut s'empêcher de regretter.

M. de Fouchy fut enlevé à cette ſociété par l'Académie, qui le choiſit comme aſtronome en 1731. Ses nombreux Mémoires renferment des méthodes d'obſerver ingénieuſes & faciles, des moyens adroits, prompts & peu coûteux, de ſe paſſer d'inſtrumens difficiles à ſe procurer ou à tranſporter ſans nuire à la préciſion des obſervations, & prouvent qu'un mélange heureux de ſimplicité & de fineſſe formoient le caractère particulier de ſon talent. Nous n'en citerons ici que deux exemples.

Les immerſions & les émerſions des ſatellites de Jupiter, préſentoient dans leur période des irrégularités que les aſtronomes

aſtronomes n'avoient pu encore expliquer. M. de Fouchy imagina d'en chercher la cauſe dans les loix de l'optique. On ſait que les objets ne commencent à être viſibles qu'à l'inſtant où leur diamètre apparent a une certaine étendue, qui eſt la même pour tous les corps également éclairés; ainſi un ſatellite plus éloigné de la terre & dont le diamètre apparent eſt alors plus petit, doit avec une lumière égale diſparoître plus tôt & reparoître plus tard : en même temps un corps plus éclairé eſt viſible ſous un moindre diamètre apparent; ainſi un ſatellite doit diſparoître d'autant plus tard & reparoître d'autant plus tôt, qu'il répand plus de lumière. M. de Fouchy fit voir que ces deux cauſes pouvoient expliquer les irrégularités obſervées; mais on n'admet en aſtronomie que des explications calculées. Un autre principe d'optique en offroit le moyen; toutes choſes égales d'ailleurs, la lumière des objets vus à travers un verre varie, ſuivant l'ouverture de la lunette : il s'agiſſoit donc de comparer le moment de l'émerſion ou de l'immerſion d'un ſatellite, en l'obſervant avec des lunettes égales, mais de différentes ouvertures; dès-lors on jugeoit de l'influence que plus ou moins de lumière avoit ſur leur diſparition, & on pouvoit calculer la loi ſuivant laquelle cette cauſe agiſſoit ſur le phénomène.

Cette idée ingénieuſe de M. de Fouchy, abandonnée par lui, a été ſuivie & perfectionnée avec ſuccès par un de nos confrères qui appelé depuis peu à des places honorables & importantes, par le choix libre de ſes concitoyens, a réfuté par ſon exemple le préjugé qui excluoit des fonctions publiques ceux dont l'étude des lettres, des ſciences ou de la philoſophie avoit fortifié la raiſon, élevé l'ame & ennobli le caractère.

La néceſſité d'un parallélisme parfait entre les parties fixes d'un niveau à la lunette, en rend la conſtruction difficile : cette difficulté n'exiſte plus ſi l'on emploie le niveau ordinaire; mais il eût fallu que les deux branches du niveau, placées dans une lunette, puſſent toutes deux être vues diſtinctement. C'eſt ce qu'a exécuté M. de Fouchy,

au moyen d'une lunette à quatre verres; une des branches est vue dans une situation directe, l'autre dans une situation renversée, & il en résulte la facilité d'observer le point du niveau avec la plus grande précision.

En 1743, M. de Fouchy fut nommé secrétaire perpétuel de l'Académie. C'étoit succéder à M. de Fontenelle, dont M. de Mairan n'avoit voulu occuper la place qu'un petit nombre d'années, pour laisser le temps de faire un choix que les talens & la célébrité du neveu de Corneille rendoient si difficile. Pour mériter de le remplacer, il falloit ne pas vouloir lui ressembler, & savoir se conformer à la différence des temps & des opinions. Contemporain d'Arnaud & de Voltaire, de Bossuet & de Montesquieu, témoin des derniers instans de l'ancienne physique, du règne & de la chute du cartésianisme, remplacé, grâces aux découvertes de Newton & de Locke, par une philosophie plus vraie, M. de Fontenelle avoit observé ces grandes révolutions, dont il avoit été lui-même un des instrumens les plus utiles; il avoit vu des vérités, qui dans sa jeunesse étoient le secret de la conscience de quelques sages, devenir vers la fin de sa vie l'opinion à la mode des gens du monde. Cachant sous des formes simples les vues d'une philosophie profonde, ayant le double talent de rendre populaires les vérités qu'il jugeoit utile de répandre, & de voiler celles qu'il croyoit ne devoir semer que dans un petit nombre d'esprits; il savoit choisir ses expressions de manière à réveiller des idées différentes dans les diverses classes de lecteurs, & à faire entendre à chacun ce qu'il pouvoit comprendre, ce qu'il devoit savoir, tandis que cependant tous croyoient également l'avoir entendu. M. de Fontenelle avoit donc, soit par une suite de son caractère, soit par un choix volontaire, la philosophie qui convenoit le mieux au moment où la marche naturelle des esprits avoit marqué pour les peuples de l'Europe le passage de la servitude des préjugés au règne de la raison, c'est-à-dire, à une

époque où la vérité timide & méconnue ne pouvoit plus ſe cacher, mais ne devoit ſe montrer qu'avec précaution, où il falloit placer devant elle un voile qui l'empêchât de bleſſer des yeux long-temps fermés à la lumière, & que cependant les hommes dignes de la contempler & cachés dans la foule, puſſent aiſément ſoulever.

Mais ces formes ingénieuſes, ce talent de ne montrer la vérité qu'à demi afin d'augmenter le plaiſir de la ſaiſir, de cacher ſous des expreſſions communes la force ou la hardieſſe des idées, n'euſſent plus été dans les ſucceſſeurs de M de Fontenelle que la manière d'un écrivain, & non l'art d'un philoſophe qui craint de compromettre la raiſon; & le moment étoit venu où elle pouvoit ſe montrer avec moins de parure.

Dans un temps où les ſciences n'étoient pas ſi répandues, M. de Fontenelle devoit chercher à rapprocher leurs principes, leur marche, leurs méthodes, des conceptions de la métaphyſique générale. Dans un temps où elles étoient plus communes, M. de Fouchy devoit s'attacher davantage à montrer l'eſprit des principes & des méthodes propres à chacune d'elles. L'un devoit avoir pour but de donner une idée juſte de toutes les ſciences à ceux qui n'en avoient étudié aucune; l'autre d'initier ceux qui avoient cultivé une ſcience, aux principes de toutes les autres. L'un avoit à ſéparer les faits, ou les réſultats des explications hypothétiques qui par-tout s'y mêloient preſque involontairement; l'autre à lier, à donner un ordre ſyſtématique à des faits iſolés & ſouvent préſentés ſans les rapprochemens qui pouvoient ſeuls en faire ſentir l'importance. L'un avoit à rappeler l'utilité générale des ſciences, la beauté du ſpectacle qu'elles préſentent à l'eſprit humain, le noble exercice qu'elles offrent à ſon activité; l'autre parlant à des hommes déjà paſſionnés pour elles, devoit ſe borner à faire ſentir l'utilité de chaque travail, pour le progrès de la ſcience à laquelle il appartient. L'hiſtoire de M. de Fontenelle devoit être plus philoſophique, celle de M. de Fouchy

plus ſavante, & on voit en la liſant que fidèle à ce principe, ſon auteur a ſu y mettre cette exactitude rigoureuſe, cette clarté qui ſuppoſe la réunion d'une extrême juſteſſe d'eſprit, à la facilité de varier & d'étendre ſes connoiſſances ſans les confondre.

Dans ſes éloges, M. de Fouchy fut moins ingénieux que Fontenelle, mais il eut preſque toujours le mérite de ne pas chercher à l'être. La ſimplicité, la vérité, l'exactitude ſont le principal caractère de ſes portraits. Il inſpire la confiance, parce qu'il ne paroît chercher à rien embellir. S'il ſe préſente à lui des réflexions fines, des images heureuſes, on voit que ſon ſujet les lui inſpire, & non qu'il ait travaillé pour l'en orner; mais ſon ſtyle toujours ſimple, eſt preſque toujours noble & pur; mérite devenu rare dans un temps où le déſir de faire effet par l'expreſſion, & de ſuppléer par la bizarrerie des mots à la nullité des idées, confond tous les tons, tous les genres, & a fait du défaut de meſure & de goût, un des ſecrets de l'art d'obtenir une gloire de quelques jours, & d'échapper par un prompt oubli au redoutable jugement de la poſtérité.

M. de Fontenelle avoit donné à ſes ſucceſſeurs d'autres exemples, que M. de Fouchy a ſu imiter.

Le ſecrétaire d'une compagnie ſavante eſt le confident néceſſaire de toutes les petites paſſions que peuvent exciter entre ſes membres l'amour de la gloire ou de la conſidération, les différences d'opinions, & même la rivalité des divers genres de ſciences. Il eſt le témoin de ces ſecretes foibleſſes d'amour-propre, dont les lumières, les talens, la célébrité même ne guériſſent pas toujours. Son indiſcrétion pourroit ſouvent faire dégénérer en querelles, ces ſemences de diviſion que le ſilence étouffe pour jamais.

Obligé à l'impartialité ſans l'être cependant à diſſimuler ſes opinions, de tenir une balance égale ſans abjurer ſes affections perſonnelles, d'éviter juſqu'au ſcrupule le ſoupçon de vouloir exercer une influence pour laquelle la perpétuité de ſa place lui donne tant de moyens, il lui ſeroit impoſſible

de remplir ces devoirs, si la modération de son ame, si la facilité & le calme de son caractère, si même un esprit supérieur au petit & dangereux honneur de paroître gouverner ceux dont il ne doit être que l'organe, ne lui rendoient ces devoirs faciles.

M. de Fouchy les a remplis tous, & la confiance, l'amitié de ses confrères en ont été la douce & juste récompense.

Après avoir occupé sa place pendant trente ans, avec une exactitude qui ne se démentit jamais, & un zèle que rien ne pouvoit ni refroidir ni lasser, M. de Fouchy crut que ses infirmités & son âge lui donnoient droit de chercher non le repos, mais la liberté; il eut la bonté de jeter les yeux sur moi pour l'aider dans ses fonctions, & de me destiner à lui succéder. Le zèle pour les sciences, la persuasion intime de leur utilité, une vie vouée uniquement à les cultiver, avoient seuls pu le décider à me donner cette marque si honorable de son estime. Modeste pour son successeur comme il l'avoit été pour lui-même, il regarda l'amour de la vérité comme la qualité qui devoit déterminer son choix, parce que c'étoit la seule dont il se fût jamais permis de se piquer. Trois ans après il cessa d'exercer les fonctions de secrétaire.

Le temps pendant lequel il les a remplies, a été dans les sciences l'époque d'une heureuse révolution.

Le système du monde, ce monument le plus imposant des forces & de la grandeur de l'esprit humain, appuyé par Newton sur des fondemens inébranlables, s'étoit élevé par le génie de ses successeurs à une hauteur qu'on eût à peine osé espérer des travaux de plusieurs siècles. L'action réciproque des corps célestes, le mouvement de leurs axes, les révolutions des plans de leurs orbites avoient été soumis au calcul, leurs masses avoient été fixées, leur figure déterminée.

Les comètes même n'ont pu lui échapper dans ces espaces immenses où après avoir paru quelques momens,

elles disparoissoient pendant des siècles entiers. De nouvelles méthodes d'analyse, de nouveaux principes de mécanique avoient changé la face de ces sciences, & prouvé qu'il n'étoit rien où le génie, aidé du temps, ne pût se flatter d'atteindre.

La chimie si long-temps égarée dans d'obscures chimères, qui flattant les deux passions les plus violentes des ames vulgaires, l'envie de s'enrichir & celle de vivre, avoient été portées jusqu'à la superstition & au délire, s'étoit vue ensuite arrêter dans ses premiers progrès par l'amour des explications mécaniques; mais enfin elle s'étoit dégagée de ces liens, & dans le moment où déjà elle offroit une masse de faits précis & liés entr'eux, la découverte de nouvelles substances qui jusqu'alors avoient échappé à nos instrumens, a fait disparoître un des degrés qui séparent les principes des corps que nous pouvons saisir, de ces élémens simples & inaltérables, derniers termes de nos efforts & de nos espérances.

Tandis que de nouvelles méthodes perfectionnoient la nomenclature de l'histoire naturelle, cette science, après s'être long-temps bornée à exercer la mémoire par des catalogues & l'imagination par des systèmes, étoit devenue ce qu'elle doit être, la description & l'histoire de tous les êtres de la nature, l'examen de leurs rapports, l'étude de leurs propriétés.

La physique avoit acquis une nouvelle branche; les merveilles de l'électricité avoient été analysées & soumises à des loix, & un physicien illustre avoit découvert à la fois & la nature de la foudre & le moyen d'en prévenir les ravages.

En même-temps que le système général des sciences s'enrichissoit de nouvelles méthodes de calcul, d'instrumens nouveaux, de faits inconnus, toutes acquéroient à la fois plus de méthode & de précision, toutes devenoient plus utiles par des applications multipliées, & il se formoit entr'elles une union plus intime, non plus comme autre-

fois par des applications ingénieuſes & forcées, mais parce que chacune s'étendant à la fois, elles étoient toutes parvenues au point où elles peuvent s'entr'aider & commencent à ſe confondre.

Ces rapides progrès des ſciences préſageoient une révolution générale dans les opinions; les eſprits contractoient plus de juſteſſe, la raiſon prenoit une marche plus ſûre. Les ſophiſmes des préjugés ne pouvoient ſe ſoutenir longtemps ſi près de la logique des ſciences. En voyant tout ce que l'eſprit humain y avoit créé de grand, il étoit difficile de ſoutenir encore qu'il ne pût, en ſe portant ſur d'autres objets, enfanter que des erreurs, & l'on ne pouvoit plus, ſans une tyrannie ridicule, lui interdire le droit d'examen ſur les queſtions importantes pour ſon bonheur, à l'inſtant où il en faiſoit un uſage ſi heureux pour ſa gloire.

M. de Fouchy fut témoin de ces nobles efforts qui ont enfin délivré la raiſon humaine de ſes antiques entraves; il en ſuivit les progrès, & il a dû prévoir la révolution plus utile encore qui devoit les ſuivre, celle qui doit rétablir enfin les hommes dans leurs véritables droits, bien moins uſurpés par la force que méconnus par l'ignorance, ou trahis par l'erreur; car l'empire de la force ne dure qu'un inſtant ſi les préjugés ne déſuniſſent & ne trompent ceux qu'elle opprime. Tandis qu'égarés par leurs intérêts, par leurs paſſions, par l'amour même de l'indépendance, les hommes ne feroient que changer de chaîne : les lumières ſeules peuvent leur aſſurer une liberté durable & paiſible, & l'on peut dire de la liberté politique, de celle des nations, ce qu'un philoſophe illuſtre a dit de la liberté morale, que plus l'homme eſt éclairé, plus il eſt libre.

En quittant les fonctions de ſa place, M. de Fouchy ne voulut renoncer ni aux ſciences, ni à l'Académie; aſſidu plus par zèle & par amitié pour ſes confrères que par habitude, il reprit les travaux que ſa place lui avoit fait abandonner depuis plus de trente ans, & il en termina pluſieurs. Il eut même le courage de former de

nouveaux projets : tel étoit celui de raſſembler dans un petit eſpace les faits les plus intéreſſans de l'hiſtoire de l'Académie, de former un tableau de tout ce qu'elle a fait pour l'utilité publique & pour le progrès des ſciences. C'étoit offrir à la fois à tous ceux qui les cultivent ou qui les aiment, à tous ceux qui ſe plaiſent à ſuivre les développemens de l'eſprit humain, une lecture inſtructive & piquante, & donner à l'Académie, pour qui ſa vie preſqu'entière avoit été conſumée, une dernière marque d'un zèle ſi conſtant & ſi pur.

Quelques années après ſa retraite, M. de Fouchy éprouva un accident ſingulier. Saiſi d'un étourdiſſement, il fit une chute, & le lendemain ayant repris ſa connoiſſance entière, jouiſſant de toute ſa tête, il s'aperçut que ſi les organes de la voix qui avoient été embarraſſés pendant quelque temps, étoient devenus preſque libres, ils avoient ceſſé d'obéir à ſa volonté; que lorſqu'il vouloit énoncer un mot, ſa bouche en prononçoit un autre, en ſorte que, dans le moment où il avoit des idées nettes, ſes paroles étoient ſans ſuite. Lui-même a rendu compte de cet accident dans nos Mémoires, a détaillé tous les ſymptômes, toutes les particularités de ce phénomène avec une ſimplicité, un calme, une indifférence même dignes des héros du ſtoïciſme antique; & on voit par ces détails, qu'au milieu même de ces ſymptômes ſi effrayans qui le menaçoient pour le reſte de ſa vie d'une exiſtence pénible & humiliante, il étoit plus occupé d'obſerver ſes maux que de s'en affliger. Après une longue ſuite d'infirmités qu'il ſouffrit avec une patience philoſophique & une réſignation chrétienne, M. de Fouchy y ſuccomba le 15 avril 1788.

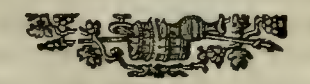
Né avec un caractère paiſible & modéré, il eut tous les goûts des ames douces. Il cultivoit la poëſie, mais dans le ſecret de l'amitié, ne faiſant que des vers de ſociété, & ſachant combien ils perdent de leur prix en ſe répandant dans le public où ils n'ont plus ce qui en fait ſouvent tout le charme, le mérite de l'à-propos, de la promptitude

&

& des convenances perſonnelles, ou enfin ils ne ſont plus appréciés que par la juſtice. Cependant ces vers étoient ingénieux & faciles, & en les condamnant à l'oubli, il a montré encore plus de modeſtie que de prudence.

Il aimoit la muſique & jouoit de pluſieurs inſtrumens. Il ne ceſſa jamais de cultiver ces talens qu'on acquiert dans la jeuneſſe, pour les négliger bientôt, lorſque ceſſant d'être un moyen de ſuccès dans le monde, ils ne ſont plus qu'une reſſource pour le bonheur. Preſque tous les dimanches il touchoit l'orgue dans quelque égliſe de ſon voiſinage dont l'organiſte le prioit de prendre ſa place; par-là il ſatisfaiſoit à la fois ſon goût pour la muſique, ſa piété & ſon zèle pour obliger, & il rendoit ce ſervice avec tant de ſimplicité & de bonhomie, que peut-être il a été le ſeul homme qui ait fait un uſage public de talens étrangers à ſon état & à ſes occupations, ſans pouvoir être ſoupçonné même de la plus légère vanité.

Il avoit été marié deux fois; l'une avec mademoiſelle de Boitiſſandeau, dont le frère a donné une machine arithmétique approuvée par l'Académie; la ſeconde avec M.lle Deſportes-Pardaillan. De ſon premier mariage il n'eut qu'une fille mariée à M. Petau, petit neveu du père Petau, jéſuite, & auſſi par ſa mère petit-neveu du père Malebranche. Du ſecond il a deux fils, l'un officier dans les troupes des colonies, l'autre dans le régiment d'Orléans dragons, & une fille aujourd'hui veuve de M. le marquis de Gerins.





ÉLOGE

DE M. LE COMTE DE BUFFON.

GEORGES-LOUIS LECLERC, comte de Buffon, tréſorier de l'Académie des Sciences, de l'Académie Françoiſe, de la Société royale de Londres, des Académies d'Édimbourg, Péterſbourg, Berlin, de l'Inſtitut de Bologne, naquit à Montbard le 7 ſeptembre 1707, de Benjamin Leclerc de Buffon, conſeiller au parlement de Bourgogne, & de M.lle Marlin.

Animé dès ſa jeuneſſe du déſir d'apprendre, éprouvant à la fois & le beſoin de méditer & celui d'acquérir de la gloire, M. de Buffon n'en avoit pas moins les goûts de ſon âge; & ſa paſſion pour l'étude, en l'empêchant d'être maîtriſé par ſon ardeur pour le plaiſir, contribuoit plus à la conſerver qu'à l'éteindre. Le haſard lui offrit la connoiſſance du jeune lord Kingſton, dont le gouverneur aimoit & cultivoit les ſciences : cette ſociété réuniſſoit pour M. de Buffon l'inſtruction & l'amuſement; il vécut avec eux à Paris & à Saumur, les ſuivit en Angleterre, les accompagna en Italie.

Ni les chef-d'œuvres antiques, ni ceux des modernes qui en les imitant les ont ſouvent ſurpaſſés, ni ces ſouvenirs d'un peuple-roi ſans ceſſe rappelés par des monumens dignes de ſa puiſſance, ne frappèrent M. de Buffon; il ne vit que la nature, à la fois riante, majeſtueuſe & terrible, offrant des aſiles voluptueux & de

paiſibles retraites entre des torrens de laves & ſur les débris des volcans, prodiguant ſes richeſſes à des campagnes qu'elle menace d'engloutir ſous des monceaux de cendres ou des fleuves enflammés, & montrant à chaque pas les veſtiges & les preuves des antiques révolutions du globe. La perfection des ouvrages des hommes, tout ce que leur foibleſſe a pu y imprimer de grandeur, tout ce que le temps a pu leur donner d'intérêt ou de majeſté, diſparut à ſes yeux devant les œuvres de cette main créatrice dont la puiſſance s'étend ſur tous les mondes, & pour qui, dans ſon éternelle activité, les générations humaines ſont à-peine un inſtant. Dès-lors il apprit à voir la nature avec tranſport comme avec réflexion, il réunit le goût de l'obſervation à celui des ſciences contemplatives, & les embraſſant toutes dans l'univerſalité de ſes connoiſſances, il forma la réſolution de leur dévouer excluſivement ſa vie.

Une conſtitution qui le rendoit capable d'un travail long & ſoutenu, une ardeur qui lui faiſoit dévorer ſans dégoût & preſque ſans ennui les détails les plus faſtidieux, un caractère où il ne ſe rencontroit aucune de ces qualités qui repouſſent la fortune, le ſentiment qu'il avoit déjà de ſes propres forces, le beſoin de la conſidération, tout ſembloit devoir l'appeler à la magiſtrature où ſa naiſſance lui marquoit ſa place, où il pouvoit eſpérer des ſuccès brillans & ſe livrer à de grandes eſpérances : elles furent ſacrifiées aux ſciences, & ce n'eſt point le ſeul exemple que l'hiſtoire de l'Académie puiſſe préſenter de ce noble dévouement. Ce qui rend plus ſingulier celui de M. de Buffon, c'eſt qu'alors il n'étoit entraîné vers aucune ſcience en particulier par cet attrait puiſſant qui force l'eſprit à s'occuper d'un objet, & ne laiſſe pas à la volonté le pouvoir de l'en diſtraire. Mais tout ce qui élevoit ſes idées ou agrandiſſoit ſon intelligence, avoit un charme pour lui ; il ſavoit que ſi la gloire littéraire eſt, après la gloire des armes, la plus durable & la plus brillante, elle eſt de toutes, celle qui peut le moins être conteſtée ; il ſavoit enfin que tout homme qui attire les

regards du public par ſes ouvrages ou par ſes actions, n'a plus beſoin de place pour prétendre à la conſidération, & peut l'attendre de ſon caractère & de ſa conduite.

Les premiers travaux de M. de Buffon furent des traductions; anecdote ſingulière que n'a encore préſentée la vie d'aucun homme deſtiné à une grande renommée. Il déſiroit ſe perfectionner dans la langue Angloiſe, s'exercer à écrire dans la ſienne, étudier dans Newton le calcul de l'infini, dans Hales les eſſais d'une phyſique nouvelle, dans Tull les premières applications des ſciences à l'agriculture; il ne vouloit pas en même temps qu'un travail néceſſaire à ſon inſtruction retardât l'inſtant où il commenceroit à fixer ſur lui les regards du public, & il traduiſit les livres qu'il étudioit.

Chacune de ces traductions eſt précédée d'une préface. M. de Buffon a obtenu depuis, comme écrivain, une célébrité ſi grande & ſi méritée, que les eſſais de ſa jeuneſſe doivent exciter la curioſité. Il eſt naturel d'y chercher les premiers traits de ſon talent, de voir ce que les obſervations & l'exercice ont pu y ajouter ou y corriger, de diſtinguer en quelque ſorte les dons de la nature & l'ouvrage de la réflexion. Mais on ne trouve dans ces préfaces qu'un des caractères du ſtyle de M. de Buffon, cette gravité noble & ſoutenue qui ne l'abandonne preſque jamais. Son goût étoit déjà trop formé pour lui permettre de chercher des ornemens que le ſujet eût rejetés, & ſon nom trop peu connu pour le riſquer. La timidité & la hardieſſe peuvent être également le caractère du premier ouvrage d'un homme de génie; mais la timidité qui ſuppoſe un goût inſpiré par la nature & une ſageſſe prématurée, a été le partage des écrivains qui ont montré le talent le plus pur & le plus vrai. Rarement ceux dont une crainte ſalutaire n'a point arrêté les pas au commencement de la carrière, ont pu en atteindre le terme & ne pas s'y égarer.

M. de Buffon parut d'abord vouloir ſe livrer uniquement aux mathématiques: regardées, ſur-tout depuis

Newton, comme le fondement & la clé des connoiſſances naturelles, elles étoient en quelque ſorte devenues parmi nous une ſcience à la mode, avantage qu'elles devoient en partie à ce que M. de Maupertuis, le ſavant alors le plus connu des gens du monde, étoit un géomètre. Mais ſi M. de Buffon s'occupa quelque temps de recherches mathématiques, c'étoit ſur-tout pour s'étudier lui-même, eſſayer ſes forces, & connoître la trempe de ſon génie. Bientôt il ſentit que la nature l'appeloit à d'autres travaux, & il eſſaya une nouvelle route que le goût du public lui indiquoit encore.

A l'exemple de M. Duhamel, il voulut appliquer les connoiſſances phyſiques à des objets d'une utilité immédiate; il étudia en phyſicien les bois dont il étoit obligé de s'occuper comme propriétaire, & publia ſur cette partie de l'agriculture pluſieurs mémoires, remarquables ſur-tout par la ſageſſe avec laquelle écartant tout ſyſtème, toute vue générale mais incertaine, il ſe borne à raconter des faits, à détailler des expériences. Il n'oſe s'écarter de l'eſprit qui commençoit alors à dominer parmi les ſavans, de cette fidélité ſévère & ſcrupuleuſe à ne prendre pour guides que l'obſervation & le calcul, à s'arrêter dès l'inſtant où ces fils ſecourables ſe briſent ou échappent de leurs mains. Mais s'il fut depuis moins timide, il faut lui rendre cette juſtice, qu'en s'abandonnant trop facilement peut-être à des ſyſtèmes ſpéculatifs dont l'adoption peut tout au plus égarer quelques ſavans & ralentir leur courſe, jamais il n'étendit cet eſprit ſyſtématique ſur des objets immédiatement applicables à l'uſage commun, où il pourroit conduire à des erreurs vraiment nuiſibles.

Parmi les obſervations que renferment ces mémoires, la plus importante eſt celle où il propoſe un moyen de donner à l'aubier une dureté au moins égale à celle du cœur du bois, qui eſt elle-même augmentée par ce procédé; il conſiſte à écorcer les arbres ſur pied dans le temps de la ſéve, & à les y laiſſer ſe deſſécher & mourir. Les ordon-

nances défendoient cette opération ; car elles ont trop ſouvent traité les hommes comme ſi condamnés à une enfance éternelle, ou à une incurable démence, on ne pouvoit leur laiſſer ſans danger la diſpoſition de leurs propriétés & l'exercice de leurs droits.

Peu de temps après, M. de Buffon prouva par le fait la poſſibilité des miroirs brûlans d'Archimède & de Proclus. Tzetzès en a laiſſé une deſcription qui montre qu'ils avoient employé un ſyſtème de miroirs plans. Les eſſais tentés par Kirker avec un petit nombre de miroirs, ne laiſſoient aucun doute ſur le ſuccès ; M. Dufay avoit répété cette expérience ; Harſœcker avoit même commencé une machine conſtruite ſur ce principe : mais il reſte à M. de Buffon l'honneur d'avoir montré le premier parmi les modernes, l'expérience extraordinaire d'un incendie allumé à deux cents pieds de diſtance, expérience qui n'avoit été vue avant lui qu'à Syracuſe & à Conſtantinople. Bientôt après il propoſa l'idée d'une loupe à échelons, n'exigeant plus ces maſſes énormes de verres ſi difficiles à fondre & à travailler, abſorbant une moindre quantité de lumière, parce qu'elle peut n'avoir jamais qu'une petite épaiſſeur, offrant enfin l'avantage de corriger une grande partie de l'aberration de ſphéricité. Cette loupe propoſée en 1748 par M. de Buffon, n'a été exécutée que par M. l'abbé Rochon plus de trente ans après, avec aſſez de ſuccès pour montrer qu'elle mérite la préférence ſur les lentilles ordinaires. On pourroit même compoſer de pluſieurs pièces ces loupes à échelons ; on y gagneroit plus de facilité dans la conſtruction, une grande diminution de dépenſe, l'avantage de pouvoir leur donner plus d'étendue, & celui d'employer, ſuivant le beſoin, un nombre de cercles plus ou moins grand, & d'obtenir ainſi d'un même inſtrument différens dégrés de force.

En 1739, M. de Buffon fut nommé intendant du jardin du Roi. Les devoirs de cette place fixèrent pour jamais ſon goût juſqu'alors partagé entre différentes ſciences, & ſans

renoncer à aucune, ce ne fut plus que dans leurs rapports avec l'hiſtoire naturelle qu'il ſe permit de les enviſager.

Obligé d'étudier les détails de cette ſcience ſi vaſte, de parcourir les compilations immenſes où l'on avoit recueilli les obſervations de tous les pays & de tous les ſiècles, bientôt ſon imagination éprouva le beſoin de peindre ce que les autres avoient décrit; ſa tête exercée à former des combinaiſons, ſentit celui de ſaiſir des enſembles où les obſervateurs ne lui offroient que des faits épars & ſans liaiſon.

Il oſa donc concevoir le projet de raſſembler tous ces faits, d'en tirer des réſultats généraux qui devinſſent la théorie de la nature dont les obſervations ne ſont que l'hiſtoire; de donner de l'intérêt & de la vie à celle des animaux, en mêlant un tableau philoſophique de leurs mœurs & de leurs habitudes à des deſcriptions embellies de toutes les couleurs dont l'art d'écrire pouvoit les orner; de créer enfin pour les philoſophes, pour tous les hommes qui ont exercé leur eſprit ou leur ame, une ſcience qui n'exiſtoit encore que pour les naturaliſtes.

L'immenſité de ce plan ne le rebuta point; il prévoyoit ſans doute qu'avec un travail aſſidu de tous les jours, continué pendant une longue vie, il n'en pourroit encore exécuter qu'une partie; mais il s'agiſſoit ſur-tout de donner l'exemple & d'imprimer le mouvement aux eſprits. La difficulté de répandre de l'intérêt ſur tant d'objets inanimés ou inſipides, ne l'arrêta point; il avoit déjà cette conſcience du talent qui, comme la conſcience morale, ne trompe jamais quand on l'interroge de bonne foi, & qu'on la laiſſe dicter ſeule la réponſe.

Dix années furent employées à préparer des matériaux, à former des combinaiſons, à s'inſtruire dans la ſcience des faits, à s'exercer dans l'art d'écrire, & au bout de ce terme le premier volume de l'Hiſtoire naturelle vint étonner l'Europe. En parlant de cet ouvrage que tous les hommes ont lu, que preſque tous ont admiré, qui a rempli, ſoit

par le travail de la compoſition, ſoit par des études préliminaires, la vie entière de M. de Buffon, nous ne prendrons pour guide que la vérité (car pourquoi chercherions-nous vainement à flatter par des éloges qui ne dureroient qu'un jour, un nom qui doit vivre à jamais)? & en évitant, s'il eſt poſſible, l'influence de toutes les cauſes qui peuvent agir ſur l'opinion ſouvent paſſagère des contemporains, nous tâcherons de prévoir l'opinion durable de la poſtérité.

La théorie générale du globe que nous habitons, la diſpoſition, la nature & l'origine des ſubſtances qu'il offre à nos regards, les grands phénomènes qui s'opèrent à ſa ſurface ou dans ſon ſein; l'hiſtoire de l'homme & les loix qui préſident à ſa formation, à ſon développement, à ſa vie, à ſa deſtruction; la nomenclature & la deſcription des quadrupèdes ou des oiſeaux, l'examen de leurs facultés, la peinture de leurs mœurs; tels ſont les objets que M. de Buffon a traités.

Nous ne connoiſſons, par des obſervations exactes, qu'une très-petite partie de la ſurface du globe; nous n'avons pénétré dans ſes entrailles, que conduits par l'eſpérance plus ſouvent avide qu'obſervatrice, d'en tirer ce qu'elles renferment d'utile à nos beſoins, de précieux à l'avarice ou au luxe; & lorſque M. de Buffon donna ſa théorie de la terre, nos connoiſſances n'étoient même qu'une foible partie de celles que nous avons acquiſes, & qui ſont ſi imparfaites encore. On pouvoit donc regarder comme téméraire l'idée de former dès-lors une théorie générale du globe, puiſque cette entrepriſe le ſeroit encore aujourd'hui. Mais M. de Buffon connoiſſoit trop les hommes pour ne pas ſentir qu'une ſcience qui n'offriroit que des faits particuliers, ou ne préſenteroit des réſultats généraux que ſous la forme de ſimples conjectures, frapperoit peu les eſprits vulgaires, trop foibles pour ſupporter le poids du doute. Il ſavoit que Deſcartes n'avoit attiré les hommes à la philoſophie que par la hardieſſe de ſes ſyſtèmes, qu'il ne les avoit arrachés au joug de l'autorité,

à

à leur indifférence pour la vérité, qu'en s'emparant de leur imagination, en ménageant leur pareſſe, & qu'enſuite libres de leurs fers, livrés à l'avidité de connoître, eux-mêmes avoient ſu choiſir la véritable route. Il avoit vu enfin dans l'hiſtoire des ſciences, que l'époque de leurs grands progrès avoit preſque toujours été celle des ſyſtèmes célèbres, parce que ces ſyſtèmes exaltant à la fois l'activité de leurs adverſaires & celle de leurs défenſeurs, tous les objets ſont alors ſoumis à une diſcuſſion, dans laquelle l'eſprit de parti ſi difficile ſur les preuves du parti contraire, oblige à les multiplier. C'eſt alors que chaque combattant s'appuyant ſur tous les faits reçus, ils ſont tous ſoumis à un examen rigoureux; c'eſt alors qu'ayant épuiſé ces premières armes, on cherche de nouveaux faits pour s'en procurer de plus ſûres & d'une trempe plus forte.

Ainſi la plus auſtère philoſophie peut pardonner à un phyſicien de s'être livré à ſon imagination, pourvu que ſes erreurs ayent contribué aux progrès des ſciences, ne fût-ce qu'en impoſant la néceſſité de le combattre; & ſi les hypothèſes de M. de Buffon ſur la formation des planètes, ſont contraires à ces mêmes loix du ſyſtème du monde, dont il avoit été en France un des premiers, un des plus zélés défenſeurs, la vérité ſévère, en condamnant ces hypothèſes, peut encore applaudir à l'art avec lequel l'auteur a ſu les préſenter.

Les objections de quelques critiques, des obſervations nouvelles, des faits anciennement connus mais qui lui avoient échapé, forcèrent M. de Buffon d'abandonner quelques points de ſa théorie de la terre.

Mais dans ſes Époques de la Nature, ouvrage deſtiné à rendre compte de ſes vues nouvelles, à modifier ou à défendre ſes principes, il ſemble redoubler de hardieſſe à proportion des pertes que ſon ſyſtème a eſſuyées, le défendre avec plus de force lorſqu'on l'auroit cru réduit à l'abandonner, & balancer par la grandeur de ſes idées, par la magnificence de ſon ſtyle, par le poids de ſon nom,

l'autorité des savans réunis, & même celle des faits & des calculs.

La théorie de la terre fut suivie de l'histoire de l'homme, qui en a reçu ou usurpé l'empire.

La nature a couvert d'un voile impénétrable les loix qui président à la reproduction des êtres; M. de Buffon essaya de le lever, ou plutôt de deviner ce qu'il cachoit. Dans les liqueurs où les autres naturalistes avoient vu des animaux, il n'aperçut que des molécules organiques, élémens communs de tous les êtres animés. Les infusions de diverses matières animales & celles des graines, présentoient les mêmes molécules avec plus ou moins d'abondance; elles servent donc également à la reproduction des êtres, à leur accroissement, à leur conservation; elles existent dans les alimens dont ils se nourrissent, circulent dans leurs liqueurs, s'unissent à chacun de leurs organes pour réparer les pertes qu'il a pu faire. Quand ces organes ont encore la flexibilité de l'enfance, les molécules organiques se combinant de manière à en conserver ou modifier les formes, en déterminent le développement & les progrès; mais après l'époque de la jeunesse, elles se rassemblent dans des organes particuliers, où échappant à la force qu'exerce sur elles le corps auquel elles ont appartenu, elles peuvent former de nouveaux composés, mais elles conservent, suivant les différentes parties où elles ont existé, une disposition à se réunir de manière à présenter les mêmes formes, & reproduisent par conséquent des individus semblables à ceux de qui elles sont émanées. Ce système brillant eut peu de partisans; il étoit trop difficile de se faire une idée de cette force en vertu de laquelle les molécules enlevées à toutes les parties d'un corps, conservoient une tendance à se replacer dans un ordre semblable. D'ailleurs les recherches de Haller sur la formation du poulet, contredisoient cette opinion avec trop de force; l'identité des membranes de l'animal naissant, & de celles de l'œuf, se refusoient trop à l'hypothèse

d'un animal formé poſtérieurement, & ne s'y étant attaché que pour y trouver ſa nourriture. Les obſervations de Spalauzani ſur les mêmes liqueurs & ſur les mêmes infuſions, ſembloient également détruire, juſque dans ſon principe, le ſyſtème des molécules organiques. Mais, lorſque dégagé des liens de ce ſyſtème, M. de Buffon n'eſt plus que peintre hiſtorien & philoſophe, avec quel intérêt parcourant l'univers ſur ſes traces, on voit l'homme dont le fond eſt par-tout le même, modifié lentement par l'action continue du climat, du ſol, des habitudes, des préjugés, changer de couleur & de phyſionomie, comme de goût & d'opinion, acquérir ou perdre de la force, de l'adreſſe, de la beauté, comme de l'intelligence, de la ſenſibilité & des vertus! Avec quel plaiſir on ſuit dans ſon ouvrage l'hiſtoire des progrès de l'homme, & même celle de ſa décadence; on étudie les loix de cette correſpondance conſtante entre les changemens phyſiques des ſens ou des organes, & ceux qui s'opèrent dans l'entendement ou dans les paſſions; on apprend à connoître le mécaniſme de nos ſens, ſes rapports avec nos ſenſations ou nos idées, les erreurs auxquelles ils nous expoſent, la manière dont nous apprenons à voir, à toucher, à entendre, & comment l'enfant, de qui les yeux foibles & incertains apercevoient à peine un amas confus de couleurs, parvient par l'habitude & la réflexion à ſaiſir d'un coup-d'œil le tableau d'un vaſte horizon, & s'élève juſqu'au pouvoir de créer & de combiner des images! Avec quelle curioſité enfin on obſerve ces détails qui intéreſſent le plus vif de nos plaiſirs & le plus doux de nos ſentimens, ces ſecrets de la nature & de la pudeur auxquels la majeſté du ſtyle & la ſévérité des réflexions donnent de la décence & une ſorte de dignité philoſophique, qui permettent aux ſages même d'y arrêter leurs regards & de les contempler ſans rougir!

Les obſervations diſperſées dans les livres des anatomiſtes, des médecins & des voyageurs, forment le fond de ce tableau, offert pour la première fois aux regards

des hommes avides de ſe connoître, & ſurpris de tout ce qu'ils apprenoient ſur eux-mêmes, & de retrouver ce qu'ils avoient éprouvé, ce qu'ils avoient vu ſans en avoir eu la conſcience ou conſervé la mémoire.

Avant d'écrire l'hiſtoire de chaque eſpèce d'animaux, M. de Buffon crut devoir porter ſes recherches ſur les qualités communes à toutes, qui les diſtinguent des êtres des autres claſſes. Semblables à l'homme dans preſque tout ce qui appartient au corps, n'ayant avec lui dans leurs ſens, dans leurs organes que ces différences qui peuvent exiſter entre des êtres d'une même nature, & qui indiquent ſeulement une infériorité dans des qualités ſemblables, les animaux ſont-ils abſolument ſéparés de nous par leurs facultés intellectuelles? M. de Buffon eſſaya de réſoudre ce problème, & nous n'oſerions dire qu'il l'ait réſolu avec ſuccès. Craignant d'effaroucher des regards faciles à bleſſer en préſentant ſes opinions autrement que ſous un voile, celui dont il les couvre a paru trop difficile à percer. On peut auſſi lui reprocher avec quelque juſtice, de n'avoir pas obſervé les animaux avec aſſez de ſcrupule, de n'avoir point porté ſes regards ſur des détails petits en eux-mêmes, mais néceſſaires pour ſaiſir les nuances très-fines de leurs opérations. Il ſemble n'avoir aperçu dans chaque eſpèce qu'une uniformité de procédés & d'habitudes, qui donne l'idée d'êtres obéiſſans à une force aveugle & mécanique, tandis qu'en obſervant de plus près, il auroit pu apercevoir des différences très-ſenſibles entre les individus, & des actions qui ſemblent appartenir au raiſonnement, qui indiquent même des idées abſtraites & générales.

La première claſſe d'animaux décrite par M. de Buffon, eſt celle des quadrupèdes; la ſeconde, celle des oiſeaux, & c'eſt à ces deux claſſes que s'eſt borné ſon travail. Une ſi longue ſuite de deſcriptions ſembloit devoir être monotone, & ne pouvoir intéreſſer que les ſavans; mais le talent a ſu triompher de cet obſtacle. Eſclaves ou ennemis de l'homme, deſtinés à ſa nourriture, ou n'étant pour lui

qu'un ſpectacle, tous ces êtres, ſous le pinceau de M. de Buffon, excitent alternativement la terreur, l'intérêt, la pitié ou la curioſité. Le peintre philoſophe n'en appelle aucun ſur cette ſcène toujours attachante, toujours animée, ſans marquer la place qu'il occupe dans l'univers, ſans montrer ſes rapports avec nous. Mais s'agit-il des animaux qui ſont connus ſeulement par les relations des voyageurs, qui ont reçu d'eux des noms différens, dont il faut chercher l'hiſtoire & quelquefois diſcuter la réalité au milieu de récits vagues & ſouvent défigurés par le merveilleux, le ſavant naturaliſte impoſe ſilence à ſon imagination; il a tout lu, tout extrait, tout analyſé, tout diſcuté: on eſt étonné de trouver un nomenclateur infatigable dans celui de qui on n'attendoit que des tableaux impoſans ou agréables; on lui ſait gré d'avoir plié ſon génie à des recherches ſi pénibles, & ceux qui lui auroient reproché peut-être d'avoir ſacrifié l'exactitude à l'effet, lui pardonnent, & ſentent ranimer leur confiance.

Des réflexions philoſophiques mêlées aux deſcriptions, à l'expoſition des faits & à la peinture des mœurs, ajoutent à l'intérêt, aux charmes de cette lecture & à ſon utilité. Ces réflexions ne ſont pas celles d'un philoſophe qui ſoumet toutes ſes penſées à une analyſe rigoureuſe, qui ſuit ſur les divers objets les principes d'une philoſophie toujours une; mais ce ne ſont pas non plus ces réflexions iſolées que chaque ſujet offre à l'eſprit, qui ſe préſentent d'elles-mêmes, & n'ont qu'une vérité paſſagère & locale. Celles de M. de Buffon s'attachent toujours à quelque loi générale de la nature, ou du moins à quelque grande idée.

Dans ſes diſcours ſur les animaux domeſtiques, ſur les animaux carnaſſiers, ſur la dégénération des eſpèces, on le voit tantôt eſquiſſer l'hiſtoire du règne animal conſidéré dans ſon enſemble, tantôt parler en homme libre de la dégradation où la ſervitude réduit les animaux, en homme ſenſible de la deſtruction à laquelle l'eſpèce humaine les a ſoumis, & en philoſophe de la néceſſité de cette

deſtruction, des effets lents & ſûrs de cette ſervitude ; de ſon influence ſur la forme, ſur les facultés, ſur les habitudes morales des différentes eſpèces. Des traits qui ſemblent lui échapper caractériſent la ſenſibilité & la fierté de ſon ame, mais elle paroît toujours dominée par une raiſon ſupérieure : on croit pour ainſi dire converſer avec une pure intelligence, qui n'auroit de la ſenſibilité humaine que ce qu'il en faut pour ſe faire entendre de nous & intéreſſer notre foibleſſe.

Dans ſon diſcours ſur les perroquets, il fait ſentir la différence de la perfectibilité de l'eſpèce entière, apanage qu'il croit réſervé à l'homme, & de cette perfectibilité individuelle que l'animal ſauvage doit à la néceſſité, à l'exemple de ſon eſpèce, & l'animal domeſtique aux leçons de ſon maître. Il montre comment l'homme par la durée de ſon enfance, par celle du beſoin phyſique des ſecours maternels, contracte l'habitude d'une communication intime qui le diſpoſe à la ſociété, qui dirige vers ſes rapports avec ſes ſemblables le développement de ſes facultés, ſuſceptibles d'acquérir une perfection plus grande dans un être plus heureuſement organiſé & né avec de plus grands beſoins.

Peut-être, cette nuance entre nous & les animaux eſt-elle moins tranchée que M. de Buffon n'a paru le croire ; peut-être, comme l'exemple des caſtors ſemble le prouver, exiſte-t il des eſpèces d'animaux ſuſceptibles d'une ſorte de perfectibilité non moins réelle, mais plus lente & plus bornée : qui pourroit même aſſurer qu'elle ne s'étendroit pas bien au-delà des limites que nous oſons lui fixer, ſi les eſpèces qui nous paroiſſent les plus ingénieuſes, affranchies de la crainte dont les frappe la préſence de l'homme, & ſoumiſes par des circonſtances locales à des beſoins aſſez grands pour exciter l'activité, mais trop foibles pour la détruire, éprouvoient la néceſſité & avoient en même temps la liberté de déployer toute l'énergie dont la nature a pu les douer ; Des obſervations long-temps continuées pourroient ſeules donner le droit de prononcer

ſur cette queſtion ; il ſuffit pour le ſentir de jeter un regard ſur notre eſpèce même. Suppoſons que les nations Européennes n'ayent pas exiſté, que les hommes ſoient ſur toute la terre ce qu'ils ſont en Aſie & en Afrique, qu'ils ſoient reſtés par-tout à ce même degré de civiliſation & de connoiſſances auquel ils étoient déjà dans le temps où commence pour nous leur hiſtoire : ne ſeroit-on pas alors fondé à croire qu'il eſt un terme que dans chaque climat l'homme ne peut paſſer ? ne regarderoit-on pas comme un viſionnaire le philoſophe qui oſeroit promettre à l'eſpèce humaine les progrès qu'elle a faits & qu'elle fait journellement en Europe ?

La connoiſſance anatomique des animaux eſt une portion importante de leur hiſtoire. M. de Buffon eut pour cette partie de ſon ouvrage, le bonheur de trouver des ſecours dans l'amitié généreuſe d'un célèbre naturaliſte, qui lui laiſſant la gloire attachée à ces deſcriptions brillantes, à ces peintures de mœurs, à ces réflexions philoſophiques qui frappent tous les eſprits, ſe contentoit du mérite plus modeſte, d'obtenir l'eſtime des ſavans par des détails exacts & précis, par des obſervations faites avec une rigueur ſcrupuleuſe, par des vues nouvelles qu'eux ſeuls pouvoient apprécier. Ils ont regretté que M. de Buffon n'ait pas dans l'hiſtoire des oiſeaux conſervé cet exact & ſage coopérateur, mais ils l'ont regretté ſeuls. Nous l'avouons ſans peine & ſans croire diminuer par-là le juſte tribut d'honneur qu'ont mérité les travaux de M. Daubenton.

A l'hiſtoire des quadrupèdes & des oiſeaux ſucceda celle des ſubſtances minérales.

Dans cette partie de ſon ouvrage, peut-être M. de Buffon n'a-t-il pas attaché aſſez d'importance aux travaux des chimiſtes modernes, à cette foule de faits précis & bien prouvés dont ils ont enrichi la ſcience de la nature, à cette méthode analytique qui conduit ſi ſûrement à la vérité, oblige de l'attendre lorſqu'elle n'eſt pas encore à

notre portée, & ne permet jamais d'y ſubſtituer des erreurs. En effet, l'analyſe chimique des ſubſtances minérales peut ſeule donner à leur nomenclature une baſe ſolide, répandre la lumière ſur leur hiſtoire, ſur leur origine, ſur les antiques événemens qui ont déterminé leur formation.

Malgré ce juſte reproche, on retrouve dans l'hiſtoire des minéraux le talent & la philoſophie de M. de Buffon, ſes aperçus ingénieux, ſes vues générales & grandes, ce talent de ſaiſir dans la ſuite des faits tout ce qui peut appuyer ces vues, de s'emparer des eſprits, de les entraîner où il veut les conduire, & de faire admirer l'auteur lors même que la raiſon ne peut adopter ſes principes.

L'Hiſtoire naturelle renferme un ouvrage d'un genre différent, ſous le titre d'*Arithmétique morale*. Une application du calcul à la probabilité de la durée de la vie humaine entroit dans le plan de l'hiſtoire naturelle; M. de Buffon ne pouvoit guère traiter ce ſujet ſans porter un regard philoſophique ſur les principes même de ce calcul, & ſur la nature des différentes vérités. Il y établit cette opinion, que les vérités mathématiques ne ſont point des vérités réelles, mais de pures vérités de définition; obſervation juſte, ſi on veut la prendre dans la rigueur métaphiſique, mais qui s'applique également alors aux vérités de tous les ordres, dès qu'elles ſont préciſes & qu'elles n'ont pas des individus pour objet. Si enſuite on veut appliquer ces vérités à la pratique & les rendre dès-lors individuelles, ſemblables encore à cet égard aux vérités mathématiques, elles ne ſont plus que des vérités approchées. Il n'exiſte réellement qu'une ſeule différence; c'eſt que les idées dont l'identité forme les vérités mathématiques ou phyſiques ſont plus abſtraites dans les premières, d'où il réſulte que, pour les vérités phyſiques, nous avons un ſouvenir diſtinct des individus dont elles expriment les qualités communes, & que nous l'avons plus pour les autres; mais la véritable réalité, l'utilité d'une propoſition quelconque eſt indépendante de cette différence; car on doit regarder une vérité

vérité comme réelle, toutes les fois que, si on l'applique à un objet réellement existant, elle reste une vérité absolue, ou devient une vérité indéfiniment approchée.

M. de Buffon proposoit d'assigner une valeur précise à la probabilite très-grande que l'on peut regarder comme une certitude morale, & de n'avoir au-delà de ce terme aucun égard à la petite possibilité d'un événement contraire. Ce principe est vrai, lorsque l'on veut seulement appliquer à l'usage commun le résultat d'un calcul, & dans ce sens tous les hommes l'ont adopté dans la pratique, tous les philosophes l'ont suivi dans leurs raisonnemens; mais il cesse d'être juste si on l'introduit dans le calcul même, & sur-tout si on veut l'employer à établir des théories, à expliquer des paradoxes, à prouver ou à combattre des règles générales. D'ailleurs cette probabilité qui peut s'appeler *certitude morale*, doit être plus ou moins grande suivant la nature des objets que l'on considère & les principes qui doivent diriger notre conduite; & il auroit fallu marquer pour chaque genre de vérités & d'actions, le degré de probabilité où il commence à être raisonnable de croire & permis d'agir.

C'est par respect pour les talens de notre illustre confrère que nous nous permettons de faire ici ces observations. Lorsque des opinions qui paroissent erronées se trouvent dans un livre fait pour séduire l'esprit comme pour l'éclairer, c'est presque un devoir d'avertir de les soumettre à un examen rigoureux. L'admiration dispose si facilement à la croyance, que les lecteurs entraînés à la fois par le nom de l'auteur & par le charme du style, cédent sans résistance, & semblent craindre que le doute, en affoiblissant un enthousiasme qui leur est cher, ne diminue leur plaisir. Mais on doit encore ici à M. de Buffon, sinon d'avoir répandu une lumière nouvelle sur cette partie des mathématiques & de la philosophie, du moins d'en avoir fait sentir l'utilité, peut-être même d'en avoir appris l'existence à une classe nombreuse qui n'auroit pas

été en chercher les principes dans les ouvrages des géomètres ; enfin, d'en avoir montré la liaison avec l'histoire naturelle de l'homme. C'est avoir contribué au progrès d'une science qui, soumettant au calcul les événemens dirigés par des loix que nous nommons irrégulières, par ce qu'elles nous sont inconnues, semble étendre l'empire de l'esprit humain au-delà de ses bornes naturelles, & lui offrir un instrument à l'aide duquel ses regards peuvent s'étendre sur des espaces immenses, que peut-être il ne lui sera jamais permis de parcourir.

On a reproché à la philosophie de M. de Buffon, non-seulement ces systèmes généraux dont nous avons parlé, & qui reparoissent trop souvent dans le cours de ses ouvrages, mais on lui a reproché un esprit trop systématique, ou plutôt un esprit trop prompt à former des résultats généraux d'après les premiers rapports qui l'ont frappé, & de négliger trop ensuite les autres rapports qui auroient pu ou jeter des doutes sur ces résultats, ou en diminuer la généralité, ou leur ôter cet air de grandeur, ce caractère imposant, si propre à entraîner les imaginations ardentes & mobiles. Les savans qui cherchent la vérité, étoient fâchés d'être obligés sans cesse de se défendre contre la séduction, & de ne trouver souvent, au lieu de résultats & de faits propres à servir de base à leurs recherches & à leurs observations, que des opinions à examiner & des doutes à résoudre.

Mais si l'Histoire naturelle a eu parmi les savans des censeurs sévères, le style de cet ouvrage n'a trouvé que des admirateurs.

M. de Buffon est poëte dans ses descriptions ; mais comme les grands poëtes, il sait rendre intéressante la peinture des objets physiques, en y mêlant avec art des idées morales qui intéressent l'ame en même temps que l'imagination est amusée ou étonnée. Son style est harmonieux, non de cette harmonie qui appartient à tous les écrivains corrects à qui le sens de l'oreille n'a pas été refusé, &

qui consiste presque uniquement à éviter les sons durs ou pénibles, mais de cette harmonie qui est une partie du talent, ajoute aux beautés par une sorte d'analogie entre les idées & les sons, & fait que la phrase est douce ou sonore, majestueuse ou légère, suivant les objets qu'elle doit peindre & les sentimens qu'elle doit réveiller.

Si M. de Buffon est plus abondant que précis, cette abondance est plutôt dans les choses que dans les mots; il ne s'arrête pas à une idée simple, il en multiplie les nuances; mais chacune d'elles est exprimée avec précision. Son style a de la majesté, de la pompe; mais c'est parce qu'il présente des idées vastes & des grandes images; la force & l'énergie lui paroissent naturelles, il semble qu'il lui ait été impossible de parler ou plutôt de penser autrement. On a loué la variété de ses tons; on s'est plaint de sa monotonie; mais ce qui peut être fondé dans cette censure est encore un sujet d'éloge: en peignant la nature sublime ou terrible, douce ou riante, en décrivant la fureur du tigre, la majesté du cheval, la fierté & la rapidité de l'aigle, les couleurs brillantes du colibri, la légèreté de l'oiseau mouche, son style prend le caractère des objets, mais il conserve sa dignité imposante; c'est toujours la nature qu'il peint, & il fait que même dans les plus petits objets elle a manifesté toute sa puissance. Frappé d'une sorte de respect religieux pour les grands phénomènes de l'univers, pour les loix générales auxquelles obéissent les diverses parties du vaste ensemble qu'il a entrepris de tracer, ce sentiment se montre par-tout, & forme en quelque sorte le fond sur lequel il répand de la variété, sans que cependant on cesse jamais de l'apercevoir.

Cet art de peindre en ne paroissant que raconter, ce grand talent du style porté sur des objets qu'on avoit traités avec clarté, avec élégance, & même embellis par des réflexions ingénieuses, mais auxquels jusqu'alors l'éloquence avoit paru étrangère, frappèrent bientôt tous les esprits: la langue Françoise étoit déjà devenue la langue de l'Europe,

& M. de Buffon eut par-tout des lecteurs & des disciples. Mais ce qui est plus glorieux, parce qu'il s'y joint une utilité réelle, le succès de ce grand ouvrage fut l'époque d'une révolution dans les esprits; on ne put le lire sans avoir envie de jeter au moins un coup-d'œil sur la nature, & l'histoire naturelle devint une connoissance presque vulgaire; elle fut pour toutes les classes de la société, ou un amusement, ou une occupation; on voulut avoir un cabinet comme on vouloit avoir une bibliothèque: mais le résultat n'en est pas le même, car dans les bibliothèques on ne fait que répéter les exemplaires des mêmes livres; ce sont au contraire des individus différens qu'on rassemble dans les cabinets; ils s'y multiplient pour les naturalistes, à qui dès-lors les objets dignes d'être observés échappent plus difficilement.

La botanique, la métallurgie, les parties de l'histoire naturelle, immédiatement utiles à la médecine, au commerce, aux manufactures, avoient été encouragées; mais c'est à la science même, à cette science, comme ayant pour objet la connoissance de la nature, que M. de Buffon a su le premier intéresser les souverains, les grands, les hommes publics de toutes les nations. Plus sûrs d'obtenir des récompenses, pouvant aspirer enfin à cette gloire populaire que les vrais savans savent apprécier mieux que les autres hommes, mais qu'ils ne méprisent point, les naturalistes se sont livrés à leurs travaux avec une ardeur nouvelle; on les a vus se multiplier à la voix de M. de Buffon dans les provinces comme dans les capitales, dans les autres parties du monde comme dans l'Europe. Sans doute on avoit cherché avant lui à faire sentir l'utilité de l'étude de la nature; la science n'étoit pas négligée; la curiosité humaine s'étoit portée dans les pays éloignés, avoit voulu connoître la surface de la terre, & pénétrer dans son sein; mais on peut appliquer à M. de Buffon ce que lui-même a dit d'un autre philosophe également célèbre, son rival dans l'art d'écrire, comme lui plus utile peut-être par l'effet

de ſes ouvrages, que par les vérités qu'ils renferment : *D'autres avoient dit les mêmes choſes, mais il les a commandées au nom de la nature, & on lui a obéi.*

Peut-être le talent d'inſpirer aux autres ſon enthouſiaſme, de les forcer de concourir aux mêmes vues, n'eſt pas moins néceſſaire que celui des découvertes, au perfectionnement de l'eſpèce humaine, peut-être n'eſt il pas moins rare, n'exige-t-il pas moins ces grandes qualités de l'eſprit qui nous forcent à l'admiration. Nous l'accordons à ces harangues célèbres que l'antiquité nous a tranſmiſes, & dont l'effet n'a duré qu'un ſeul jour; pourrions-nous la refuſer à ceux dont les ouvrages produiſent ſur les hommes diſperſés des effets plus répétés & plus durables ? Nous l'accordons à celui dont l'éloquence diſpoſant des cœurs d'un peuple aſſemblé, lui a inſpiré une réſolution généreuſe ou ſalutaire; pourroit-on la refuſer à celui dont les ouvrages ont changé la pente des eſprits, les ont portés à une étude utile, & ont produit une révolution qui peut faire époque dans l'hiſtoire des ſciences?

Si donc la gloire doit avoir l'utilité pour meſure, tant que l'eſpèce humaine n'obéira pas à la ſeule raiſon, tant qu'il faudra non-ſeulement découvrir des vérités, mais forcer à les admettre, mais inſpirer le déſir d'en chercher de nouvelles, les hommes éloquens nés avec le talent de répandre la vérité ou d'exciter le génie des découvertes, mériteront d'être placés au niveau des inventeurs, puiſque ſans eux ces inventeurs n'auroient pas exiſté, ou auroient vu leurs découvertes demeurer inutiles & dédaignées.

Quand même une imitation mal entendue de M. de Buffon auroit introduit dans les livres d'hiſtoire naturelle, le goût des ſyſtèmes vagues & des vaines déclamations, ce mal ſeroit nul en comparaiſon de tout ce que cette ſcience doit à ſes travaux : les déclamations, les ſyſtèmes paſſent, & les faits reſtent; ces livres qu'on a ſurchargés d'ornemens pour les faire lire, ſeront oubliés; mais s'ils renferment quelques vérités, elles ſurvivront à leur chute.

On peut diviſer en deux claſſes les grands écrivains dont les ouvrages excitent une admiration durable, & ſont lus encore lorſque les idées qu'ils renferment, rendues communes par cette lecture même, ont perdu leur intérêt & leur utilité. Les uns doués d'un tact fin & ſûr, d'une ame ſenſible, d'un eſprit juſte, ne laiſſent dans leurs ouvrages rien qui ne ſoit écrit avec clarté, avec nobleſſe, avec élégance, avec cette propriété de termes, cette préciſion d'idées & d'expreſſions qui permet au lecteur d'en goûter les beautés ſans fatigue, ſans qu'aucune ſenſation pénible vienne troubler ſon plaiſir.

Quelque ſujet qu'ils traitent, quelques penſées qui naiſſent dans leur eſprit, quelque ſentiment qui occupe leur ame, ils l'expriment tel qu'il eſt avec toutes ſes nuances, avec toutes les images qui l'accompagnent. Ils ne cherchent point l'expreſſion ; elle s'offre à eux, mais ils ſavent en éloigner tout ce qui nuiroit à l'harmonie, à l'effet, à la clarté : tels furent Deſpreaux, Racine, Fénelon, Maſſillon, Voltaire. On peut ſans danger les prendre pour modèles; comme le grand ſecret de leur art eſt de bien exprimer ce qu'ils penſent ou ce qu'ils ſentent, celui qui l'aura ſaiſi dans leurs ouvrages, qui aura ſu ſe le rendre propre, s'approchera d'eux ſi ſes penſées ſont dignes des leurs ; l'imitation ne paroîtra point ſervile ſi ſes idées ſont à lui, & il ne ſera expoſé ni à contracter des défauts, ni à perdre de ſon originalité.

Dans d'autres écrivains, le ſtyle paroît ſe confondre davantage avec les penſées. Non-ſeulement ſi on cherche à les ſéparer, on détruit des beautés, mais les idées elles-mêmes ſemblent diſparoître, parce que l'expreſſion leur imprimoit le caractère particulier de l'ame & de l'eſprit de l'auteur, caractère qui s'évanouit avec elle : tels furent Corneille, Boſſuet, Monteſquieu, Rouſſeau ; tel fut M. de Buffon.

Ils frappent plus que les autres, parce qu'ils ont une originalité plus grande & plus continue ; parce que, moins

occupés de la perfection & des qualités du ſtyle, ils voilent moins leurs hardieſſes, parce qu'ils ſacrifient moins l'effet au goût & à la raiſon, parce que leur caractère ſe montrant ſans ceſſe dans leurs ouvrages, agit à la longue plus fortement, & ſe communique davantage; mais en même temps ils peuvent être des modèles dangereux. Pour imiter leur ſtyle, il faudroit avoir leurs penſées, voir les objets comme ils les voient, ſentir comme ils ſentent; autrement, ſi le modèle vous offre des idées originales & grandes, l'imitateur vous préſentera des idées communes, ſurchargées d'expreſſions extraordinaires; ſi l'un ôte aux vérités abſtraites leur ſécherеſſe, en les rendant par des images brillantes, l'autre préſentera des demi-penſées, que des méthaphores bizarres rendent inintelligibles. Le modèle a parlé de tout avec chaleur, parce que ſon ame étoit toujours agitée; le froid imitateur cachera ſon indifférence ſous des formes paſſionnées. Dans ces écrivains, les défauts tiennent ſouvent aux beautés, ont la même origine, ſont plus difficiles à diſtinguer, & ce ſont ces défauts que l'imitateur ne manque jamais de tranſporter dans ſes copies. Veut-on les prendre pour modèles, il ne faut point chercher à ſaiſir leur manière, il ne faut point vouloir leur reſſembler, mais ſe pénétrer de leurs beautés, aſpirer à produire des beautés égales, s'appliquer comme eux à donner un caractère original à ſes productions, ſans copier celui qui frappe ou qui ſéduit dans les leurs.

Il ſeroit donc injuſte d'imputer à ces grands écrivains les fautes de leurs enthouſiaſtes, de les accuſer d'avoir corrompu le goût, parce que des gens qui en manquoient les ont parodiés en croyant les imiter. Ainſi on auroit tort de reprocher à M. de Buffon ces idées vagues, cachées ſous des expreſſions empoulées, ces images incohérentes, cette pompe ambitieuſe du ſtyle, qui défigure tant des productions modernes, comme on auroit tort de vouloir rendre Rouſſeau reſponſable de cette fauſſe ſenſibilité, de cette habitude de ſe paſſionner de ſang froid, d'exagérer

toutes les opinions ; enfin, de cette manie de parler de soi sans nécessité, qui sont devenues une espèce de mode & presque un mérite. Ces erreurs passagères dans le goût d'une nation, cèdent facilement à l'empire de la raison & à celui de l'exemple ; l'enthousiasme exagéré, qui fait admirer jusqu'aux défauts des hommes illustres, donne à ces mal-adroites imitations une vogue momentanée, mais à la longue il ne reste que ce qui est vraiment beau ; & comme Corneille & Bossuet ont contribué à donner à notre langue, l'un plus de force, l'autre plus d'élévation & de hardiesse, M. de Buffon lui aura fait acquérir plus de magnificence & de grandeur, comme Rousseau l'aura instruite à former des accens plus fiers & plus passionnés.

Le style de M. de Buffon n'offre pas toujours le même degré de perfection ; mais dans tous les morceaux destinés à l'effet, il a cette correction, cette pureté, sans lesquelles, lorsqu'une langue est une fois formée, on ne peut atteindre à une célébrité durable. S'il s'est permis quelquefois d'être négligé, c'est uniquement dans les discussions purement scientifiques, où les taches qu'il a pu laisser ne nuisent point à des beautés, & servent peut-être à faire mieux goûter les peintures brillantes qui les suivent.

C'étoit par un long travail qu'il parvenoit à donner à son style ce degré de perfection, & il continuoit de le corriger jusqu'à ce qu'il eût effacé toutes les traces du travail, & qu'à force de peine il lui eût donné de la facilité ; car cette qualité si précieuse n'est dans un écrivain que l'art de cacher ses efforts, de présenter les pensées, comme s'il les avoit conçues d'un seul jet, dans l'ordre le plus naturel ou le plus frappant, revêtues des expressions les plus propres ou les plus heureuses ; & cet art, auquel le plus grand charme du style est attaché, n'est cependant que le résultat d'une longue suite d'observations fugitives & d'attentions minutieuses.

M. de Buffon aimoit à lire ses ouvrages, non par vanité, mais

mais pour s'assurer par l'expérience de leur clarté & de leur effet, les deux qualités peut-être sur lesquelles on peut le moins se juger soi-même. Avec une telle intention, il ne choisissoit pas ses auditeurs ; ceux que le hasard lui offroit, sembloient devoir mieux représenter le public, dont il vouloit essayer sur eux la manière de sentir : il ne se bornoit pas à recevoir leurs avis ou plutôt leurs éloges ; souvent il leur demandoit quel sens ils attachoient à une phrase, quelle impression ils avoient éprouvée ; & s'ils n'avoient pas saisi son idée, s'il avoit manqué l'effet qu'il vouloit produire, il en concluoit que cette partie de son ouvrage manquoit de netteté, de mesure ou de force, & il l'écrivoit de nouveau. Cette méthode est excellente pour les ouvrages de philosophie qu'on destine à devenir populaires; mais peu d'auteurs auront le courage de l'employer. Il ne faut pas cependant s'attendre à trouver un égal degré de clarté dans toute l'Histoire naturelle ; M. de Buffon a écrit pour les savans, pour les philosophes & pour le public, & il a su proportionner la clarté de chaque partie, au désir qu'il avoit d'être entendu d'un nombre plus ou moins grand de lecteurs.

Peu d'hommes ont été aussi laborieux que lui, & l'ont été d'une manière si continue & si régulière. Il paroissoit commander à ses idées plutôt qu'être entraîné par elles. Né avec une constitution à la fois très-saine & très-robuste, fidèle au principe d'employer toutes ses facultés, jusqu'à ce que la fatigue l'avertît qu'il commençoit à en abuser, son esprit étoit toujours également prêt à remplir la tâche qu'il lui imposoit. C'étoit à la campagne qu'il aimoit le plus à travailler ; il avoit placé son cabinet à l'extrémité d'un vaste jardin sur la cime d'une montagne; c'est là qu'il passoit les matinées entières, tantôt écrivant dans ce réduit solitaire, tantôt méditant dans les allées de ce jardin dont l'entrée étoit alors rigoureusement interdite ; seul, & dans les momens de distraction nécessaires au milieu d'un travail long-temps continué, n'ayant autour de lui que la nature,

dont le ſpectacle en délaſſant ſes organes, le ramenoit doucement à ſes idées que la fatigue avoit interrompues. Ces longs ſéjours à Montbart étoient peu compatibles avec ſes fonctions de tréſorier de l'Académie ; mais il s'étoit choiſi pour adjoint M. Tillet dont il connoiſſoit trop le zèle actif & ſage, l'attachement ſcrupuleux à tous ſes devoirs, pour avoir à craindre que ſes confrères puſſent jamais ſe plaindre d'une abſence ſi utilement employée.

On doit mettre au nombre des ſervices qu'il a rendus aux ſciences, les progrès que toutes les parties du Jardin du roi ont faits ſous ſon adminiſtration. Ces grands dépôts ne diſpenſent point d'étudier la nature. La connoiſſance de la diſpoſition des objets & de la place qu'ils occupent à la ſurface ou dans le ſein de la terre, n'eſt pas moins importante que celle des objets eux-mêmes ; c'eſt par-là ſeulement qu'on peut connoître leurs rapports, & s'élever à la recherche de leur origine & des loix de leur formation ; mais c'eſt dans les cabinets qu'on apprend à ſe rendre capable d'obſerver immédiatement la nature ; c'eſt-là encore qu'après l'avoir étudiée, on apprend à juger ſes propres obſervations, à les comparer, à en tirer des réſultats, à ſe rappeler ce qui a pu échapper au premier coup-d'œil. C'eſt dans les cabinets que commence l'éducation du naturaliſte, & c'eſt-là auſſi qu'il peut mettre la dernière perfection à ſes penſées. Le Cabinet du Roi eſt devenu entre les mains de M. de Buffon non un ſimple monument d'oſtentation, mais un dépot utile & pour l'inſtruction publique & pour le progrès des ſciences. Il avoit ſu intéreſſer toutes les claſſes d'hommes à l'hiſtoire naturelle, & pour le récompenſer du plaiſir qu'il leur avoit procuré, tous s'empreſſoient d'apporter à ſes pieds les objets curieux qu'il leur avoit appris à chercher & à connoître. Les ſavans y ajoutoient auſſi leur tribut, car ceux même qui combattoient ſes opinions, qui déſapprouvoient ſa méthode de traiter les ſciences, reconnoiſſoient cependant qu'ils devoient une partie de leurs lumières

aux vérités qu'il avoit recueillies, & une partie de leur gloire à cet enthouſiaſme pour l'hiſtoire naturelle qui étoit ſon ouvrage. Les ſouverains lui envoyoient les productions rares ou curieuſes dont la nature avoit enrichi leurs états. C'eſt à lui que ces préſens étoient adreſſés, mais il les remettoit dans le Cabinet du roi, comme dans le lieu où expoſés aux regards d'un grand nombre d'hommes éclairés, ils pouvoient être le plus utiles.

Dans les commencemens de ſon adminiſtration, il avoit conſacré à l'embelliſſement du cabinet une gratification qui lui étoit offerte, mais qu'il ne vouloit pas accepter pour lui-même : procédé noble & doublement utile à ſes vues, puiſqu'il lui donnoit le droit de ſolliciter des ſecours avec plus de hardieſſe & d'opiniâtreté.

La botanique étoit celle des parties de l'hiſtoire naturelle dont il s'étoit le moins occupé; mais ſon goût particulier n'influa point ſur les fonctions de l'intendant du Jardin du roi. Agrandi par ſes ſoins, diſtribué de la manière la plus avantageuſe pour l'enſeignement & pour la culture d'après les vues des botaniſtes habiles qui y préſident, ce jardin eſt devenu un établiſſement digne d'une nation éclairée & puiſſante. Parvenu à ce degré de ſplendeur, le Jardin du roi n'aura plus à craindre ſans doute ces viciſſitudes de décadence & de renouvellement dont notre hiſtoire nous a tranſmis le ſouvenir, & le zèle éclairé du ſucceſſeur de M. de Buffon ſuffiroit ſeul pour en répondre à l'Académie & aux ſciences.

Ce n'eſt pas ſeulement à ſa célébrité que M. de Buffon dut le bonheur de lever les obſtacles qui s'opposèrent long-temps à l'entier ſuccès de ſes vues, il le dut auſſi à ſa conduite. Des louanges inſérées dans l'Hiſtoire naturelle étoient la récompenſe de l'intérêt que l'on prenoit aux progrès de la ſcience, & l'on regardoit comme une ſorte d'aſſurance d'immortalité, l'honneur d'y voir inſcrire ſon nom. D'ailleurs M. de Buffon avoit eu le ſoin conſtant d'acquérir & de conſerver du crédit auprès des miniſtres

& de ceux qui chargés par eux des détails, ont ſur la déciſion & l'expédition des affaires une influence inévitable. Il ſe concilioit les uns en ne ſe permettant jamais d'avancer des opinions qui puſſent les bleſſer, en ne paroiſſant point prétendre à les juger ; il s'aſſuroit des autres en employant avec eux un ton d'égalité qui les flattoit, & en ſe dépouillant de la ſupériorité que ſa gloire & ſes talens pouvoient lui donner. Ainſi, aucun des moyens de contribuer aux progrès de la ſcience à laquelle il s'étoit dévoué, n'avoit été négligé. Ce fut l'unique objet de ſon ambition : ſa conſidération, ſa gloire y étoient liées ſans doute ; mais tant d'hommes ſéparent leurs intérêts de l'intérêt général, qu'il ſeroit injuſte de montrer de la ſévérité pour ceux qui ſavent les réunir. Ce qui prouve à quel point M. de Buffon étoit éloigné de toute ambition vulgaire, c'eſt qu'appelé à Fontainebleau par le feu Roi, qui vouloit le conſulter ſur quelques points relatifs à la culture des forêts, & ce prince lui ayant propoſé de ſe charger en chef de l'adminiſtration de toutes celles qui compoſent les domaines, ni l'importance de cette place, ni l'honneur ſi déſiré d'avoir un travail particulier avec le Roi, ne purent l'éblouir : il ſentoit qu'en interrompant ſes travaux, il alloit perdre une partie de ſa gloire ; il ſentoit en même-temps la difficulté de faire le bien, ſur-tout il voyoit d'avance la foule des courtiſans & des adminiſtrateurs ſe réunir contre une ſupériorité ſi effrayante, & contre les conſéquences d'un exemple ſi dangereux.

Placé dans un ſiècle où l'eſprit humain s'agitant dans ſes chaînes, les a relâchées toutes & en a briſé quelques-unes, où toutes les opinions ont été examinées, toutes les erreurs combattues, tous les anciens uſages ſoumis à la diſcuſſion, où tous les eſprits ont pris vers la liberté un eſſor inattendu, M. de Buffon parut n'avoir aucune part à ce mouvement général. Ce ſilence peut paroître ſingulier dans un philoſophe dont les ouvrages prouvent qu'il avoit conſidéré l'homme ſous tous les rapports, & annoncent en même temps une manière de penſer mâle &

ferme, bien éloignée de ce penchant au doute, à l'incertitude qui conduit à l'indifférence.

Mais peut-être a-t-il cru que le meilleur moyen de détruire les erreurs en métaphysique & en morale, étoit de multiplier les vérités d'observation dans les sciences naturelles, qu'au lieu de combattre l'homme ignorant & opiniâtre, il falloit lui inspirer le désir de s'instruire: il étoit plus utile, selon lui, de prémunir les générations suivantes contre l'erreur, en accoutumant les esprits à se nourrir de vérités même indifférentes, que d'attaquer de front des préjugés enracinés & liés avec l'amour-propre, l'intérêt ou les passions de ceux qui les ont adoptés. La nature a donné à chaque homme son talent, & la sagesse consiste à y plier sa conduite: l'un est fait pour combattre, l'autre pour instruire; l'un pour corriger & redresser les esprits, l'autre pour les subjuguer & les entraîner après lui.

D'ailleurs, M. de Buffon vouloit élever le monument de l'Histoire naturelle, il vouloit donner une nouvelle forme au Cabinet du Roi; il avoit besoin & de repos & du concours général des suffrages : or, quiconque attaque des erreurs, ou laisse seulement entrevoir son mépris pour elles, doit s'attendre à voir ses jours troublés, & chacun de ses pas embarrassés par des obstacles. Un vrai philosophe doit combattre les ennemis qu'il rencontre sur la route qui le conduit à la vérité, mais il seroit mal-adroit d'en appeler de nouveaux par des attaques imprudentes.

Peu de savans, peu d'écrivains ont obtenu une gloire aussi populaire que M. de Buffon, & il eut le bonheur de la voir continuellement s'accroître à mesure que les autres jouissances diminuant pour lui, celles de l'amour-propre lui devenoient plus nécessaires. Il n'essuya que peu de critiques, parce qu'il avoit soin de n'offenser aucun parti, parce que la nature de ses ouvrages ne permettoit guère à la littérature ignorante d'atteindre à sa hauteur. Les savans avoient presque tous gardé le silence, sachant qu'il y a peu d'honneur & peu d'utilité pour les sciences à combattre un

ſyſtème qui devient néceſſairement une vérité générale ſi les faits le confirment, ou tombe de lui-même s'ils le contrarient.

D'ailleurs, M. de Buffon employa le moyen le plus sûr d'empêcher les critiques de ſe multiplier; il ne répondit pas à celles qui parurent contre ſes premiers volumes. Ce n'eſt point qu'elles fuſſent toutes mépriſables ; celles de M. Haller, de M. Bonnet, de M. l'abbé de Condillac, celles même que pluſieurs ſavans avoient fournies à l'auteur des Lettres Américaines, pouvoient mériter des réponſes qui n'euſſent pas toujours été faciles. Mais en répondant, il auroit intéreſſé l'amour-propre de ſes adverſaires à continuer leurs critiques, & perpétué une guerre où la victoire, qui ne pouvoit jamais être abſolument complette, ne l'auroit pas dédommagé d'un temps qu'il étoit ſûr d'employer plus utilement pour ſa gloire.

Les ſouverains, les princes étrangers qui viſitoient la France, s'empreſſoient de rendre hommage à M. de Buffon, & de le chercher au milieu de ces richeſſes de la nature, raſſemblées par ſes ſoins. L'Impératrice de Ruſſie dont le nom eſt lié à celui de nos plus célèbres philoſophes, qui avoit propoſé inutilement à M. d'Alembert de ſe charger de l'éducation de ſon fils, & appelé auprès d'elle M. Diderot, après avoir répandu ſur lui des bienfaits dont la délicateſſe avec laquelle ils étoient offerts augmentoit le prix, qui avoit rendu M. de Voltaire le confident de tout ce qu'elle entreprenoit pour répandre les lumières, établir la tolérance & adoucir les loix; l'Impératrice de Ruſſie prodiguoit à M. de Buffon les marques de ſon admiration les plus capables de le toucher, en lui envoyant tout ce qui, dans ſes vaſtes états, devoit le plus exciter ſa curioſité, & en choiſiſſant par une recherche ingénieuſe les productions ſingulières qui pouvoient ſervir de preuves à ſes opinions. Enfin, il eut l'honneur de recevoir dans ſa retraite de Montbart, ce héros en qui l'Europe admire le génie de Frédéric & chérit l'humanité d'un ſage, & qui vient

aujourd'hui mêler ſes regrets aux nôtres, & embellir par l'éclat de ſa gloire la modeſte ſimplicité des honneurs académiques.

M. de Buffon n'étoit occupé que d'un ſeul objet, n'avoit qu'un ſeul goût; il s'étoit créé un ſtyle, & s'étoit fait une philoſophie par ſes réfléxions, plus encore que par l'étude; on ne doit donc pas s'étonner de ne trouver ni dans ſes lettres ni dans quelques morceaux échappés à ſa plume, cette légèreté, cette ſimplicité qui doivent en ètre le caractère: mais preſque toujours quelques traits font reconnoître le peintre de la nature, & dédommagent d'un défaut de fléxibilité incompatible peut-être avec la trempe mâle & vigoureuſe de ſon eſprit. C'eſt à la même cauſe que l'on doit attribuer la ſévérité de ſes jugemens, & cette ſorte d'orgueil qu'on a cru obſerver en lui. L'indulgence ſuppoſe quelque facilité à ſe prêter aux idées & à la manière d'autrui, & il eſt difficile d'être ſans orgueil, quand occupé ſans ceſſe d'un grand objet qu'on a dignement rempli, on eſt forcé en quelque ſorte de porter toujours avec ſoi le ſentiment de ſa ſupériorité.

Dans la ſociété, M. de Buffon ſouffroit ſans peine la médiocrité, ou plutôt occupé de ſes propres idées, il ne l'apercevoit pas, & préféroit en général les gens qui pouvoient le diſtraire ſans le contredire, & ſans l'aſſujettir au ſoin fatigant de prévenir leurs objections ou d'y répondre. Simple dans la vie privée, y prenant ſans effort le ton de la bonhomie, quoiqu'aimant par goût la magnificence & tout ce qui avoit quelque appareil de grandeur, il avoit conſervé cette politeſſe noble, ces déférences extérieures pour le rang & les places, qui étoient dans ſa jeuneſſe le ton général des gens du monde, & dont plus d'amour pour la liberté & l'égalité au moins dans les manières, nous a peut-être trop corrigés; car ſouvent les formes polies diſpenſent de la fauſſeté, & le reſpect extérieur eſt une barrière que l'on oppoſe avec ſuccès à une familiarité dangereuſe. On auroit pu tirer de ces déférences qui paroiſſoient exagérées, quelques inductions défavorables au

caractère de M. de Buffon, si dans des circonstances plus importantes il n'avoit montré une hauteur d'ame & une noblesse supérieures à l'intérêt comme au ressentiment.

Il avoit épousé en 1752 Mademoiselle de Saint-Belin, dont la naissance, les agrémens exterieurs & les vertus réparèrent à ses yeux le défaut de fortune. L'âge avoit fait perdre à M. de Buffon une partie des agrémens de la jeunesse; mais il lui restoit une taille avantageuse, un air noble, une figure imposante, une physionomie à la fois douce & majestueuse. L'enthousiasme pour le talent fit disparoître aux yeux de Madame de Buffon l'inégalité d'âge, & dans cette époque de la vie où la félicité semble se borner à remplacer par l'amitié & des souvenirs mêlés de regrets, un bonheur plus doux qui nous échappe, il eut celui d'inspirer une passion tendre, constante, sans distraction comme sans nuage : jamais une admiration plus profonde ne s'unit à une tendresse plus vraie. Ces sentimens se montroient dans les regards, dans les manières, dans les discours de Madame de Buffon, & remplissoient son cœur & sa vie. Chaque nouvel ouvrage de son mari, chaque nouvelle palme ajoutée à sa gloire étoient pour elle une source de jouissances d'autant plus douces, qu'elles étoient sans retour sur elle-même, sans aucun mélange de l'orgueil qui pouvoit lui inspirer l'honneur de partager la considération, & le nom de M. de Buffon; heureuse du seul plaisir d'aimer & d'admirer ce qu'elle aimoit, son ame étoit fermée à toute vanité personnelle, comme à tout sentiment étranger. M. de Buffon n'a conservé d'elle qu'un fils, M. le comte de Buffon, major en second du régiment d'Angoumois, qui porte avec honneur, dans une autre carrière, un nom à jamais célèbre dans les sciences, dans les lettres & dans la philosophie.

M. de Buffon fut long-temps exempt des pertes qu'amène la vieillesse; il conserva également & toute la vigueur des sens & toute celle de l'ame; toujours plein d'ardeur pour le travail, toujours constant dans sa manière de

de vivre, dans ses délassemens comme dans ses études, il sembloit que l'âge de la force se fût prolongé pour lui au-delà des bornes ordinaires. Une maladie douloureuse vint troubler & accélérer la fin d'une si belle carriere; il lui opposa la patience, eut le courage de s'en distraire par une étude opiniâtre, mais il ne consentit jamais à s'en délivrer par une opération dangereuse. Le travail, les jouissances de la gloire, le plaisir de suivre ses projets pour l'agrandissement du Jardin & du Cabinet du Roi, suffisoient pour l'attacher à la vie; il ne voulut pas la risquer contre l'espérance d'un soulagement souvent passager & suivi quelquefois d'infirmités pénibles, qui lui ôtant une partie de ses forces, auroient été pour une ame active plus insupportables que la douleur. Il conserva presque jusqu'à ses derniers momens le pouvoir de s'occuper avec intérêt de ses ouvrages & des fonctions de sa place, la liberté entière de son esprit, toute la force de sa raison, & pendant quelques jours seulement, il cessa d'être l'homme illustre dont le génie & les travaux occupoient l'Europe depuis quarante ans.

Les sciences le perdirent le 16 avril 1788.

Lorsque de tels hommes disparoissent de la terre, aux premiers éclats d'un enthousiasme augmenté par les regrets, & aux derniers cris de l'envie expirante, succède bientôt un silence redoutable, pendant lequel se prépare avec lenteur le jugement de la postérité. On relit paisiblement pour l'examiner, ce qu'on avoit lu pour l'admirer, le critiquer, ou seulement pour le vain plaisir d'en parler. Des opinions conçues avec plus de réflexions, motivées avec plus de liberté, se répandent peu à peu, se modifient, se corrigent les unes les autres; & à la fin une voix presque unanime s'élève, & prononce un arrêt que rarement les siècles futurs doivent révoquer.

Ce jugement sera favorable à M. de Buffon; il restera toujours dans la classe si peu nombreuse des philosophes, dont une postérité reculée lit encore les ouvrages. En

général elle se rappelle leurs noms, elle s'occupe de leurs découvertes, de leurs opinions; mais c'est dans des ouvrages étrangers qu'elle va les chercher, parce qu'elles s'y présentent débarrassées de tout ce que les idées particulières au siècle, au pays où ils ont vécu peuvent y avoir mêlé d'obscur, de vague ou d'inutile: rarement le charme du style peut-il compenser ces effets inévitables du temps & du progrès des esprits; mais M. de Buffon doit échapper, à cette règle commune, & la postérité placera ses ouvrages à côté des dialogues du disciple de Socrate, & des entretiens du philosophe de Tusculum.

L'histoire des sciences ne présente que deux hommes, qui par la nature de leurs ouvrages paroissent se rapprocher de M. de Buffon, Aristote & Pline. Tous deux infatigables comme lui dans le travail; étonnans par l'immensité de leurs connoissances & par celle des plans qu'ils ont conçus & exécutés, tous deux respectés pendant leur vie, & honorés après leur mort par leurs concitoyens, ont vu leur gloire survivre aux révolutions des opinions & des empires, aux nations qui les ont produits, & même aux langues qu'ils ont employées, & ils semblent par leur exemple promettre à M. de Buffon une gloire non moins durable.

Aristote porta sur le mécanisme des opérations de l'esprit humain, sur les principes de l'éloquence & de la poësie, le coup-d'œil juste & perçant d'un philosophe, dicta au goût & à la raison des loix auxquelles ils obéissent encore, donna le premier exemple, trop tôt oublié, d'étudier la nature dans la seule vue de la connoître & de l'observer avec précision comme avec méthode.

Placé dans une nation moins savante, Pline fut plutôt un compilateur de relations qu'un philosophe observateur; mais comme il avoit embrassé dans son plan tous les travaux des arts & tous les phénomènes de la nature, son ouvrage renferme les mémoires les plus précieux & les plus étendus que l'antiquité nous ait laissés pour l'histoire des progrès de l'espèce humaine.

Dans un ſiècle plus éclairé, M. de Buffon a réuni ſes propres obſervations à celles que les immenſes lectures lui ont fournies; ſon plan moins étendu que celui de Pline, eſt exécuté d'une manière plus complette; il préſente & diſcute les réſultats qu'Ariſtote n'avoit oſé qu'indiquer.

Le philoſophe Grec n'a mis dans ſon ſtyle qu'une préciſion méthodique & ſévère, & n'a parlé qu'à la raiſon.

Pline dans un ſtyle noble, énergique & grave, laiſſe échapper des traits d'une imagination ſorte, mais ſombre, & d'une philoſophie ſouvent profonde, mais preſque toujours auſtère & mélancolique.

M. de Buffon, plus varié, plus brillant, plus prodigue d'images, joint la facilité à l'énergie, les grâces à la majeſté; ſa philoſophie, avec un caractère moins prononcé, eſt plus vraie & moins affligeante. Ariſtote ſemble n'avoir écrit que pour les ſavans, Pline pour les philoſophes, M. de Buffon pour tous les hommes éclairés.

Ariſtote a été ſouvent égaré par cette vaine métaphyſique des mots, vice de la philoſophie Grecque, dont la ſupériorité de ſon eſprit ne put entièrement le garantir.

La crédulité de Pline a rempli ſon ouvrage de fables qui jettent de l'incertitude ſur les faits qu'il rapporte, lors même qu'on n'eſt pas en droit de les reléguer dans la claſſe des prodiges.

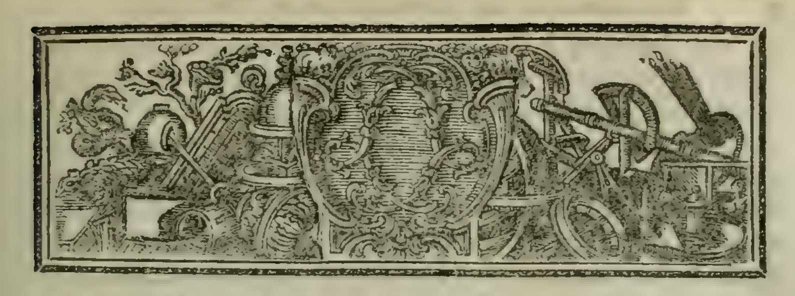
On n'a reproché à M. de Buffon que ſes hypothèſes; ce ſont auſſi des eſpèces de fables, mais des fables produites par une imagination active qui a beſoin de créer, & non par une imagination paſſive qui cède à des impreſſions étrangères.

On admirera toujours dans Ariſtote le génie de la philoſophie; on étudiera dans Pline les arts & l'eſprit des anciens, on y cherchera ces traits qui frappent l'ame d'un ſentiment triſte & profond; mais on lira M. de Buffon pour s'intéreſſer comme pour s'inſtruire; il continuera d'exciter pour les ſciences naturelles un enthouſiaſme utile, & les hommes lui devront long-temps & les doux plaiſirs

que procurent à une ame jeune encore les premiers regards jetés ſur la nature, & ces conſolations qu'éprouve une ame fatiguée des orages de la vie, en repoſant ſa vue ſur l'immenſité des êtres paiſiblement ſoumis à des loix éternelles & néceſſaires.



MÉMOIRES



MÉMOIRES
DE
MATHÉMATIQUE
ET
DE PHYSIQUE,
TIRÉS DES REGISTRES
de l'Académie Royale des Sciences.
Année M. DCC. LXXXVIII.

SUR L'ÉCLIPSE DU SOLEIL du 15 juin 1787.

Par M. LE MONNIER.

LA fin de cette éclipse n'a pu être obfervée à Paris à caufe des nuages, mais on a très-bien déterminé l'heure du commencement; favoir, à $4^h\ 27'\ 25''$, le difque du Soleil ayant

paru commencer à s'entamer dans la lunette du quart de cercle qui renverse ; ç'a été tant soit peu au-dessus de la ligne horizontale, passant par le centre du disque, savoir au nord-est. Ainsi le commencement s'est donc fait du côté de la partie occidentale, & 5^d ou environ moins haut que le centre du Soleil. Je n'ai pu observer la plus grande phase vers $5^h \frac{1}{4}$, le ciel s'étant couvert de nuages ; mais 32′ après le commencement de l'éclipse, savoir, à 4^h 59′ $\frac{1}{2}$ de temps vrai, la phase lumineuse étoit de 19′ 17″ $\frac{1}{2}$; d'où s'ensuit que la partie du Soleil éclipsé a dû être à cet instant de 12′ 19″ à 20″.

Si l'on veut déduire la longitude de la Lune de la premiere phase observée à 4^h 27′ 25″, il faut connoître, par les observations de la fin de juin & du commencement de juillet, l'erreur des Tables du Soleil qu'on auroit employées à cette recherche. J'y ai employé pareillement les observations d'*Arcturus* & du Soleil faites au 22 mai & au 21 juillet. Le bureau des longitudes se sert à Londres de Tables pour l'almanach de la Navigation, qui m'ont paru, le jour de l'éclipse, donner, lors du commencement, 2^s 24^d 21′ 37″ $\frac{1}{2}$; au lieu que les Tables publiées dans l'*Astronomie nautique lunaire*, indiquent 31″ de moins. Or, en négligeant les actions de Jupiter & de Vénus sur le mouvement de la Terre, celles-ci n'y sauroient produire 10″ d'erreur.

Quoi qu'il en soit, j'ai d'abord recherché l'angle parallactique au centre de la Lune pour l'instant où l'éclipse a dû commencer ; & employant les formules de M. Euler pour le sphéroïde, je trouve cet angle de 48^d 54′ 35″, l'ayant augmenté de 20′ 5″, à cause de l'aplatissement de la Terre supposé de $\frac{1}{200}$, lorsqu'on a publié les mêmes formules qui réduisent la parallaxe horizontale de 61′ 18″, à celle de hauteur 51′ 46″ $\frac{1}{5}$; par conséquent celles de longitude & de latitude à 39′ 01″ & 34′ 01″ $\frac{1}{2}$. Ainsi, d'après les Tables lunaires adoptées par le bureau des longitudes, le lieu de la Lune se trouve 49″ $\frac{1}{2}$ ou 42 $\frac{1}{2}$ plus avancé que selon l'observation; savoir, dans le premier cas, en adoptant la

latitude de ces mêmes Tables ; & dans le second cas, en supposant que l'éclipse a commencé 5^d au-dessous de la ligne horizontale passant par le centre du disque du Soleil.

Il est vrai que l'erreur paroît moins forte par l'observation de la fin de l'éclipse vue à Dijon : j'en ai fait le calcul en prenant d'abord pour différence en longitude géographique 0^h $10' 47''$, & l'heure de la fin observée à $6^h 12' 43''$. Or la latitude boréale de la Lune étant, suivant les Tables, de $52' 51''$, & l'angle parallactique dans le sphéroïde $47^d 6' 25''$, on auroit l'erreur des Tables en excès de $11'' \frac{2}{3}$. Quand les observateurs de Dijon nous indiqueront le point du limbe, à compter du zénith du disque solaire où s'est faite la séparation des deux disques, nous serons sans doute en état de mieux assigner l'erreur des Tables par l'heure qu'ils ont observée de la fin de l'éclipse.

Pour comparer la longitude de la Lune à celle du Soleil, & reconnoître enfin l'erreur des Tables lunaires, voici quelques observations du Soleil dont il a été parlé ci-dessus.

En 1787, le 22 mai, le centre du Soleil a passé au quart de cercle mural à $3^h 56' 48'' \frac{3}{4}$ ou $49''$ à la pendule qui avançoit par jour de $4'' \frac{1}{2}$ sur la révolution des étoiles fixes, ou bien de $4' 5'' \frac{1}{4}$ sur celle du Soleil ; & le soir à $14^h 06' 31'' \frac{2}{3}$, l'étoile *Arcturus* a passé au même parallèle.

Le 21 juillet de la même année à $8^h 01' 27'' \frac{3}{4}$ ou $28''$, le centre du Soleil a passé à la pendule qui n'avançoit que de $4''$ ou $3'' \frac{1}{2}$ par jour sur la révolution des fixes, & l'étoile *Arcturus* a passé sur le soir à $14^h 4' 54''$.

Avec ces seules données, il seroit déjà facile de découvrir l'erreur des Tables au moment de l'éclipse du Soleil observée ; mais il sera utile de rapporter pour la suite, les observations du passage du Soleil les 30 juin & 1er juillet par son aphélie.



NOUVELLES COMPARAISONS DES HAUTEURS SOLSTICIALES,

Faites au quart de cercle mobile, suivies de quelques autres dont la date est moins ancienne, & qui ont été faites soit au foyer d'un verre objectif de 80 pieds, soit au plus grand des quarts de cercle muraux.

Par M. LE MONNIER.

JE ne parlerai dans la premiere partie de ce Mémoire, que des observations faites aux approches ou bien au jour même du solstice d'été, me réservant à compléter dans la seconde partie, ce qui a déjà été publié pour le temps du solstice d'hiver dans nos volumes, ou en produisant l'extrait général que j'ai fait sur cet objet particulier, de mes registres.

L'état & la constitution des plus grands instrumens qu'on a soin de vérifier au zénith par des fils aplomb, lorsque la chose devient possible & praticable, n'est pas la seule considération que nous devions faire entrer dans l'examen des observations comparées après une cinquantaine d'années : le Solstice d'hiver demande d'ailleurs plus de détails que ceux qu'on représente pour le solstice d'été ; outre que la réfraction, souvent variable dans les moindres hauteurs du Soleil, exige plus de faits, selon que les automnes tempérées, ainsi que les vents du sud, se prolongent davantage pendant les mois de décembre en chaque année; & nous voyons souvent diminuer ces réfractions au défaut des vents opposés ou du nord-est, lorsque le Soleil commence à entrer dans le signe du Capricorne.

Je n'ai qu'un seul mot à dire ici pour l'observation du solstice d'été, faite au gnomon de Saint-Sulpice ; l'image

projetée ſur le marbre, au foyer du verre objectif, n'ayant pas raſé les traits qui y ſont gravés ; au lieu qu'elle les débordoit en 1764, & même qu'elle les eût débordés également d'un quart de ligne ou de 4″, ſi le 21 juin, jour de l'obſervation, le moment du ſolſtice eût concouru avec l'heure du midi.

L'effet de la nutation, le nœud de la Lune étant au 0^d du Bélier au 21 juin 1764, étoit de 9″, ſelon les obſervations d'Angleterre & ſelon les miennes, faites aux deux ſecteurs de Graham, 18 ans auparavant, où bien à la période précédente. Mais le 20 juin 1788, le nœud de la Lune étoit en $8^s\ 15^d$; en ſorte que l'effet de la nutation, après s'être anéanti vers le nord, a dû repaſſer au ſud d'environ $2''\ \frac{3}{4}$. Au reſte, il ne s'en falloit que d'une ſeconde que le Soleil n'eût atteint le tropique, puiſque le moment du ſolſtice n'a dû arriver qu'après que le Soleil a parcouru dans ſon orbite apparente $19'\ \frac{2}{3}$, ou dans le plan de l'écliptique. Or à Saint-Sulpice, le bord de l'image ſeptentrional, ou le plus près du pied du gnomon étoit $0^l\ \frac{1}{3}$, au-deſſous du trait, & ſon bord opposé ou méridional $0\ \frac{3}{4}$ ou $\frac{5}{6}$ de ligne plus éloigné que le trait gravé ſur le marbre; d'où il eſt aiſé d'en conclure la poſition apparente & actuelle de cette image du Soleil relativement à celle dont on trouve la figure gravée dans notre volume de 1762, là où l'on a inſéré ce qui a été vu deux ans après, ou, comme je l'ai dit, en 1764.

Je ne pourrai guère me diſpenſer de comparer cette obſervation à celle du ſolſtice d'hiver, pour en déduire les changemens arrivés, pendant ce court intervalle de temps, à l'obliquité de l'écliptique. Nous n'avons pas toujours la commodité de vérifier dans les grandes égliſes dont les portes ſont ouvertes, & où les courans d'air nuiſent à l'état naturel d'un fil vertical d'environ 75 pieds, la diſtance de l'image à l'égard de l'aplomb qui répond au zénith. Nous ſommes donc obligés de recourir aux obſervations du ſolſtice d'hiver, ou de la diſtance des tropiques ; ce qui n'eſt

pas un moindre avantage, puiſque le double de l'obliquité de l'écliptique entraîne avec ſoi le double de ſa variation.

Mais il ſeroit à déſirer, puiſque l'Obſervatoire royal eſt bientôt rétabli, qu'on y continuât les obſervations d'été & celles d'hiver à la méridienne tracée dans la grande ſalle, & dont l'Académie a ſupporté les grands frais en l'année 1732. Il n'y manque que d'y fixer pour le ſolſtice d'été un verre objectif de 30 à 40 pieds de foyer: celui-ci auroit l'avantage d'être vérifié à l'aide du fil aplomb, puiſqu'on peut clore exactement la grande ſalle, & y pratiquer auſſi long-temps qu'il eſt néceſſaire & à loiſir, toutes eſpèces de vérifications, principalement ſur les diviſions ſolſticiales; l'uſage aujourd'hui étant établi à tel point que nous appliquons avec ſuccès l'arc de Vernier ou de Nonius à nos baromètres portatifs & même aux pieds-de-roi, &c. Or les Sociétés littéraires ſont toujours dans le cas de s'examiner, & de reconnoître, ſuivant les circonſtances, ce qui leur doit paroître, au moins en phyſique, le plus avantageux.

Il y a plus, les faits les mieux établis décident, puiſque nous en avons tant de preuves, laquelle des opinions qu'on voit ſucceſſivement éclore dans les aſſemblées, doit à la fin prévaloir. Nous devons à cette maxime la connoiſſance de l'accourciſſement du pendule à meſure qu'on s'approche de l'équateur, celle de la dilatation des métaux relative à nos meſures géodéſiques, les dérangemens cauſés à l'orbite de la Terre par l'action des planètes, comme auſſi l'accroiſſement des degrés du méridien à meſure qu'on s'éloigne de l'équateur vers les pôles. Ainſi nous avons vu renaître pareillement, il y a 70 ans dans nos aſſemblées, une opinion ancienne déjà propoſée aux temps des califes de Bagdad, & enſuite au renouvellement des lettres, ſur-tout depuis Tycho, Kepler & Gaſſendi, touchant la diminution de l'obliquité de l'écliptique. L'hypothèſe de M. de Louville qui vouloit l'établir conſtamment décroiſſante, à raiſon d'une minute en 100 ans, n'a ceſſé d'être attaquée, depuis qu'on a reconnu que la diminution étoit plus lente, comme je l'ai

fait voir dix ans avant qu'il fût question du gnomon rétabli à Florence en 1757.

Au reste, nous sommes rassurés entièrement sur la stabilité que nos quarts de cercle mobiles gardent entr'eux par rapport au fil aplomb ; il n'y a que l'axe optique qui puisse changer dans leurs lunettes, par la destruction des fils placés au foyer des deux verres convexes : on y remédie autant qu'il est possible par des vérifications faites au zénith & à l'horizon ; & à midi *(a)* le plan du limbe est soigneusement placé sur la méridienne.

En 1738, mon quart de cercle mobile a donné la hauteur solsticiale de $64^d\ 54'\ 18''\frac{1}{2}$: la correction au zénith étoit $45''$ à $47''\frac{1}{2}$, & à l'horizon elle étoit $17''\frac{1}{2}$ plus grande. Réduisant au parallèle de l'Observatoire royal, on auroit $64^d\ 54'\ 13''\frac{1}{2}$ ou $16''$ seulement.

Le nœud ascendant de la Lune étoit alors en $4^s\ 23^d$, & la nutation calculée dans le cercle indiqueroit $7''\frac{1}{4}$ vers le sud, ou dont le Soleil auroit été trop abaissé lors de son passage au tropique du Cancer. En 1740, j'ai trouvé au même lieu le bord supérieur du Soleil plus élevé de $5''\frac{1}{2}$; mais la nutation calculée dans le cercle, n'étoit plus que de $2''\frac{1}{4}$ vers le sud.

En 1741, mon quart de cercle mobile, transporté avec précautions dans la tour occidentale de l'Observatoire royal, $48''\frac{1}{2}$ plus au sud, a donné la hauteur solsticiale du bord supérieur du Soleil, $64^d\ 55'\ 20''$ ou $22''\frac{1}{2}$ tout au plus ; mais corrigée comme les précédentes, à l'exception de la réduction qui convenoit à la différence en latitude, on aura $64^d\ 54'\ 30''$. J'ai soupçonné en juillet, après le solstice, que la correction à l'horizon, vu à un point connu à Charenton, auroit été $5''$ plus grande ; mais je n'ai tiré cette conjecture que par induction, n'ayant pas renversé le quart de cercle, faute d'un appareil convenable pour cette opération du renversement. Le nœud ascendant de la Lune

(a) Voyez nos Mémoires, *année 1721, &c.*

étoit alors 2ˢ 24 à 25 degrés; & l'effet de la nutation, qui avoit cessé vers le sud, avoit passé en sens contraire de près d'une seconde ou $0'' \frac{7}{8}$ vers le nord.

Je vais comparer présentement ces observations avec celles de l'année 1788. Mon quart de cercle mobile, vérifié au zénith & à l'horizon, donne actuellement la correction *additive* de $42'' \frac{1}{2}$ au zénith, & $17'' \frac{1}{2}$ plus petite à l'horizon, c'est-à-dire, que ce seroit 38″ à la hauteur du bord supérieur du Soleil au solstice d'été; en unmot, en admettant ce genre de correction proportionnel à l'arc total, comme je l'avois pratiqué en 1738. Or, j'ai trouvé, les 18, 19 & 23 juin, la hauteur du bord supérieur du Soleil réduite au parallèle de l'Observatoire royal, $64^d\ 54'\ 10'' \frac{1}{2}$ & 08″. Il est facile ainsi de comparer toutes ces valeurs de quelque maniere qu'y puissent intervenir les causes générales & physiques, autres que celles de la nutation de l'axe terrestre. Voyons si elles ont dû produire des différences qu'on est en état de remarquer, & auxquelles j'ai cru devoir m'en tenir.

Le nœud ascendant de la Lune est actuellement en 8ˢ $15^d \frac{1}{2}$, & la nutation $2'' \frac{1}{4}$ vers le sud; ce qui nous élève la hauteur solsticiale moyenne à $64^d\ 54'\ 12'' \frac{1}{2}$ ou 10″.

Celle de 1738 indiquoit la moyenne $64^d\ 54'$ 21 ou 23″, ainsi que celle de 1740; enfin celle de 1741 l'a indiquée de $64^d\ 54'\ 29''$ ou 24″ au moins.

Ainsi les mêmes divisions, y compris l'effet du curseur du micromètre appliqué à la lunette du quart de cercle, ont donné en 50 ans, sur un seul & unique instrument, $12'' \frac{1}{2}$ tout au plus, ou 10″ pour la diminution apparente de l'obliquité de l'écliptique: on trouveroit peut-être aussi postérieurement en 47 années $13'' \frac{1}{2}$ à 19″; mais j'ai donné tant de soins & d'attentions aux observations de l'année 1738, les jours qui ont précédé & qui ont suivi immédiatement le solstice d'été, que je me vois dans le cas de les préférer à toutes autres des diverses années qui ont suivi cette principale époque.

EXTRAIT

EXTRAIT DU REGISTRE DES OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES de l'année 1680,

Concernant quelques longitudes de la Lune obſervées, & relatives à l'écrit inſéré dans le volume de l'année 1787 de nos Mémoires.

Par M. LE MONNIER.

LES longitudes de la Lune qu'on va rapporter, doivent ſervir ici de ſupplément à ce qui a été dit *page 75 de l'Aſtronomie nautique lunaire,* ainſi qu'à diverſes fois pareillement dans nos derniers *Mémoires de l'Académie*, à l'occaſion des éclipſes du Soleil les plus récentes, comparées avec d'autres correſpondantes au ſiecle précédent.

Comme il a été queſtion dans nos aſſemblées, d'une trentaine d'obſervations de la longitude de la Lune obſervée ſous un méridien qu'on ſuppoſe 7,"6 de temps à l'oueſt de l'Obſervatoire royal, & qu'on vouloit les faire ſervir à reconnoître l'accélération du moyen mouvement de la Lune, je ne devois plus taire ici aſſurément les réflexions ſuivantes. Et d'abord s'il y a une demi-minute ou environ 25" entre les calculs des longitudes de la Lune qu'on a déjà imprimées aux *Éphémérides*, & celles que j'ai déduites de mes propres obſervations, en vain voudroit-on parvenir par cette voie à tirer les concluſions annoncées. En ſecond lieu, la queſtion ſe réduit à indiquer quels étoient d'abord les temps vrais ou les temps moyens des paſſages de la Lune par le méridien, & s'ils ont différé beaucoup de ceux que j'ai obſervés dans un lieu qui eſt 2",3 plus occidental que l'Obſervatoire royal. 3.° Il eſt néceſſaire de ſavoir ſi on a comparé les paſſages de la Lune à des étoiles dont la diſtance au zénith étoit à très-peu de choſe près la même,

& non pas à d'autres étoiles, ou plutôt au Soleil plus ou moins élevé que la Lune dans le méridien, & dont les paſſages doivent ainſi être aſſujettis à l'incertitude des erreurs du plan du quart-de-cercle mural.

J'inſiſtois donc d'abord ſur ces conſidérations eſſentielles, principalement à deſſein de parvenir à vérifier ſoigneuſement les obſervations qu'on nous avoit préſentées. Dans le manuſcrit préſenté aux Commiſſaires de l'Académie, on indiquoit en effet que le paſſage de la Lune avoit été comparé à celui des étoiles plus ou moins hautes : le même cas s'appliquoit auſſi aux paſſages obſervés de la Lune & du Soleil à diſtances fort inégales du zénith. Par exemple, le 14 janvier, j'ai comparé le paſſage du premier bord de la Lune à l'étoile υ du lien des Poiſſons, qui paroiſſoit à peine $0^d \frac{3}{4}$ plus éloignée du zénith, tandis que dans l'autre Obſervatoire on étoit en droit d'y requérir les erreurs du plan du quart-de-cercle mural, lors des paſſages du premier bord de la Lune & de l'étoile α du Bélier, plus éloignée du zénith de $4^d \frac{1}{2}$ que le centre de la Lune.

Pour décider ici de la vraie longitude de la Lune obſervée lors de chacune des ſix obſervations comparées & priſes au haſard dans les trois ou quatre ſaiſons de l'année 1780, je vais rapporter ci-deſſous les longitudes déduites de mes propres obſervations, ſauf à y comparer, ſi le cas l'exige, un bien plus grand nombre de paſſages de la Lune au méridien, aux occultations d'étoiles vues au ſiècle précédent. Je pourrois même faire un relevé ou triage parmi une cinquantaine d'obſervations que je trouve ſur mon regiſtre de cette année, en choiſiſſant celles qui ont été vues uniquement au même parallèle de quelques étoiles.

Voyez les Ephémérides, pages xcix, & c.

1780, 14 janv.	à $5^h 42' 13'' \frac{1}{2}$	de temps vrai ☾ longit.	♈ $23^d 00' 00''$
11 mars,	3. 52. 09 $\frac{3}{4}$	....	♉ 23. 01. 30
27 juin,	20. 22. 37 $\frac{1}{2}$	....	♉ 15. 22. 54
7 juil.	4. 53. 33 $\frac{1}{2}$	....	♍ 29. 22. 02
		ou bien	29. 21. 49
4 ſept.	4. 53. 36 $\frac{1}{2}$	....	♐ 0. 14. 40
13	12. 15. 48 $\frac{1}{2}$	....	♓ 24. 02. 12 $\frac{1}{2}$

Dans l'obſervation du 4 ſeptembre, j'ai eu égard à la parallaxe de la Lune en aſcenſion droite, laquelle a dû s'accroître à 3″ ¼ de degré vers l'orient, à cauſe de la déviation du plan du quart-de-cercle mural aux environs du tropique (qui répond au ſolſtice d'hiver), & qui m'étoit connue à l'aide des hauteurs correſpondantes du Soleil, vérifiées pluſieurs fois en ces temps-là. Mais pour plus grande certitude dans une autre cas, à l'occaſion de la recherche de la longitude de la Lune, lorſqu'elle a été obſervée le 13 ſeptembre, il m'a fallu comparer l'étoile qui eſt la ſeconde des auſtrales du quadrilatère ſous les Poiſſons, avec la ſeconde des étoiles boréales. Or, je n'ai pas trouvé, en pareil cas, une demi-ſeconde de différence d'avec une autre comparaiſon qui avoit été faite des mêmes étoiles en janvier, ainſi qu'aux années précédentes. C'eſt ce qui m'a rendu plus déciſif ſur l'exactitude des paſſages de la Lune & de la plus élevée des deux étoiles. D'un autre côté, l'autre étoile, c'eſt-à-dire, la ſeconde des auſtrales du quadrilatère, & qui paſſoit à même hauteur que la Lune, avoit ſuivi le paſſage du ſecond bord au fil vertical de la lunette, de $0^h\ 8'\ 42''\ \frac{3}{4}$, qui valent $2^d\ 10'\ 40''$, toutes réductions faites relativement à la marche de la pendule. J'en ai donc déduit l'aſcenſion droite du centre, $356^d\ 06'\ 12''$; ſavoir, en ſuppoſant l'aſcenſion droite apparente de l'étoile, tirée de mes catalogues, de $358^d\ 31'\ 43''$. J'avois auſſi établi la déclinaiſon vraie, à l'aide des diſtances au zénith obſervées, de $5^d\ 59'\ 59''\ \frac{1}{2}$, en diminuant la parallaxe de hauteur, d'après celle qui eſt horizontale, adoptée de $54'\ 52''$, de $9''\ \frac{1}{2}$. Cette correction ſouſtractive eſt déduite des formules de M. Euler. On tire de-là pour l'inſtant du paſſage du ſecond bord de la Lune à $12^h\ 11'\ 8''$ de temps moyen, la longitude de ſon centre ♓ $24^d\ 02'\ 12''\frac{1}{2}$, avec une latitude auſtrale de $3^d\ 57'\ 12''\ \frac{1}{2}$.

Il y a auſſi quelques différences ſenſibles dans les paſſages obſervés le 28 juin au matin, puiſque le ſecond bord de la Lune a dû paſſer au vrai méridien à $8^h\ 22'\ 37''\ \frac{1}{2}$, moins

$3''\frac{1}{2}$ à $3''$ pour la déviation du mural à $33^d\frac{1}{2}$ du zénith, & réduiſant à l'Obſervatoire royal, on auroit le 27 juin à $20^h\ 22'\ 39'',8$ de temps vrai. L'Almanach donne $2'\ 48'',7$ pour l'équation du temps; d'où s'enſuit que le temps moyen ſeroit $20^h\ 25'\ 28''\frac{1}{2}$, & non pas $20^h\ 25'\ 34''$, comme il eſt énoncé aux Éphémérides.



MÉMOIRE

Où l'on expose une méthode analytique, pour résoudre les problèmes relatifs à la structure des Cristaux.

Par M. l'abbé HAÜY.

DANS les différentes recherches que j'ai faites jusqu'ici, pour appliquer la loi des décroissemens à la structure des cristaux, je me suis borné à employer des méthodes particulières, qui n'avoient entr'elles d'autre relation que celle qu'elles empruntoient de l'unité même de la théorie qu'elles m'ont servi à développer. Mais je crois avoir maintenant obtenu un assez grand nombre de résultats, pour essayer de traiter ce sujet par une méthode générale, qui embrasse l'ensemble de toutes les combinaisons dont il est susceptible. C'est ce que je me propose de faire dans ce Mémoire, en établissant un petit nombre de formules d'où l'on puisse déduire, comme autant de corollaires, non-seulement les différens cas déjà donnés par l'observation, mais même ceux qui ne seroient encore qu'hypothétiques. Cette extension me paroît offrir un point de vue d'autant plus intéressant, que le nombre des formes connues augmente de jour en jour, & que plus d'une fois j'ai éprouvé que des résultats que j'avois d'abord conclus de la théorie comme étant de pure curiosité, se trouvoient ensuite réalisés, d'après de nouvelles observations, par le travail de la Nature.

L'examen que j'ai fait de la structure d'une multitude de cristaux pierreux, salins & métalliques, doit faire présumer avec beaucoup de vraisemblance, que toutes les formes cristallines primitives se réduisent à un petit nombre de polyhèdres très-simples, parmi lesquels se trouve le rhomboïde. Je ne traiterai ici que de la théorie de cette

dernière forme, qui eſt de beaucoup la plus féconde en applications.

1. Il ne faut qu'un ſeul décroiſſement, ſoit ſur les bords, ſoit ſur les angles des lames du rhomboïde primitif, pour déterminer une forme ſecondaire qui maſque entièrement le noyau, pourvu que ce décroiſſement ſe faſſe d'une manière ſemblable ſur toutes les parties analogues du noyau.

2. Ce décroiſſement produira toujours ou un nouveau rhomboïde, ou un dodécahèdre à faces triangulaires, ainſi que nous le verrons bientôt.

3. Soit *abdf (fig. 1)* une des faces du noyau; il y a ſix eſpèces de décroiſſemens poſſibles, qui donneront des formes ſecondaires; ſavoir :

Un décroiſſement ſur les bords *a b*, *a f*.
Un ſecond ſur l'angle *a*.
Un troiſième ſur les bords *b d*, *d f*.
Un quatrième ſur les angles *b*, *f*.

Dans ces divers décroiſſemens, les lames de ſuperpoſition ne peuvent avoir que la hauteur d'une molécule; ſi l'on ſuppoſoit deux hauteurs ou davantage, on auroit des angles rentrans, ce qui paroît contraire aux loix de la criſtalliſation régulière.

Quant aux décroiſſemens ſur l'angle *d*, ils peuvent ſe faire, ſoit en allant de *d* vers *a*, auquel cas chaque lame n'aura que l'épaiſſeur d'une molécule, ſoit en hauteur, & de manière que les épaiſſeurs des lames ſoient égales à deux épaiſſeurs d'une molécule ou à un plus grand nombre, ce qui donne deux nouveaux décroiſſemens ajoutés aux quatre précédens.

4. J'appellerai formes ſecondaires ſimples, celles qui réſultent de l'un des décroiſſemens dont je viens de parler; & formes ſecondaires compoſées, celles qui réſultent de pluſieurs de ces décroiſſemens combinés entr'eux.

5. La diagonale *ad*, qui aboutit au ſommet *a* du criſtal,

portera le nom de *diagonale oblique ;* & l'autre diagonale bf, celui de *diagonale horizontale.*

I. *Des formes ſecondaires ſimples.*

6. Soit $adfg$ *(fig. 2)* un quadrilatère formé par deux diagonales obliques oppoſées ad, gf du rhomboïde primitif, & par les arêtes ag, df, compriſes entre ces diagonales. Exprimons d'abord algébriquement les différentes lignes principales que l'on peut conſidérer dans le rhomboïde. Soit *(fig. 1)* $bc = g$. $ac = p$. Soit *(fig. 2)* l'axe $af = a$. Ayant mené dr perpendiculaire ſur l'axe, nous aurons

$$\sqrt{(3)} : 2 : g : dr = \sqrt{(\tfrac{4}{3}g^2)} \,.\, ar = \sqrt{(ad^2 - dr^2)}$$

$$= \sqrt{(4p^2 - \tfrac{4}{3}g^2)} = \sqrt{\left(\frac{12p^2 - 4g^2}{3}\right)}.$$

Donc af ou $a = \frac{3}{2}\, ar = \sqrt{(9p^2 - 3g^2)}$; donc de ces trois quantités, l'axe, la diagonale oblique & la diagonale horizontale, deux étant connues, il eſt facile d'avoir la troiſième. Les expreſſions de ces trois quantités ſeront, d'après la formule précédente,

$$a = \sqrt{(9p^2 - 3g^2)};\; p = \tfrac{1}{3}\sqrt{(a^2 + 3g^2)},$$

$$\& \; g = \sqrt{\left(\frac{9p^2 - a^2}{3}\right)}.$$

7. Concevons maintenant des décroiſſemens ſur les arêtes ab, af *(fig. 1)*. Ces décroiſſemens donneront en général des dodécahèdres, dont une des arêtes coïncidera avec l'arête fd *(fig. 2)* du rhomboïde primitif, & dont l'axe ſera le même que celui de ce rhomboïde. Soit am une des arêtes ſupérieures, & fm l'arête inférieure correſpondante. Soit azt le triangle menſurateur, que nous pouvons conſidérer comme ſi les décroiſſemens ſe faiſoient ſur l'angle a, en obſervant qu'à une rangée de ſouſtraite ſur les bords ab, af *(fig. 1)*, répond toujours une diagonale oblique qui meſure la différence d'une lame à l'autre.

Cela posé, nous aurons, en nommant n le nombre des diagonales soustraites,

$az : tz :: 2np : ds :: 2np : \sqrt{(p^2 + g^2)} :: ad$ ou $2p : dm$;
d'où l'on tire

$$dm = \frac{1}{n}\sqrt{(p^2 + g^2)}.$$

$$sm = ds + dm = \sqrt{(p^2 + g^2)} + \frac{1}{n}\sqrt{(p^2 + g^2)}$$
$$= \frac{n+1}{n}\sqrt{(p^2 + g^2)}.$$

$ds : sm :: dr : mu$; ou $\sqrt{(p^2 + g^2)} : \frac{n+1}{n}\sqrt{(p^2 + g^2)}$
$$:: \sqrt{(\tfrac{4}{3} g^2)} : mu = \frac{n+1}{n}\sqrt{(\tfrac{4}{3} g^2)}.$$

$ds : rs :: sm : su$; ou $\sqrt{(p^2 + g^2)} : \frac{1}{3}\sqrt{(9p^2 - 3g^2)}$
$$:: \frac{n+1}{n}\sqrt{(p^2 + g^2)} : su = \frac{n+1}{3n}\sqrt{(9p^2 - 3g^2)}.$$

$$au = a - su = \sqrt{(9p^2 - 3g^2)}$$
$$-\left(\frac{n+1}{3n}\right)\sqrt{(9p^2 - 3g^2)} = \frac{2n-1}{3n}\sqrt{(9p^2 - 3g^2)}.$$

$$am = \sqrt{(au^2 + mu^2)}$$
$$= \sqrt{\left[\left(\frac{2n-1}{3n}\right)^2 (9p^2 - 3g^2) + \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \tfrac{4}{3} g^2\right]}$$
$$= \frac{n+1}{n}\sqrt{\left[\left(\frac{2n-1}{3n+3}\right)^2 (9p^2 - 3g^2) + \tfrac{4}{3} g^2\right]}.$$

Connoissant am, il est facile de trouver tout le reste.

8. Cherchons maintenant s'il y a un cas où le dodécahèdre auroit ses triangles adjacens deux à deux sur le même plan, de manière qu'il deviendroit un nouveau rhomboïde circonscrit à la forme primitive, mais plus obtus. Dans ce cas, il faudra que au soit le tiers de l'axe, puisque am sera l'arête du rhomboïde, On aura donc,

$$\frac{2n-1}{3n}\sqrt{(9p^2 - 3g^2)} = \frac{1}{3}\sqrt{(9p^2 - 3g^2)}$$

ou $\frac{2n-1}{3n} = \frac{1}{3}$, d'où l'on tire $n = 1$, ce qui signifie que

que le dodécahèdre devient un rhomboïde, lorſque les décroiſſemens ſe font par une rangée ſur les bords ab, af (*fig. 1*). C'eſt le cas du ſpath calcaire lenticulaire, & du ſchorl des granits.

9. Voyons s'il eſt poſſible que le dodécahèdre ait tous ſes triangles iſocèles. Dans ce cas on aura,

$$\frac{2n-1}{3n}\sqrt{(9p^2-3g^2)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(9p^2-3g^2)},$$

puiſque $am = fm$; donc $\frac{2n-1}{3n} = \frac{1}{2}$, d'où l'on tire, $n = 2$. Je n'ai point encore obſervé ce cas dans la Nature.

10. Concevons maintenant des décroiſſemens ſur l'angle a; ſoient ao, fo, deux arêtes contiguës. Dans ce cas, on aura toujours des rhomboïdes, d'où il ſuit que ao étant la diagonale oblique, & of l'arête contiguë à cette diagonale, la perpendiculaire or menée ſur l'axe, le rencontrera toujours de manière que l'on ait $fr = \frac{1}{3}af$. Cela poſé, cherchons ao. Nous avons $au : ar :: am : ao$, de plus, $au : ar :: \frac{2n-1}{3n} : \frac{2}{3} :: \frac{2n-1}{n} : 2 :: 1 : \frac{2n}{2n-1}$; donc ayant déjà am (7), il ne s'agit, pour avoir ao, que de multiplier le facteur commun $\frac{n+1}{n}$ de la quantité am, par $\frac{2n}{2n-1}$, ce qui donne

$$ao = \frac{2n+2}{2n-1}\sqrt{\left[\left(\frac{2n-1}{3n+3}\right)^2(9p^2-3g^2)+\tfrac{4}{3}g^2\right]}.$$

11. Cherchons ſi parmi tous les rhomboïdes renfermés dans ce cas, il y en auroit un qui fût parfaitement égal & ſemblable au rhomboïde cité *n.° 8*. Alors il faudra que l'inclinaiſon de ao ſur l'axe af ſoit égale à celle de fm, qui ſe confond avec la diagonale oblique du rhomboïde *n.° 8*; donc $am = fm$, & $au = fu = \frac{1}{2}af$. Or (7), $fu = \frac{n+1}{3n}\sqrt{(9p^2-3g^2)}$ & $\frac{1}{2}af$

$= \frac{1}{2} \sqrt{(9p^2 - 3g^2)}$; il faudra donc que l'on ait $\frac{n+1}{3n} = \frac{1}{2}$, ce qui donne $n = 2$. Donc la forme cherchée a lieu dans le cas où les décroissemens sur l'angle a se font par quatre rangées de molécules. Ce cas se trouve réalisé par quelques-unes des faces du schorl dodécahèdre à dix plans trapésoïdaux, & deux plans rhomboïdaux.

12. Si l'on fait $n = \frac{1}{2}$, ce qui est le cas d'un décroissement par une simple rangée de molécules, on trouve $ao = \frac{3}{0} \sqrt{(0 + \frac{4}{3} g^2)}$, qui exprime une quantité infinie; c'est-à-dire, qu'alors la diagonale oblique est infinie, & par conséquent la face sur laquelle elle tombe est horizontale. Ce cas a lieu dans le spath calcaire en prisme exahèdre. Alors il se fait un second décroissement, d'où résultent des faces latérales qui terminent la face supérieure.

13. Concevons que le noyau soit un cube, & faisons $p = 1$, $g = 1$, $n = 1$; on aura $ao = 2\sqrt{(6)}$. L'axe $a = \sqrt{(9p^2 - 3g^2)} = \sqrt{(6)}$. Soit p' la moitié de la diagonale oblique du nouveau rhomboïde, g' la moitié de la diagonale horizontale; on aura $(6) g' = \sqrt{(\frac{9p'^2 - a^2}{3})}$ $= \sqrt{(16)}$; donc $g' : p' :: \sqrt{(16)} : \sqrt{(6)} :: 4 : \sqrt{(6)}$, ce qui est le cas du fer lenticulaire.

14. Passons aux décroissemens qui se font sur les arêtes bd, fd (*fig. 1*). Ces décroissemens donneront toujours des dodécahèdres à faces triangulaires scalènes, dont un des côtés se confondra avec l'une des arêtes bd, fd. Soient dp, du (*fig. 3*), deux arêtes contiguës; prolongeons ag jusqu'à la rencontre de dp; soit dho le triangle mensurateur; nous aurons $dh = 2np$, & $oh = \sqrt{(p^2 + g^2)}$. Or, $dh : oh :: ad : al$; ou, $2np : \sqrt{(p^2 + g^2)} :: 2p : al$ $= \frac{1}{n} \sqrt{(p^2 + g^2)}$. $ap : al :: pf = ap + af : df$, ou $ap : \frac{1}{n} \sqrt{(p^2 + g^2)} :: ap + \sqrt{(9p^2 - 3g^2)}$:

$: \sqrt{(p^2 + g^2)}$; d'où l'on tire $ap = \frac{1}{n-1}\sqrt{(9p^2 - 3g^2)}$,
$pr = ap + \frac{2}{3}\ as = \frac{1}{n-1}\sqrt{(9p^2 - 3g^2)}$
$+ \frac{2}{3}\sqrt{(9p^2 - 3g^2)} = \frac{2n+1}{3n-3}\sqrt{(9p^2 - 3g^2)}$
$dp = \sqrt{(pr^2 + dr^2)} = \sqrt{[(\frac{2n+1}{3n-3})^2(9p^2 - 3g^2)}$
$+ \frac{4}{3}g^2.]$ Cette formule ne diffère de celle qui exprime am (*n.*° 7), qu'en ce que le facteur commun $\frac{n+1}{n}$ est supprimé, & que les seconds termes des numérateurs & dénominateurs de la fraction sous le signe radical, ont leurs signes changés.

15. Si l'on fait $n = 1$, on trouve $dp = \sqrt{[\frac{9}{0}(9p^2 - 3g^2)} + \frac{4}{3}g^2]$, ce qui indique qu'alors l'axe $\sqrt{(9p^2 - 3g^2)}$ devient une quantité infinie, & que par conséquent la face produite est verticale. Ce cas a lieu dans le spath adamantin.

16. Cherchons aussi du. Nous avons $ur = su + rs$
$= ap + \frac{1}{3}\ as = \frac{1}{n-1}\sqrt{(9p^2 - 3g^2)}$
$+ \frac{1}{3}\sqrt{(9p^2 - 3g^2)} = \frac{n+2}{3n-3}\sqrt{(9p^2 - g^2)}$
$.\ dr = \sqrt{(\frac{4}{3}g^2)}$; ce qui donne $du = \sqrt{(ur^2} + dr^2) = \sqrt{[(\frac{n+2}{3n-3})^2(9p^2 - 3g^2) + \frac{4}{3}g^2]}$.

17. Si dans l'expression $ap = \frac{1}{n-1}\sqrt{(9p^2 - 3g^2)}$, on fait $n = 2$, on trouve $ap = \sqrt{(9p^2 - 3g^2)} = as$; ce qui fait connoître que quand les décroissemens se font par deux rangées, la partie ap qui excède l'axe du noyau, est toujours égale à cet axe; le spath calcaire à douze faces triangulaires scalènes, rentre dans ce cas général.

18. Dans la même hypothèse, & en supposant de plus

que l'on ait $p^2 = 2$, $g^2 = 3$, comme dans le ſpath calcaire, on trouve $dp = \sqrt{(29)}$, $du = \sqrt{(20)} = 2\sqrt{(5)}$; d'ailleurs $df = \sqrt{(5)}$; donc dans chaque triangle ſcalène le moyen côté eſt double du petit.

Soit $abdf$ (*fig. 1*) le rhombe du noyau; ayant mené by par le milieu de af, on aura

$$ba = \sqrt{(5)},\ ay = \tfrac{1}{2}\sqrt{(5)},\ by = \sqrt{(bm^2 + my^2)}$$
$$= \sqrt{[(\tfrac{3}{4}bf)^2 + (\tfrac{1}{2}ac)^2]} = \sqrt{(\tfrac{9}{16}\cdot 12 + \tfrac{1}{4}\cdot 2)}$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{(29)};$$

c'eſt-à-dire, que le triangle bay eſt ſemblable à l'une quelconque des faces du dodécahèdre, & qu'il a ſes côtés ſous-doubles de ceux des mêmes faces; on voit de plus que le grand angle des faces du dodécahèdre eſt égal à celui du rhombe primitif. Ce cas eſt particulier au ſpath calcaire.

19. Imaginons maintenant des décroiſſemens ſur l'angle d, en allant de d vers a, c'eſt-à-dire, en ſuppoſant que chaque lame n'ait que l'épaiſſeur d'une molécule; dans ce cas, toutes les formes ſecondaires ſeront des rhomboïdes.

Soit doh (*fig. 4*) le triangle menſurateur, on aura $dh = 2pn$, & $oh = \sqrt{(p^2 + g^2)}$; ſoit al le prolongement de de ag; $dh : oh :: ad : al$, ou

$$2np : \sqrt{(p^2 + g^2)} :: 2p : al = \frac{1}{n}\sqrt{(p^2 + g^2)}.$$

De plus, $ap : al :: pf = ap + af : df$, ou

$$ap : \frac{1}{n}\sqrt{(g^2 + p^2)} :: ap + \sqrt{(9p^2 - 3g^2)} : \sqrt{(g^2 + p^2)},$$

ce qui donne $ap = \frac{1}{n-1}\sqrt{(9p^2 - 3g^2)}$.

Soit cp la moitié de la diagonale oblique du nouveau rhomboïde, pz ſera le tiers de l'axe; donc

$$pz = \tfrac{1}{3}(2ap + af) = \tfrac{2}{3}ap + \tfrac{1}{3}af$$
$$= \frac{2}{3n-3}\sqrt{(9p^2 - 3g^2)} + \tfrac{1}{3}\sqrt{(9p^2 - 3g^2)}$$

$$= \frac{n+1}{3n-3} \sqrt{(9p^2 - 3g^2)}. \text{ \&}$$

$$pr = ap = \tfrac{2}{3} as = \left(\frac{1}{n-1} + \tfrac{2}{3}\right) \sqrt{(9p^2 - 3g^2)}$$

$$= \frac{2n+1}{3n-3} \sqrt{(9p^2 - 3g^2)}.$$

$$cp = \sqrt{(pz^2 + cz^2)}$$

$$= \sqrt{\left[\left(\frac{n+1}{3n-3}\right)^2 (9p^2 - 3g^2) + \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^2 \tfrac{4}{3} g^2\right]}$$

$$= \frac{n+1}{2n+1} \sqrt{\left[\left(\frac{2n+1}{3n-3}\right)^2 (9p^2 - 3g^2) + \tfrac{4}{3} g^2\right]}.$$

20. Si l'on fait $n = 1$, on trouve

$$cp = \tfrac{2}{3} \sqrt{\left[\left(\tfrac{3}{0}\right)^2 (9p^2 - 3g^2) + \tfrac{4}{3} g^2\right]};$$

ce qui indique qu'alors l'axe eſt infini, & que par conſéquent la face produite eſt verticale. Ce cas a lieu dans le ſpath calcaire en priſme exahèdre, où les faces des ſommets ſont données par un nouveau décroiſſement. Nous avons vu (15) que le même priſme pouvoit être produit & l'étoit réellement dans le ſpath adamantin, en vertu d'un décroiſſement ſur les arêtes *bd*, *df* (*fig. 1*), ce qui fait deux formes identiques avec différentes ſtructures.

21. Si l'on fait $n = \frac{3}{2}$, & de plus $g^2 = 3$, $p^2 = 2$, comme dans le ſpath calcaire, on trouve $cp = \frac{5}{4} \sqrt{(17)}$. De plus, $ap = 2\sqrt{(9)} = 6$. Appliquant ici la formule $g = \sqrt{\left(\frac{2p^2 - a^2}{3}\right)}$, & faiſant $a = 15$, $p = \frac{5}{4}\sqrt{(17)}$, on trouve, $g = \frac{5}{4}\sqrt{(3)}$; c'eſt-à-dire, que dans le rhomboïde dont il s'agit, la diagonale horizontale eſt à l'oblique, comme $\sqrt{(17)} : \sqrt{(3)}$, ce qui donne 134^d 25′ 24″ pour le grand angle du rhombe. J'ai obſervé récemment une variété du ſpath calcaire qui préſente ce réſultat.

22. Suppoſons encore des décroiſſemens ſur l'angle *d* (*fig. 1*), mais en hauteur, & de manière que les lames de ſuperpoſition ayent une épaiſſeur double ou triple, ou &c. de celle des molécules. Soit *mdh* (*fig. 5*) le triangle menſurateur, on aura, $dh = p$, $hm = n\sqrt{(g^2 + p^2)}$.

$dh : hm :: al : ag$; ou, $p : n\sqrt{(g^2 + p^2)} :: al : \sqrt{(p^2 + g^2)}$. Donc $al = \frac{p}{n}$. de plus $ap : ap + af :: al : fg$; ou, $ap : ap + \sqrt{(9p^2 - 3g^2)} :: \frac{p}{n} : 2p$; donc $ap = \frac{1}{2n-1}\sqrt{(9p^2 - 3g^2)}$.

Soit cu la moitié de la diagonale du nouveau rhomboïde, uz sera le $\frac{1}{3}$ de l'axe. Donc $uz = \frac{1}{3}(2ap + af)$ $= \frac{1}{3}(\frac{2}{2n-1})(\sqrt{9p^2 - 3g^2}) + \frac{1}{3}\sqrt{(9p^2 - 3g^2)}$ $= \frac{2n+1}{6n-3}\sqrt{(9p^2 - 3g^2)}$; & $ur = ap + \frac{1}{3}a$ $= \frac{2n+2}{6n-3}\sqrt{(9p^2 - 3g^2)}$. $ur : dr :: uz : cz$; ou, $\frac{2n+2}{6n-3} : \sqrt{(\frac{4g^2}{3})} :: \frac{2n+1}{6n-3} : cz$ $= \frac{2n+1}{2n+2}\sqrt{(\frac{4g^2}{3})}$; $cu = \sqrt{(uz^2 + cz^2)}$ $= \sqrt{[(\frac{n+1}{6n-3})^2(9p^2 - 3g^2) + (\frac{2n+1}{2n+2})^2\frac{4g^2}{3}]}$ $= \frac{2n+1}{2n+2}\sqrt{[(\frac{2n+2}{6n-3})^2(9p^2 - 3g^2) + \frac{4}{3}g^2]}$.

23. On auroit pu aussi déduire immédiatement cette formule de celle du *n.° 19*, qui donne la valeur de cp, (*fig. 4*) ; car en supposant (*fig. 5*) un nouveau triangle mensurateur dty, dans lequel ty seroit égale à une seule arête de molécule, on voit que si hm égale deux hauteurs, dt doit égaler $\frac{1}{4}$ de diagonale. Si hm égale trois hauteurs, dt sera $\frac{1}{6}$ de diagonale. Donc si l'on représente par n le nombre des diagonales soustraites, comme dans le cas du *n.° 19*, il faudra substituer en général $\frac{1}{2n}$ à la place de n, dans la formule de ce *n.°*, ce qui donne cp $= \frac{2n+1}{2n+2}\sqrt{[(\frac{2n+2}{3-6n})^2(9p^2 - 3g^2) + \frac{4}{3}g^2]}$, expression qui ne diffère de celle du *n.° 22*, qu'en ce

qu'au dénominateur de la fraction, sous le signe, on voit $3 - 6n$, au lieu de $6n - 3$; mais les carrés de ces quantités sont évidemment égaux; le changement de signe indique seulement ici que la diagonale oblique qui, dans la *figure 4*, s'inclinoit vers le haut de l'axe, se renverse dans la *figure 5*, & s'incline vers la partie inférieure de l'axe.

24. Voyons maintenant s'il ne seroit pas possible que, dans le cas dont il s'agit, le rhomboïde produit par quelque décroissement régulier, fût parfaitement semblable à la forme primitive. Alors il est clair que les triangles uop, sda, seront semblables, & il en faut dire autant des triangles rectangles sdr, pox; donc, $dr : ox = 2cz :: sr : px = uz$. ou, $\sqrt{(\frac{4}{3}g^2)} : \frac{4n+2}{2n+2}\sqrt{(\frac{4}{3}g^2)} :: \frac{1}{3}\sqrt{(9p^2 - 3g^2)} : \frac{2n+1}{6n-3}\sqrt{(9p^2 - 3g^2)}$. ou, $1 : \frac{2n+1}{n+1} :: \frac{1}{3} : \frac{2n+1}{6n-3}$. Multipliant les extrêmes & les moyens l'un par l'autre, égalant les deux produits, puis réduisant, on trouve $n = 2$; donc le cas est possible par un décroissement de deux rangées en hauteur.

Dans ce même cas on aura, $ap = \frac{1}{2n-1}\sqrt{(9p^2 - 3g^2)} = \frac{1}{3}\sqrt{(9p^2 - 3g^2)}$, c'est-à-dire, que l'axe du rhomboïde secondaire seroit à celui du noyau comme $\frac{5}{3} : 1$, ou comme $5 : 3$.

Ayant mené pe, parallèle à ad, il est clair que le rhomboïde secondaire sera divisible à l'aide d'un plan qui passeroit par pe. De plus, le triangle epu sera semblable au triangle pgs: or, à cause de $an = ap$, & de $sn = 2an$, le point n de la perpendiculaire gn tombe au milieu de la ligne ps; donc le triangle pgs est isocèle; donc l'angle $eps = gps$, d'où il est facile de conclure que si l'on fait sur les six arêtes du rhomboïde, des sections

ſemblables à celle qui paſſeroit par *p e*, ces ſections combinées avec les parties qui reſteront des faces du rhomboïde, formeront un dodécaèdre qui aura tous ſes triangles iſocèles & égaux. Ce cas ſeroit celui du criſtal de roche à deux pyramides ſans priſme intermédiaire, ſi tous les petits dodécaèdres qui le compoſent devenoient, par la ſuppreſſion des vides diſſéminés entr'eux, autant de rhomboïdes ſemblables à celui que l'on extrait par les ſections les plus ordinaires. *(Voyez les Memoires de l'Académie, année 1786, page 78).*

25. Venons aux décroiſſemens ſur les angles *b*, *f*, *(fig. 1)*. Il eſt facile de voir que ces décroiſſemens donneront des dodécaèdres, dans leſquels l'arête qui répondra à la petite diagonale du noyau ſera parallèle à cette diagonale. Soit *t l* *(fig. 6)* un de ces dodécaèdres, & *t o* l'arête mentionnée; ſoit *b* le point de l'arête *t p*, qui ſe confond avec l'angle ſolide latéral du noyau; ſoit *b c* la diagonale horizontale du même noyau. Ayant prolongé *t o*, menons *b e* perpendiculaire ſur cette ligne, & joignons les points *c*, *e*, par une droite. Soit *b m n* le triangle menſurateur; nous aurons, $bn = 2\,ng$, $mn = ai$ *(fig. 2)*. Or $gn \times af = ai \times fg$; ou, $\sqrt{(\frac{4}{3}g^2)} \times \sqrt{(9p^2 - 3g^2)} = ai \times 2p$; donc,

$$ai = \sqrt{\left(\frac{3g^2p^2 - g^4}{p^2}\right)}.\quad bn : mn :: bc : ce.\ \text{ou}$$

$$2gn : \sqrt{\left(\frac{3p^2g^2 - g^4}{p^2}\right)} :: g : ce = \frac{1}{2n}\sqrt{\left(\frac{3p^2g^2 - g^4}{p^2}\right)}.$$

Soit maintenant *a d f g* *(fig. 7)* le même quadrilatère que *figure 2*; ſoit *t o* la même ligne que *figure 6*; du milieu *c* de *a d*, menons la perpendiculaire *c e*, qui ſera égale à la même ligne *(figure 6)*; du point *a* menons *a x*, parallèle à *c e*; menons auſſi *f k* perpendiculaire ſur *a d*; nous aurons $at : ax = ce :: af : fk$. Or fk

$= ai$ *(fig. 2)*; donc, $at : \frac{1}{2n}\sqrt{\left(\frac{3p^2g^2 - g^4}{p^2}\right)}$

$:: \sqrt{(9p^2 - 3g^2)} : \sqrt{\left(\frac{3p^2g^2 - g^4}{p^2}\right)}$. Donc $at = \frac{1}{2n}\sqrt{(9p^2 - 3g^2)}$. Donc $ti = af + 2at = \sqrt{(9p^2 - 3g^2)} + \frac{1}{n}\sqrt{(9p^2 - 3g^2)} = \frac{n+1}{n}\sqrt{(9p^2 - 3g^2)}$. $ai = af + at = \frac{2n+1}{2n}\sqrt{(9p^2 - 3g^2)}$; $ir = if + rf = at + rf = \frac{1}{2n}\sqrt{(9p^2 - 3g^2)} + \frac{1}{3}\sqrt{(9p^2 - 3g^2)} = \frac{2n+3}{6n}\sqrt{(9p^2 - 3g^2)}$. $dr = \sqrt{(\frac{4}{3}g^2)}$. Donc $di = \sqrt{(ir^2 + dr^2)} = \sqrt{\left[\left(\frac{2n+3}{6n}\right)^2 (9p^2 - 3g^2) + \frac{4}{3}g^2\right]}$.

Maintenant $ai : ti :: di : io$. ou, $\frac{2n+1}{2n} : \frac{n+1}{n} :: \sqrt{\left[\left(\frac{2n+3}{6n}\right)^2 (9p^2 - 3g^2) + \frac{4}{3}g^2\right]} : io = \frac{2n+2}{2n+1}\sqrt{\left[\left(\frac{2n+3}{6n}\right)^2 (9p^2 - 3g^2) + \frac{4}{3}g^2\right]}$.

26. Soit $n = \frac{1}{2}$; on aura, $at = \sqrt{(9p^2 - 3g^2)}$, c'eſt-à-dire, que dans ce cas la partie excédante de l'axe eſt préciſément égale à cet axe, comme dans le cas du *n.° 14*: mais ici le ſolide ſecondaire eſt un rhomboïde, & non pas un dodécahèdre ; car on a alors, $io = \frac{3}{2}\sqrt{(16p^2 - 4g^2)}$, $di = \sqrt{(6p^2 - 4g^2)}$, & $ir = \frac{4}{3}\sqrt{(9p^2 - 3g^2)} = \frac{4}{3}af$. Or $di : io :: ir : iz$. ou, $2 : 3 :: \frac{4}{3}af : iz = 2af$; donc iz eſt les $\frac{2}{3}$ de l'axe ti, & tz en eſt le $\frac{1}{3}$; donc alors io eſt la diagonale, & to l'arête d'un romboïde. Ce cas a lieu dans les grès de Fontainebleau; il eſt réaliſé encore, du moins en partie, dans le ſchorl des granits, & dans certaines variétés du vitriol martial.

27. Cherchons quel eſt le rhomboïde qui donneroit, dans la même ſuppoſition, un cube pour criſtal ſecondaire.

On aura $ti = 3\,aſ = 3\,\sqrt{(9p^2 - 3g^2)}$. De plus *(n.° 26)*, $io = \frac{3}{2}\sqrt{(16p^2 - 4g^2)}$: or, en appliquant ici les valeurs indiquées *(6)*, & appelant g' la moitié de la grande diagonale, p' celle de la petite diagonale du criſtal cubique ſecondaire, puis faiſant $p' = g' = 1$, on trouvera d'une autre part, $ti = \sqrt{(9p'^2 - 3g'^2)} = \sqrt{(6)}$; $io = \frac{2}{3}\sqrt{[(ti)^2 + 3g'^2]} = \frac{2}{3}\sqrt{(6 + 3)} = 2$. Donc $\frac{3}{2}\sqrt{(16p^2 - 4g^2)} : 3\sqrt{(9p^2 - 3g^2)} :: 2 : \sqrt{(6)}$; d'où l'on tire, $4p^2 = 2g^2$, & $g : p :: 2 : \sqrt{(2)}$; c'eſt-à-dire, que le rhomboïde cherché ſeroit ſemblable à celui du grenat.

28. Nous avons prouvé (19) qu'un décroiſſement ſur l'angle d *(fig. 1)*, donneroit toujours des romboïdes. Voyons ſi parmi tous ces rhomboïdes, il y en auroit un qui fût ſemblable à celui que nous avons conſidéré *(n.° 26)*, le noyau étant ſuppoſé le même de part & d'autre. Dans ce cas, il eſt clair que les triangles dpr *(fig. 4)* & dir *(fig. 7)* ſeront ſemblables; & puiſque dr eſt un côté commun à ces deux triangles, il faudra de plus qu'ils ſoient égaux; donc on aura $pr = ir$. Or (26) $ir = \frac{2n+3}{6n}\sqrt{(9p^2 - 3g^2)}$, & pr (19) $= \frac{2n+1}{3n-3}\sqrt{(9p^2 - 3g^2)}$. Si dans l'expreſſion de ir, on fait $n = \frac{1}{2}$, comme cela eſt néceſſaire pour avoir un rhomboïde, on aura $\frac{2n+3}{6n} = \frac{4}{3}$. Donc il faudra que le coéfficient $\frac{2n+1}{3n-3}$ ſoit auſſi égal à $\frac{4}{3}$, ce qui donne $n = \frac{5}{2}$; c'eſt-à-dire, que l'identité cherchée a lieu en vertu d'un décroiſſement par cinq rangées ſur l'angle d: je n'ai point encore obſervé ce cas dans la nature.

Des Formes secondaires composées.

DANS les cristaux qui appartiennent à cette classe, il peut arriver, ou que les loix de décroissement n'ayent lieu que par rapport à quelques-unes des faces du noyau, en sorte que les autres faces restent à découvert, ou bien que le noyau soit entièrement couvert par les lames de superposition qui subissent à la fois plusieurs décroissemens. Nous nous bornerons à un petit nombre d'exemples relatifs à ces deux cas.

29. Il faut, avant tout, démontrer le théorème suivant, qui nous sera utile pour la suite : *Dans un rhomboïde, le cosinus du petit angle des faces est toujours une quantité rationnelle, pourvu que les carrés des expressions des deux diagonales soient eux-mêmes des quantités rationnelles.*

Soit $abdf$ (*fig. 1*) une des faces du rhomboïde dont l'angle a du sommet est supposé obtus. Ayant mené an perpendiculaire sur df, si nous prenons af pour le rayon, fn sera le cosinus de l'angle afd. Soit $cf = \sqrt{(x)}$, $af = \sqrt{(ʃ)}$; nous aurons $ac = \sqrt{(ʃ - x)}$, les quantités x & $ʃ - x$ étant, par l'hypothèse, des nombres quelconques entiers ou fractionnaires. Or, par la théorie des sinus, $fn = \frac{(cf)^2 - (ac)^2}{af} = \frac{x - (ʃ - x)}{\sqrt{(ʃ)}}$ $= \frac{2x - ʃ}{\sqrt{(ʃ)}}$; donc, $fd : fn :: \sqrt{(ʃ)} : \frac{2x - ʃ}{\sqrt{(ʃ)}}$ $:: ʃ : 2x - ʃ$.

Si l'angle a étoit aigu, on feroit $fn = \frac{ʃ - 2x}{\sqrt{(ʃ)}}$.

30. Tout rhomboïde dans lequel le cosinus du petit angle est une quantité rationnelle, peut devenir un parallélipipède rectangle, par des loix régulières de décroissement.

Soit $poruxʃ$ (*fig. 8*) un rhomboïde de ce genre. Si du point f, que je suppose être l'un des sommets, on mène fg, fm, perpendiculaires sur $pʃ$ & ru, le rapport

des cosinus *pg*, *rm*, des angles *fps*, *fru*, avec les lignes *ps*, *ru*, étant commensurable, & les lignes *ps*, *ru*, mesurant un certain nombre d'arêtes de molécules, il y aura toujours une loi régulière de décroissement susceptible de produire une face *fghm*, perpendiculaire aux plans *fpsx*, *frux*, & une seconde face parallèle à *fghm*, & qui passeroit par le point *t*; donc le rhomboïde se trouvera alors changé en un prisme droit, dont les bases seront des rhombes *fghm*.

Maintenant, ayant mené *fk*, perpendiculaire sur *hm*, concevons un plan coupant qui passe par les lignes *fn*, *fk*, & un autre plan parallèle au précédent, & qui passe par l'arête *ot*. S'il y a quelque loi de décroissement qui puisse donner deux nouvelles faces situées comme ces plans, il est évident que le rhomboïde deviendra un parallélipipède rectangle. Or si l'on conçoit le rhombe *orut* divisé en une multitude de petits rhombes partiels, semblables entr'eux & au rhombe total, la ligne *mh*, perpendiculaire sur *ht*, mesurera les hauteurs d'un certain nombre de ces rhombes partiels. Il faudra donc que *km* mesure aussi un nombre déterminé de ces hauteurs, c'est-à-dire, qu'il faudra que le rapport de *km* avec *mh* soit commensurable : or il le sera nécessairement ; car dans le rhombe *fghm* (*fig. 8* & *9*), on a $gm = pr$; de plus, puisque *mr* (*fig. 8*) est une quantité rationnelle, il s'ensuit que le carré de *fm* sera aussi une quantité rationnelle. Donc *fm*, & *gm* (*fig. 9*) ayant l'une & l'autre pour carrés des quantités rationnelles, *hf* sera une quantité du même genre. Donc d'après ce qui a été dit plus haut (*n.° 29*), le cosinus *km* de l'angle *fmh* sera une quantité rationnelle, & par conséquent *km* mesurera une loi possible de décroissement.

Les cristaux étant susceptibles de s'aplatir parallèlement à leurs bases, ou à leurs faces latérales, on conçoit que le parallélipipède rectangle pourroit devenir un cube.

31. Pour faire quelques applications, cherchons l'expression générale de *km*. Soit $fr = \surd(s)$, $lr = \surd(x)$;

nous aurons (29), $rm = \frac{2x - f}{\sqrt{(f)}}$; or, $fm = \sqrt{[(fr)^2 - (rm)^2]} = \sqrt{(\frac{4fx - 4x^2}{f})}$; de plus, mi (*fig.* 9) $= lr$ (*fig.* 8) $= \sqrt{(x)}$; donc $fi = \sqrt{[(fm)^2 - (im)^2]} = \sqrt{(\frac{3fx - 4x^2}{f})}$.

$$km = \frac{(im)^2 - (fi)^2}{fm} = \frac{x}{\frac{\sqrt{(4fx - 4x^2)}}{f}} - \frac{\frac{3fx + 4x^2}{f\sqrt{(4fx - 4x^2)}}}{f} = \frac{\frac{4x^2 - 2fx}{f\sqrt{(4fx - 4x^2)}}}{f};$$ donc

hm ou $fm : km :: \sqrt{(\frac{4fx - 4x^2}{f})} : \frac{\frac{4x^2 - 2fx}{f\sqrt{(4fx - 4x^2)}}}{f}$
$:: 4fx - 4x^2 : 4x^2 - 2fx :: 2f - 2x : 2x - f$.

32. Suppoſons maintenant que la *figure 8* repréſente un des rhomboïdes que l'on peut extraire du grenat; nous aurons $f = 6$, $x = 4$; donc, $ur : mr :: f : 2x - f :: 3 : 1$; c'eſt-à-dire, que le décroiſſement qui donneroit la face $gfmh$, ſe feroit par ſix rangées de molécules ſur l'angle des lames compoſantes. De plus, $hm : km :: 2f - 2x : 2x - f :: 4 : 2 :: 2 : 1$, c'eſt-à-dire, que le décroiſſement qui produiroit la face contiguë à fk, ſe feroit par deux rangées ſur l'arête fk.

Dans le ſpath calcaire, on a $f = 5$, $x = 3$, ce qui donne, $ur : mr :: 5 : 1$, & $hm : km :: 4 : 1$.

Dans le ſchorl on a, $f = 10$, $x = 7$, ce qui donne pour le premier décroiſſement, $5 : 2$; & pour le ſecond, $3 : 2$.

On voit par ce peu d'exemples, que les loix qui déterminent le changement du rhomboïde en cube, s'écartent preſque toujours des loix les plus ſimples & les plus communes, & qu'ainſi ce changement doit rarement avoir lieu dans la nature.

Une autre cauſe doit contribuer encore à le rendre rare; elle conſiſte en ce que les décroiſſemens, dans ce cas, ne s'opéreroient pas ſemblablement ſur toutes les faces du noyau, ce qui ne s'accorde pas avec les faits que l'on obſerve le plus ordinairement. Il y a cependant des exemples de cette diverſité de décroiſſement dans le ſchorl & dans la pyrite ferrugineuſe.

Vallérius *(Syſtema mineral. tom. I. p. 145)* cite du ſpath calcaire cubique. M. le chevalier Born, dans ſon *Lithophylacium, p. 32*, parle de grenats noirâtres d'une forme cubique : ces faits auroient beſoin d'être conſtatés; après tout, ils ſont dans l'ordre des poſſibles. Quant au grenat, nous avons vu (25) que le rhomboïde de cette ſubſtance pouvoit donner le cube par des décroiſſemens uniformes, & l'on concevra, avec un peu d'attention, que le grenat dodécahèdre donneroit pareillement le cube par un décroiſſement ſur les angles aigus des faces du dodécahèdre; cette loi eſt la plus naturelle de toutes celles qui pourroient déterminer la forme cubique relativement au grenat.

33. Reprenons le cas du *n.° 20*. J'ai prouvé que ſi les décroiſſemens ſe faiſoient par deux rangées ſur l'angle *d (fig. 1)*, il en réſulteroit ſix faces rhomboïdales ſituées verticalement, & qui, avec les ſix faces du noyau, formeroient un dodécahèdre. Cherchons le cas où les faces latérales auroient leurs angles égaux à ceux des faces des ſommets. Soit *abdf (fig. 10)* une de ces dernières faces, & *dfnm* une des faces latérales. Ayant mené *an* perpendiculaire ſur *fd*, & *dp* perpendiculaire ſur *fn*, il faudra que l'on ait *fn* coſinus de l'angle *afd*, égal à *fp* coſinus de l'angle *dfn*; or $fn = \frac{(cf)^2 - (ac)^2}{af}$

$$= \frac{g^2 - p^2}{\sqrt{(f^2 + p^2)}} \cdot fp = \sqrt{(g^2 + p^2 - \tfrac{4}{3} g^2)}$$
$$= \frac{\sqrt{(3 p^2 - g^2)}}{3}.$$

On aura donc $\frac{g^2 - p^2}{\sqrt{(g^2 + p^2)}} = \frac{\sqrt{(3p^2 - g^2)}}{3}$, élevant tout au carré, & faiſant évanouir les dénominateurs, $3g^4 - 6g^2p^2 + 3p^4 = 3p^4 + 2g^2p^2 - g^4$; réduiſant, $g^2 = 2p^2$, & $g : p :: \sqrt{(2)} : 1$, ce qui a lieu dans le grenat. Alors le dodécahèdre peut être conçu, ainſi que je l'ai fait voir ailleurs, comme composé de quatre rhomboïdes égaux & ſemblables, dont chacun eſt diviſible en ſix tétrahèdres qui ont pour faces des triangles iſocèles, tous pareillement égaux & ſemblables entr'eux; mais dans cette ſuppoſition, les faces latérales ne réſultent d'aucune loi de décroiſſement, & ſont liſſes comme celles du ſommet.

34. Si l'on ſuppoſe que l'angle *afd*, au lieu d'être égal à l'angle *dfp*, en ſoit le double, alors on aura *ac*, ſinus de la moitié de l'angle *afd*, égal à *dp*, ſinus de l'angle *dfp* : or $dp : cf :: 2 : \sqrt{(3)}$; donc auſſi, $ac : cf :: 2 : \sqrt{(3)}$, ce qui a lieu dans le ſulfate de fer.

35. Concevons un ſolide à douze faces triangulaires ſcalènes, tel que celui qui réſulteroit d'un décroiſſement par deux rangées ſur les arêtes *bd*, *fd* (*fig. 1*), (*n.º 17*). Suppoſons de plus que les angles ſolides latéraux, tels que *d* (*fig. 3*), ſoient remplacés par autant de facettes verticales, qui ſe touchent par leurs angles latéraux; ces facettes feront des trapézoïdes *mqtx* (*fig. 11*), qui réſulteront d'une loi de décroiſſement par deux rangées de molécules ſur l'angle *d* (*fig. 1*), (20). Les deux triangles *qmx*, *qtx*, ſeront tournés alternativement vers les deux ſommets du criſtal, en ſorte que le plus alongé *qmx* aura ſon ſommet ſitué ſur l'arête *du* (*fig. 3*), qui correſpond à l'arête *df* du noyau.

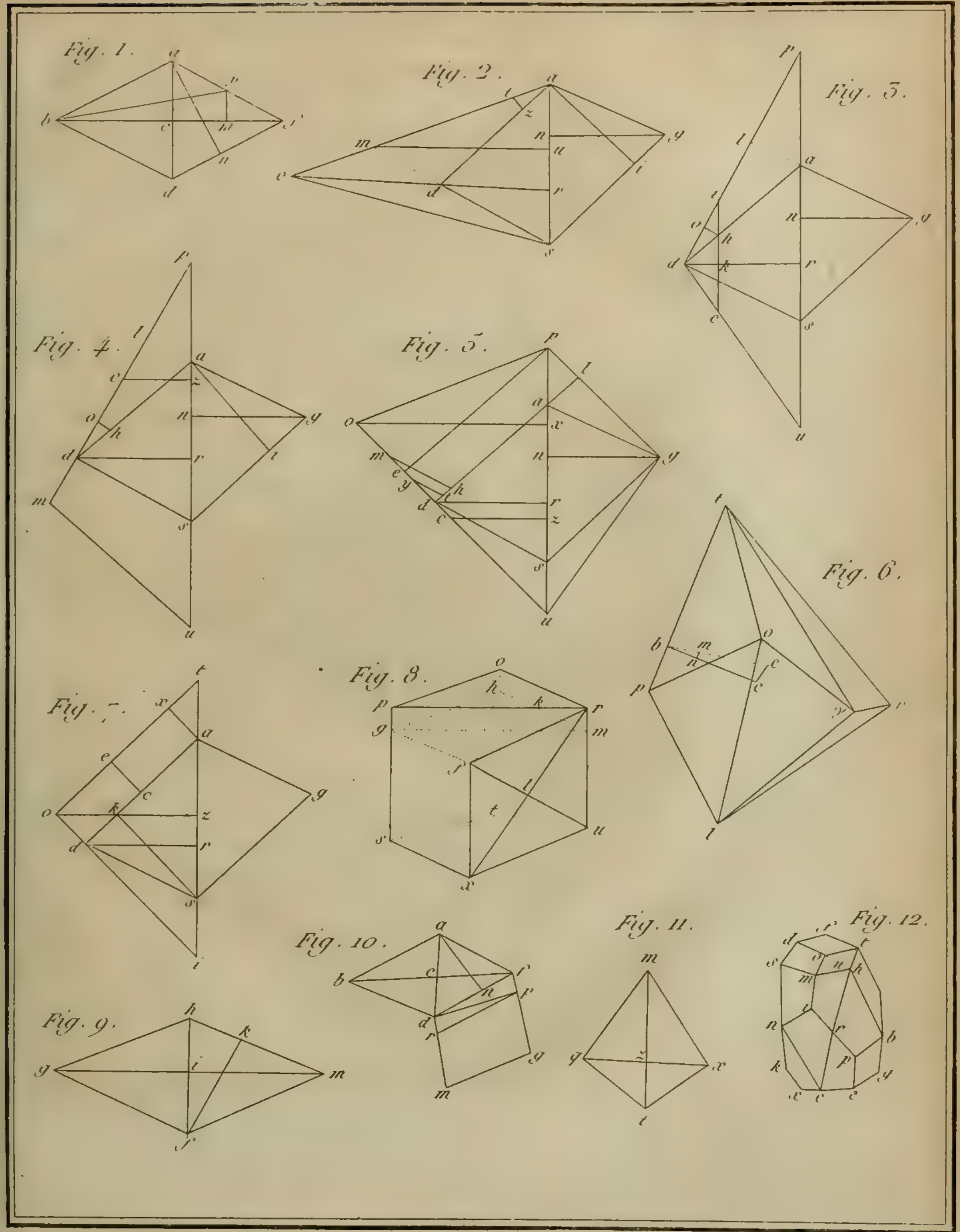
Propoſons-nous de trouver le cas où *qmx* feroit un triangle équilatéral. Il eſt aiſé de concevoir, avec un peu d'attention, que la diagonale *qx*, qui eſt néceſſairement parallèle à la diagonale horizontale du noyau, a ſes extrémités

au milieu des arêtes *bd*, *df* (*fig. 1*), ſur le rhombe du même noyau, ou plutôt de celui qui exiſteroit ſi le criſtal étoit complet. Cela poſé, ſoit *ci* (*fig. 3*) la même ligne que *tm* (*fig. 11*), *ch* répondra à *mz*; & l'on aura $ch = \frac{1}{4}\, au = \frac{1}{4}.\, 2\, as = \frac{1}{2}\sqrt{(9p^2 - 3g^2)}$, (17). De plus, *qx*, comme nous l'avons vu, étant la moitié de la diagonale horizontale du noyau, on aura $qz = \frac{1}{2}g$; donc, par la nature du triangle équilatéral, $qz : mz :: 1 : \sqrt{(3)} :: g : \sqrt{(9p^2 - 3g^2)}$; donc $3g^2 = 9p^2 - 3g^2$; d'où l'on tire, $3p^2 = 2g^2$, & $g : p :: \sqrt{(3)} : \sqrt{(2)}$; c'eſt-à-dire, que le cas dont il s'agit a lieu dans le ſpath calcaire, où l'on trouve effectivement des criſtaux qui préſentent cette modification.

Dans le même cas, on a $tz = \frac{1}{2}zm$; donc $qz : tz :: \sqrt{(3)} : \frac{1}{2}$, ce qui indique que le triangle *qtm* eſt ſemblable à ceux qui compoſent les faces du rhomboïde primitif, dans le ſulfate de fer.

36. Quelquefois le criſtal eſt incomplet par le ſommet, où l'on voit trois petits rhombes égaux & ſemblables à ceux du noyau.

Dans d'autres variétés, ces plans ſont à contre-ſens des précédens, & ſitués comme les faces du rhomboïde lenticulaire; on a alors un criſtal à vingt-quatre faces trapézoïdales, produites par trois différentes loix de décroiſſement, & dont ſix, telles que *nirc*, *rhbp*, &c. (*fig. 12*), ſont verticales & ſemblables à *mqtx* (*fig. 11*); ſix autres, telles que *smin*, *mirk*, &c. ſont les réſidus des faces du dodécahèdre à triangles ſcalènes; les ſix dernières, telles que *sdom*, *dfto*, &c. remplacent les ſommets. Si l'on mène les diagonales *rm*, *mt*, *oh*, on aura pluſieurs propriétés géométriques aſſez remarquables. Car, 1.° l'angle *rhm* eſt droit; 2.° dans le triangle *rmh*, les côtés *rm*, *rh*, *hm*, ſont entr'eux dans le rapport des quantités $\sqrt{(5)}$, $\sqrt{(3)}$, $\sqrt{(2)}$, c'eſt-à-dire, que ce triangle eſt ſemblable à l'un quelconque de ceux qui ſous-diviſeroient une des faces du noyau, en ſuppoſant que l'on eût


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.

l'on eût mené les deux diagonales; 3.° dans chaque triangle, tel que *umh*, on a, *mh*, *uh*, *um*, dans le rapport des quantités $\sqrt{(8)}$, $\sqrt{(5)}$, $\sqrt{(3)}$, qui eſt le même que celui de la diagonale oblique, de l'arête & de la demi-diagonale horizontale du noyau. Je me contente d'indiquer ici ces propriétés, qu'il ſera facile aux géomètres de vérifier.



MÉMOIRE

SUR LA DOUBLE RÉFRACTION DU SPATH D'ISLANDE.

Par M. l'abbé HAÜY.

LA double réfraction que subissent les rayons de la lumière, en passant à travers les rhomboïdes transparens de spath calcaire, connus sous le nom de *spath* d'*Islande*, offroit un phénomène d'optique trop intéressant pour ne pas fixer l'attention de Newton, à qui cette partie de la physique est redevable de tant de découvertes précieuses. C'est dans ses questions d'optique *(page 28 & suiv. de l'édition de Lauzanne, 1740)*, que cet illustre géomètre, après avoir déterminé, jusqu'à un certain point, les loix suivant lesquelles s'opère la réfraction de chaque partie du rayon qui se divise en deux, dans le spath d'Islande, entreprend de remonter jusqu'à la cause physique du phénomène, & déduit des résultats donnés par l'observation, l'existence d'une propriété de la lumière qui jusqu'alors n'avoit point été soupçonnée.

Huyghens avoit donné quelque temps auparavant une théorie savante & très-développée de la double réfraction du spath d'Islande *(a)*, dans laquelle il essaie d'expliquer ce phénomène, à l'aide de deux émanations différentes des ondulations produites par la pression de la lumière sur la matière ethérée qu'il supposoit renfermée dans le spath. Newton, qui avoit connoissance de cette théorie, a profité de quelques-uns des résultats qui s'y trouvent; mais il rejette la cause physique indiquée par Huyghens, comme étant incompatible avec les effets que l'on obtient en se servant de deux rhomboïdes placés l'un au-dessus de l'autre, comme

(a) Traité de la Lumière, *pag. 48 & suiv. edit. de Leyde, 1690.*

nous le dirons plus bas. L'explication de ces effets embarrassoit Huyghens lui-même, & ce géomètre célèbre avoue, avec ingénuité, qu'il n'avoit trouvé aucune solution de cette partie du problème, qui pût le satisfaire.

La Hire, dans son mémoire sur le gypse de Montmartre *(Mém. de l'Ac. an. 1710)*, parle aussi, par occasion, de la double réfraction du spath d'Islande, & il conclut de ses observations, que la réfraction extraordinaire peut être rapportée à un plan fixe qui seroit presque perpendiculaire à l'arête du rhomboïde, ce qui mèneroit à penser que le phénomène dépend de deux matières différentes dont le spath seroit composé. Le rapport des sinus d'incidence & de réfraction à l'égard de ce plan, est, suivant le même savant, à peu-près de trois à deux, comme dans le verre ordinaire.

Un travail particulier que j'ai entrepris sur la minéralogie, m'ayant conduit à faire une lecture attentive de ces différens articles, & de quelques autres relatifs au même sujet, j'y ai trouvé tant de diversité, même par rapport aux résultats qui ne concernent que les routes de la lumière dans le spath, que j'ai résolu de soumettre le tout à un nouvel examen, & d'essayer de fixer nos connoissances sur ce point important de physique.

Il m'a paru que pour lever toute incertitude, je devois chercher une marche assujettie le moins qu'il seroit possible à des observations susceptibles de ne donner que des à peu-près, & dont il faudroit ensuite déduire un résultat moyen, comme cela a lieu lorsque l'on mesure plusieurs angles, pour déterminer un rapport entre les sinus d'incidence & de réfraction. Les limites des erreurs inévitables dans ces sortes de cas, sur-tout lorsqu'on opère comme ici sur de petits objets, ne sont pas assez resserrées, pour que l'on puisse se flatter de parvenir à des résultats suffisamment approchés. C'est dans cette vue que j'ai préféré aux observations qui consistent à faire tomber un rayon de lumiere sur la surface du spath, une suite d'observations immédiates

ſur les circonſtances que préſente la duplication des points & des lignes que l'on regarde à travers le ſpath ; obſervations dans leſquelles, en multipliant ces points ou ces lignes, en les approchant ou en les écartant plus ou moins, on peut, ce me ſemble, déterminer les effets avec une préciſion qui laiſſe peu de choſe à déſirer.

Je me propoſe de prouver, dans ce mémoire, que les obſervations dont je viens de parler, donnent des réſultats qui diffèrent ſenſiblement, à pluſieurs égards, de ceux qui ſont particuliers à Newton, & ſe rapprochent davantage de ceux d'Huyghens. Je me ſervirai des mêmes obſervations pour prouver généralement que l'hypothèſe d'un plan fixe, admiſe par la Hire, doit être rejetée, & pour expliquer quelques effets particuliers relatifs à la poſition des images vues à travers le ſpath. Enfin je déterminerai la loi que ſuit la réfraction extraordinaire, dans le plan qui paſſe par les petites diagonales des baſes du rhomboïde.

A l'égard de la cauſe phyſique du phénomène, il m'a paru qu'elle dépendoit, ainſi que l'a penſé Newton, d'une action particulière du ſpath ſur les rayons de la lumière. Les différens réſultats que j'établirai dans le cours de ce mémoire, conſpirent en faveur de cette hypothèſe, qu'il eſt d'autant plus important d'établir ſur des preuves ſolides ; qu'elle ſe préſente, au premier abord, avec un air de paradoxe qui ſemble l'avoir fait négliger juſqu'ici, & avoir empêché les phyſiciens de l'enviſager avec cet intérêt qu'excite naturellement tout ce qui eſt ſorti de la plume de Newton.

Je commencerai par l'expoſition des expériences à l'aide deſquelles ce grand géomètre a indiqué la manière dont les rayons de la lumière ſe réfractent en traverſant le ſpath d'Iſlande.

Soit *a b c d (fig. 1)* une tranche d'un rhomboïde de ce ſpath, priſe de manière que *a b, c d* ſoient les petites diagonales de deux faces oppoſées, & *b c, a d*, les arêtes compriſes entre ces diagonales *a* & *c*, étant les angles

obtus. Concevons qu'un rayon *o u* de lumière tombe perpendiculairement ſur la diagonale *a b*. Ce rayon, au point d'immerſion *u*, ſe diviſera en deux parties *u z*, *up*, dont l'une n'éprouvera aucune réfraction, & reſtera ſur le prolongement de *o u*, comme dans le cas ordinaire, & l'autre, *up*, s'écartera de la première, en ſe rapprochant de l'angle *d*, & en reſtant dans le plan *a b c d*. Nous appellerons déſormais la partie *u z*, *le rayon ordinaire*, la partie *u p*, *le rayon* d'*aberration*, & la diſtance *p z*, l'*amplitude d'aberration*. La valeur de l'angle *p u z*, telle que Newton l'indique, d'après les meſures d'Huyghens, eſt d'environ 6.^{d} 40.′

Si le rayon incident *i k* eſt oblique par rapport à *a b*, ſa partie *k e* que je ſuppoſe être le rayon ordinaire, ſe réfractera dans le ſpath, en s'approchant de la perpendiculaire *r m*, de manière que le ſinus de l'angle de réfraction *m k e*, ſera les $\frac{3}{5}$ du ſinus de l'angle d'incidence *i k r*; & ſa partie *k l* qui ſera le rayon d'aberration, ſe rapprochera encore de l'angle *d*, de manière que, ſuivant Newton, on aura toujours $el = pz$. Les deux rayons, après leur ſortie du ſpath, reprendront des directions parallèles à leur première direction *i k*. Newton appelle *plans de réfraction perpendiculaire* les plans des triangles *k l e*, *u z p*, & tous les autres ſemblables qui ſe confondroient avec *a b c d*, ou lui ſeroient parallèles; & la partie du cryſtal voiſine de l'angle *d*, eſt ce qu'il nomme *la région de la réfraction extraordinaire*.

Enfin ſi le rayon incident ſort du plan *a b c d*, le rayon ordinaire ſe réfractera toujours ſuivant la loi commune des réfractions, en obſervant le rapport 5 : 3, pour les ſinus d'incidence & de réfraction. Alors, pour avoir la poſition du rayon d'aberration, voici la méthode qu'indique Newton. On mènera par le point où le rayon ordinaire rencontre la baſe inférieure du ſpath, une parallèle à la diagonale *c d*; puis en partant du même point, & en allant vers l'angle *d*, on prendra ſur cette parallèle une ligne égale à *p z*, qui donnera l'amplitude d'aberration.

Concevons maintenant que l'on diſpoſe l'un derrière l'autre deux rhomboïdes de ſpath, de manière que leurs faces homologues ſoient reſpectivement parallèles ; alors ſoit que ces rhomboïdes ſe touchent par une de leurs baſes, ou qu'il y ait entr'eux un intervalle, chacun des rayons ordinaire & d'aberration qui ſeront ſortis du premier rhomboïde, ne ſe décompoſera plus en paſſant dans le ſecond, mais s'y refractera ſuivant la même loi que dans le premier. Cet effet aura toujours lieu, quelle que ſoit la poſition reſpective des rhomboïdes, pourvu qu'ils ayent leurs plans de réfraction perpendiculaire ſitués parallèlement les uns aux autres.

Si les deux rhomboïdes ſont tellement diſpoſés que leurs plans de réfraction perpendiculaire ſoient à angle droit l'un ſur l'autre, alors chacun des deux rayons ſortis du premier ſpath, reſtera encore ſimple en pénétrant le ſecond ; mais ces rayons changeront de fonction, c'eſt-à-dire, que celui qui étoit rayon ordinaire dans le premier ſpath, ſe dirigera comme rayon d'aberration dans le ſecond, & réciproquement.

Mais dans toutes les poſitions intermédiaires, c'eſt-à-dire, dans celles où les plans de réfraction perpendiculaire ſeront inclinés entr'eux, chacun des deux rayons ſortis du premier ſpath, ſe partagera de nouveau, dans le ſecond, en un rayon ordinaire & un rayon d'aberration, qui ſe dirigeront comme nous l'avons expoſé ci-deſſus.

Tels ſont les réſultats des expériences indiquées par Newton. Nous allons voir à quel point ils s'accordent avec les obſervations que l'on peut faire ſur la duplication de l'image d'un objet vu à travers un ou deux rhomboïdes de ſpath d'Iſlande.

Imaginons un point viſible *u* (*fig. 2*), ſitué à une diſtance quelconque au-deſſous de la ſurface inférieure d'un de ces rhomboïdes. Suppoſons d'abord que le rayon viſuel de l'obſervateur ſoit dans le plan *abcd*, & que de plus il ſe confonde avec une perpendiculaire *ux* menée du point *u*

ſur *dc*. Dans ce cas, l'obſervateur verra une première image de l'objet dans la direction de cette même perpendiculaire, & une ſeconde dans la direction d'une oblique qui paſſeroit entre le point *u* & l'angle *c*. Cette ſeconde image eſt toujours beaucoup plus abaiſſée que l'autre vers la ligne *c d*; nous l'appellerons déſormais l'*image d'aberration*, pour la diſtinguer de l'autre qui portera le nom d'*image ordinaire*.

Si le rayon viſuel s'écarte de la perpendiculaire ſuivant une direction quelconque, en reſtant toujours néanmoins dans le plan *a b c d*, l'œil verra les deux images ſuivant deux obliques à la diagonale *d c*, mais l'image d'aberration ſera toujours ſur la direction d'une oblique ſituée entre l'autre image & l'angle *c*; & ſi l'on ſuppoſe les deux images jointes par une ligne droite, cette ligne ſera toujours dans le plan *a b c d*.

Toutes ces apparences s'expliquent aiſément, d'après ce que nous avons dit de la double réfraction de la lumière dans le ſpath d'Iſlande. Pour ſaiſir cette explication, il faut concevoir que le point viſible *u* (*fig. 3*) envoie des rayons vers *c d*, dans toutes les directions imaginables. Parmi tous ces rayons, l'un, tel que *u h*, eſt tellement diſpoſé, que ſa partie *h l* conſidérée comme rayon ordinaire, ſort du ſpath, ſuivant une ligne *l o* parallèle à *u h*, & qui aboutit à l'œil que je ſuppoſe placé en *o*. Quant à la partie qui donne le rayon d'aberration, elle va tomber ſur quelque point ſitué entre *l* & *b*; & comme après ſon émergence, elle ſuit une direction qui ne peut concourir avec *l o*, puiſqu'elle lui eſt parallèle, elle ſera perdue pour l'œil.

Mais il y aura un autre rayon incident, *i u*, ſitué de manière que le rayon ordinaire, *i m*, après ſon émergence en *m*, paſſera par un point *e*, tel que l'on aura *e o* parallèle à *a b* & égale à l'amplitude d'aberration. Donc ayant mené *mk* égale à *c o*, le rayon d'aberration provenu du rayon *i u*, ſera *i k*. Or ce rayon, après ſon émergence, doit prendre une direction parallèle à *i u*: mais on a *k o* parallèle à *m e*, par la conſtruction, & *m e* parallèle à *i u*, par les loix

de la réfraction. Donc le rayon *ik* prendra la direction *ko* donc il convergera vers le rayon *hlo*, & passera par l. prunelle; donc l'observateur verra deux images de l'objet, l'une suivant *ok*, & l'autre suivant *ol*.

On conçoit, d'après ce qui vient d'être dit sur la nécessité du concours de deux rayons incidens, pour produire dans l'œil la double image de l'objet, pourquoi l'image qui est donnée par le rayon d'aberration *ok* se trouve toujours plus rapprochée de l'angle obtus *c* que l'autre image.

Quelque direction que prenne le rayon visuel, soit en restant dans le plan *abcd*, soit en s'écartant de ce plan, l'œil verra toujours les deux images dans des positions analogues aux précédentes, à quelques différences près, dont nous parlerons dans la suite.

Si l'on suppose que le point *u* se rapproche continuellement de la surface *dc*, le point *r* où se croisent les rayons, descendra aussi continuellement vers la même surface, jusqu'à ce qu'enfin l'objet soit contigu à cette surface; & alors le point *r* se confondant avec l'objet, les deux rayons par lesquels l'œil verra les images de cet objet, seront *rlo*, *rko*.

Les résultats que nous venons d'exposer, s'accordent en général avec la disposition des rayons réfractés qui se déduit des expériences de Newton. Mais il falloit y joindre d'autres résultats qui pussent servir à déterminer avec précision la quantité des réfractions que subissent les mêmes rayons dans le spath. Voici les observations à l'aide desquelles je crois être parvenu à cette précision.

Ayant marqué sur un papier blanc plusieurs points à différentes distances les uns des autres, je regardai, à travers le spath, ces mêmes points pris deux à deux, & situés de manière qu'ils coïncidoient avec la diagonale *dc*, & que le rayon visuel étoit dans le plan *abcd*, & de plus perpendiculaire à la ligne *dc*. Je voyois alors quatre images rangées sur cette dernière ligne; mais les deux images du milieu se rapprochoient plus ou moins l'une de l'autre, suivant

ſuivant que la diſtance des deux points varioit elle-même. En tâtonnant les poſitions de ces points, je parvins à en marquer deux à une telle diſtance, que la ſeconde & la troiſième images coïncidoient exactement, en ſorte qu'au lieu de quatre images je n'en voyois plus que trois, dont celle du milieu avoit ſeulement une teinte plus foncée. Or cet effet provenoit néceſſairement de ce que le rayon ordinaire, envoyé par une des images, coïncidoit, après ſon émergence, avec le rayon d'aberration envoyé par une autre image. Soient r', n, *(fig. 3)* les deux points dont il s'agit, placés à la diſtance convenable, de manière que l'un des deux, tel que n, ſe trouve dans la direction ok du rayon viſuel perpendiculaire ſur ab; le point r' ſera vu à l'aide du rayon ordinaire olr' & du rayon d'aberration okr, qui en doubleront l'image. Suppoſons maintenant le point n ſitué de manière que le rayon ok étant conſidéré comme rayon incident ſur la ſurface ab du ſpath, ſes deux parties, après ſa diviſion dans le ſpath, fuſſent le rayon ordinaire kn, & le rayon d'aberration kr'; il eſt évident que l'une des images du point r' ſera vue dans la même direction ok, que l'une des images du point n. L'œil ne verra donc que trois images dans les directions ol, ok, op.

Je cherchai enſuite le rapport de la diſtance $r'n$ avec la ligne dg, compriſe entre l'angle d & la perpendiculaire ag abaiſſée ſur cd. Or j'ai fait voir ailleurs *(a)* que dans le rhomboïde du ſpath calcaire, on avoit $ad = \sqrt{(5)}$, $dc = \sqrt{(8)}$. De plus, ſi l'on cherche l'expreſſion de dg, on trouve $dg = \frac{1}{4}\, dc = \frac{1}{4}\sqrt{(8)} = \sqrt{(\frac{1}{2})}$. Ayant diviſé dg ſucceſſivement en un nombre plus ou moins grand de parties égales, qui me conduiſoient à différentes approximations du rapport de $r'n$ avec dg, je trouvai très-ſenſiblement $\frac{1}{3}\, dg$, pour la valeur de $r'n$, & par conſéquent pour celle de pz *(fig. 1)*. Réſolvant le triangle rectangle agn, d'après cette donnée & la valeur de

(a) Eſſai d'une théorie ſur la ſtructure des criſtaux, *p. 97.*

$ag = \sqrt{(\frac{9}{2})}$, j'ai trouvé pour la meſure de l'angle *nag*, 6d 20′ *(b)*.

Nous avons vu que ſuivant Newton, la diſtance entre le rayon ordinaire & le rayon d'aberration, priſe ſur la diagonale *cd*, ou parallèlement à cette diagonale, étoit une quantité conſtante. Cependant l'obſervation m'a prouvé qu'elle varioit; car ſi elle reſtoit la même, il eſt clair que quelqu'inclinaiſon que prît le rayon viſuel par rapport aux deux points *r′ n*, *(fig. 3)*, l'œil ne devroit jamais voir que trois images; or, ſi ce rayon s'incline peu à peu, par exemple, vers le point *b*, les deux images du milieu ſe confondront encore aſſez ſenſiblement, tant que l'inclinaiſon ne ſera pas conſidérable; mais paſſé un certain terme, elles ſe ſépareront, de manière que la direction ſur laquelle l'œil verra l'image d'aberration du point *r′*, paſſera à une petite diſtance du point *k*, entre ce point & le point *p*. Si au contraire le rayon viſuel s'incline vers *a*, les deux images du milieu ſe ſépareront encore, & cela de manière que l'image d'aberration du point *r′* paſſera de l'autre côté du point *k*, entre ce point & le point *l*.

Concluons de cette obſervation, que l'amplitude d'aberration n'eſt ſénſiblement conſtante que dans un champ très-limité. Lorſque le rayon viſuel s'incline vers *b*, on conçoit qu'alors le rayon ordinaire auquel appartient le rayon d'aberration *rk*, s'incline lui-même de plus en plus vers la ligne *cb*; & puiſqu'alors l'extrémité du rayon d'aberration paſſe entre *k* & *p*, c'eſt une preuve que l'amplitude d'aberration a été en augmentant. Au contraire, lorſque le rayon viſuel s'incline vers *a*, le rayon ordinaire auquel appartient le rayon d'aberration *r′ k*, diverge de plus en plus par

(b) Huyghens dit que cet angle eſt de 6d 40′, & il fait l'angle *nag* de 19d 3′, & le grand angle du rhombe, de 101d 52′; mais en général, ce ſavant me paroît avoir un peu forcé les meſures des principaux angles du rhomboïde, & des autres qui en dépendent. Je crois être parvenu à des meſures plus préciſes, au moyen des données dont j'ai parlé au même endroit de l'ouvrage cité.

rapport à la ligne *c b;* & puiſque l'extrémité du rayon d'aberration paſſe alors entre *k* & *l,* il en réſulte que l'amplitude d'aberration a été en diminuant. Si l'on veut apercevoir les images du milieu réunies en une ſeule, lorſque le rayon viſuel eſt incliné ſoit vers *b,* ſoit vers *a,* il faudra donc placer les deux points *i'*, *n,* à une plus grande diſtance que $\frac{1}{3}dg$, pour l'inclinaiſon vers *b*, & à une moindre diſtance pour l'inclinaiſon vers *a,* ce qui eſt conforme à l'obſervation.

Huyghens avoit obſervé, d'après un procédé différent, cette variation que ſuit l'amplitude d'aberration, & il eſt ſingulier que Newton qui étoit ſi exact, & qui connoiſſoit les réſultats d'Huyghens, s'en ſoit écarté ſur ce point, pour y en ſubſtituer d'autres qui ne s'accordent pas avec l'obſervation. On a même d'autant plus lieu d'en être ſurpris, qu'il ſemble que Newton auroit dû être frappé d'une propriété remarquable de l'amplitude d'aberration découverte par Huyghens. Elle conſiſte en ce que ſi l'on meſure cette ligne relativement à deux inclinaiſons égales, mais en ſens contraire, d'un rayon de lumière ſur la baſe ſupérieure du ſpath, on trouve que chacun des deux rayons d'aberration garde la même diſtance à l'égard du rayon qui a lieu pour l'incidence à angle droit, c'eſt-à-dire, de celui qui fait avec la perpendiculaire un angle de $6^d\ 20'$. Enfin Huyghens conſidérant toujours la réfraction extraordinaire comme produite par des ondes ſphéroïdales, avoit déterminé, d'après les propriétés de l'ellipſe, la loi que devoit ſuivre, ſelon lui, l'amplitude d'aberration, en variant ſous différentes inclinaiſons du rayon incident. Mais outre que cette détermination tient à une théorie qui ne paroît pas devoir être admiſe, j'ai trouvé que la conſtruction d'Huyghens ne repréſentoit l'amplitude d'aberration que pour certains cas, & que dans ceux ſur-tout où l'inclinaiſon du rayon incident étoit un peu conſidérable, elle ne ſatisfaiſoit plus aux obſervations. J'ai donc cherché une autre conſtruction qui fût à la fois plus ſimple & plus préciſe.

Soit toujours *gan (fig. 4)* l'angle que fait le rayon d'aberration avec la perpendiculaire *ag*, lorſque le rayon incident *a* eſt ſur la direction de cette perpendiculaire. Soit menée *gq*, qui faſſe un angle quelconque avec *gd*. Conſidérons deux inclinaiſons égales quelconques *ik*, *i'k*, du rayon incident, mais priſes en ſens contraire. Soit menée de chaque extrémité des rayons rompus *ke*, *ke'*, une ligne *er* ou *e'r'*, égale & parallèle à *gq*, & par le point *k* & le point *r* ou *r'*, ſoit menée *kl* ou *kl'*. J'ai remarqué d'abord que dans ce cas, on avoit ce réſultat général, que la ſomme des deux diſtances *el* + *e'l'*, étoit une quantité conſtante égale au double de *gn*.

Pour le prouver, concevons que l'on applique *ke'* ſur *ke*, en renverſant la baſe *e'l'* du triangle *e'kl'*, de manière que le point *l'* tombe ſur le point *y*, de l'autre côté du rayon *ke*, & le point *r'* ſur le point *z*. Ayant mené *rz*, cette ligne ſera évidemment parallèle à *dc*, à cauſe de l'égalité des angles *rel*, *zey*. De plus la ligne *ly* ſera égale à la ſomme des deux diſtances *el* + *e'l'*.

Or, ſi l'on ſuppoſe que le rayon *ke* change d'inclinaiſon, en reſtant fixe par ſon extrémité *e*, les lignes *ky*, *kl*, dans l'hypothèſe de *er*, *ez*, conſtantes, reſteront fixes par leurs points *z*, *r*, tandis que leurs extrémités ſupérieure & inférieure feront un mouvement le long des lignes *ab*, *dc*; donc dans tous les cas on aura, $kz : ky :: rz : ly$. Or il eſt aiſé de voir qu'à cauſe des parallèles *ab*, *rz*, *dc*, le rapport $kz : ky$, ſera conſtant; donc auſſi le rapport $rz : ly$ ſera conſtant, & puiſque *rz* eſt conſtant, *ly* le ſera pareillement. Mais plus le rayon *ke* approche d'être parallèle à la perpendiculaire *km*, plus auſſi *el* approche d'être égale à *ng*. Donc ſi l'on ſuppoſe que *ke* diffère infiniment peu de la perpendiculaire, on pourra faire la ligne *ly*, ou la ſomme des deux lignes *el*, *e'l'*, égale à 2 *ng*; donc puiſque cette ſomme eſt conſtante, elle ſera le double de *ng* dans tous les cas. Ce réſultat n'eſt autre choſe que celui d'Huyghens

dont nous avons parlé plus haut, mais généralisé & ramené aux propriétés des lignes droites.

Il s'agissoit de savoir si parmi toutes les inclinaisons de er sur dc, il y en avoit une qui donnât pour el une quantité représentative des variations en longueur de l'amplitude d'aberration. J'ai trouvé qu'en supposant que gq, ou er prolongée, fût inclinée sur l'arête ad, de manière que l'angle auc fût égal au grand angle plan des faces du rhomboïde, c'est-à-dire, de $101^d\ 32'\ 13''$, ce qui donne pour l'angle rel, 30^d à moins d'une minute près, on avoit des résultats sensiblement conformes à l'observation.

Déterminons d'abord la valeur de gq, en supposant, pour la facilité du calcul, que rel soit précisément de 30^d. Soit abaissée qs perpendiculaire sur dg; on aura $ns : qs :: gn : ag$, ou $ns : \frac{1}{2} gq :: \sqrt{(\frac{1}{18})} : \sqrt{(\frac{9}{2})}$; donc $ns = \frac{1}{18} gq$. Or, à cause de l'angle $qgn = 30^d$, on a $gs = gq \sqrt{(\frac{3}{4})}$; donc réunissant les valeurs de ns & de gs, la somme sera gn ou $\sqrt{(\frac{1}{18})} = gq\ (\frac{1}{18} + \sqrt{\frac{3}{4}})$, d'où l'on tire gq ou $er = \frac{\sqrt{(18)}}{1 + \sqrt{(243)}}$.

A l'aide de cette expression, il est facile de déterminer el. Ayant abaissé rh perpendiculaire sur ly, nous aurons, $lh : hr = \frac{1}{2} er :: el + em : km$; ou, $lh : \frac{\sqrt{(18)}}{2 + \sqrt{(972)}} :: el + em : \sqrt{(\frac{9}{2})}$; ce qui donne; $lh = \frac{el + em}{1 + 9\sqrt{(3)}}$. D'ailleurs $eh = gq\ \sqrt{(\frac{3}{4})} = \frac{\sqrt{(54)}}{2 + \sqrt{(972)}}$. Réunissant les valeurs de eh & de lh, on a, $el = \frac{\sqrt{(54)}}{2 + \sqrt{(972)}} + \frac{el + em}{1 + 9\sqrt{(3)}}$, d'où l'on tire, $el = \sqrt{(\frac{1}{18})} + \frac{em}{\sqrt{(243)}}$. Si l'on cherche la valeur de el', on trouvera $el = \sqrt{(\frac{1}{18})} - \frac{em}{\sqrt{(243)}}$; donc en général l'expression

de l'amplitude d'aberration eſt $\sqrt{(\frac{1}{18})} \pm \frac{em}{\sqrt{(243)}}$, le ſigne négatif étant pris pour le cas où l'amplitude va en diminuant.

D'après cette donnée, j'ai déterminé la valeur de l'angle d'incidence ſous lequel un point *l* (*fig. 1*) ſeroit vu à ſa vraie place, à l'aide du rayon d'aberration *kl*, c'eſt-à-dire, qu'alors ce rayon ſeroit ſur la direction prolongée du rayon viſuel; & j'ai trouvé que l'angle d'incidence, dans ce cas, étoit de $16^d\ 22'$, valeur qui diffère de $18'$ en moins, de celle qu'Huyghens a déterminée par les propriétés de l'ellipſe. Or l'angle *dag* étant de $18^d\ 27'$, on voit qu'il s'en faut d'environ 2^d que le rayon *kl* ne ſoit parallèle à *ad*.

Pour vérifier la loi que je viens d'expoſer, j'ai employé un procédé analogue à celui qu'Huyghens avoit imaginé pour meſurer les angles d'incidence & de réfraction des rayons par leſquels on voit la double image d'un objet à travers le ſpath. Un exemple fera concevoir facilement ce procédé. Ayant décrit ſur un papier le parallélogramme *abcd* (*fig. 1*), dans lequel le côté *ab* étoit égal à l'arête du rhomboïde que je voulois employer, puis ayant mené par un point quelconque pris ſur *ab*, la ligne *km* perpendiculaire ſur *dc*, j'ai tracé *ik* qui faiſoit avec *kr* l'angle d'incidence *ikr*, égal à 35^d; j'ai mené enſuite le rayon ordinaire *kl*, faiſant avec *km* un angle de $20^d\ 7'$, qui eſt celui que donne le rapport $3:5$, des ſinus. De plus, ayant trouvé, à l'aide de l'équation $el = \sqrt{(\frac{1}{18})} \pm \frac{em}{\sqrt{(243)}}$, & des autres données que fournit le rhomboïde, que l'angle *lkm* devoit être de $26^d\ 36'$, j'ai mené *kl* qui faiſoit avec *km* un angle de cette valeur. Enfin, j'ai prolongé *ik*, juſqu'à ce qu'elle rencontrât *cd*, ce que je ſuppoſe avoir lieu au point *ſ*.

Cela fait, j'ai tracé ſur un papier à part une droite *ſy* (*fig. 5*), que j'ai coupée par trois perpendiculaires *zſ*,

x l, t e, telles que les diſtances *s l, l e,* fuſſent les mêmes que dans la *fig. 1.* J'ai diſpoſé enſuite le rhomboïde, de manière que l'angle ſolide aigu de la baſe inférieure fût en deçà du point *s,* & que *e s* coïncidât avec la petite diagonale de cette même baſe. Puis faiſant en ſorte que mon rayon viſuel reſtât dans le plan *a b c d (fig. 1),* ce que je reconnoiſſois à ce que l'image de la ligne *e s (fig. 5)* paroiſſoit ſimple, j'ai incliné l'œil, en le retirant vers *y,* juſqu'à ce que l'image ordinaire de la ligne *t e,* coïncidât avec la ligne *s z* vue ſans réfraction. J'étois aſſuré alors que le rayon viſuel faiſoit l'angle d'incidence de 35^{d}, comme on en jugera aiſément par la comparaiſon des deux *figures 1 & 5.* Mais alors je voyois les deux images du milieu, ſavoir, l'image ordinaire de *t e,* & l'image d'aberration de *l x,* concourir en une ſeule; d'où j'ai conclu que l'amplitude d'aberration étoit égale à *e l (fig. 1),* & avoit la même valeur que celle qui eſt donnée par le calcul, d'après la loi indiquée. J'ai varié cette expérience de pluſieurs manières, en donnant différentes inclinaiſons au rayon viſuel, & il m'a toujours paru que le réſultat de l'obſervation étoit conforme à celui du calcul.

Non-ſeulement l'amplitude d'aberration n'a point une longueur conſtante, ainſi que l'avoit penſé Newton, mais elle ne reſte point parallèle à la petite diagonale du ſpath; car ſi cela étoit, quelle que fût la poſition du rayon viſuel, ſoit qu'il reſtât dans le plan *a b c d (fig. 1),* ſoit qu'il s'en écartât à droite ou à gauche, on pourroit toujours diſpoſer deux points dans la direction de la petite diagonale, ou d'une parallèle à cette diagonale, de manière que les deux images du milieu ſe confondiſſent en une ſeule. Pour le prouver, ſoit *a e b f (fig. 7)* la baſe ſupérieure du ſpath; *m p o g* ſa baſe inférieure; *a, o,* les plus grands angles ſolides; *n* un point ſitué ſur la diagonale *o m; s* une poſition quelconque de l'œil qu'il faut ſeulement concevoir ſitué de manière que le rayon ordinaire *s c n* venu du point *n,* ſoit oblique à l'égard du plan *a e b f.* Si l'on ſuppoſoit un

rayon de lumière qui tombât sur le spath, suivant la direction *s c*, il se diviseroit dans le spath en deux rayons, l'un ordinaire *c n*, & l'autre d'aberration, qui, dans l'hypothèse du parallélisme, iroit tomber quelque part en *r*, sur la ligne *o m*. Concevons maintenant un second point marqué en *r*. Il est clair que *r c s* seroit le rayon d'aberration, à l'aide duquel l'œil placé en *s* verroit l'une des deux images du point *r*; donc des quatre images, il y en auroit deux qui seroient vues à la fois sur la direction *s c*, dans le cas où *r n* représenteroit l'amplitude d'aberration.

Mais il est impossible de faire concourir les deux images du milieu en une seule, lorsqu'on laisse les points *r*, *n*, tous deux sur la petite diagonale. Voici ce que j'ai observé à cet égard. Concevons que le rayon visuel d'abord incliné vers *b*, & situé dans le plan des deux diagonales *a b*, *m o*, fasse, en allant de *b* vers *f*, un mouvement conique, de manière que restant toujours dans la même inclinaison à l'égard de la base supérieure du spath, & étant fixe à son point d'émergence, il parcourt par son extrémité supérieure la circonférence de la base d'un cône, dont l'axe seroit une perpendiculaire au point d'émergence. A mesure que ce rayon s'écartera de la première direction, l'observateur ne pourra voir coïncider les deux images du milieu, qu'en plaçant les points *r*, *n* sur une direction inclinée à la diagonale. Supposons que le point *r* reste fixe; il faudra placer le point *n* à la droite de la diagonale *mo*, comme en *z*. Tandis que le rayon visuel s'approchera de plus en plus d'un plan qui couperoit à angle droit le plan *a b o m*, la distance nécessaire entre le point *z* & la petite diagonale augmentera. Elle sera la plus grande possible, lorsque le rayon visuel se trouvera dans le plan dont nous venons de parler. Au-delà de ce plan, en allant de *f* vers *a*, il faudra diminuer la distance de *z* à *m o*, en laissant toujours le point *z* sur une oblique, telle que *r z*, qui diverge du côté de *o*, à l'égard de la petite diagonale. Plus le rayon visuel s'approchera du point *a*, & plus cette distance décroîtra,

jusqu'à

jusqu'à ce qu'enfin elle devienne nulle, lorsque le rayon visuel tombera de nouveau, en sens contraire, sur le plan des deux petites diagonales. Si ce rayon continue sa révolution vers *p*, les mêmes effets auront lieu dans un ordre opposé, c'est-à-dire, que pour faire coïncider les deux images du milieu, il faudra placer le point *n* de l'autre côté de la diagonale.

Si l'on conçoit les deux rayons qui se confondent en allant vers l'œil, comme ne formant qu'un seul faisceau qui tomberoit sur la surface du spath, pour y subir les deux réfractions, il est facile de voir que le rayon ordinaire provenu de ce faisceau, ira aboutir en *z*, & son rayon d'aberration en *r*. Concluons de-là que si un rayon de lumière tombe obliquement sur la surface du spath, hors du plan des deux diagonales, & si, par l'extrémité inférieure du rayon ordinaire, on mène une parallèle à la petite diagonale, l'amplitude d'aberration divergera par rapport à cette parallèle, en allant vers le petit angle solide *m* du spath.

Cette conséquence m'a paru conduire à expliquer la différence des distances auxquelles on aperçoit, à travers le spath, les deux images d'un même objet par rapport à l'œil, celle qui provient du rayon d'aberration, étant, comme je l'ai dit, sensiblement plus éloignée que l'autre. Voici le raisonnement sur lequel est fondée cette explication.

Les rayons à l'aide desquels on voit un point lumineux placé derrière un milieu diaphane, forment un cône dont la base est contiguë à la surface du milieu la plus voisine de l'œil; & au-dessus de cette surface, ils se replient vers l'œil par l'effet de la réfraction, en formant un cône tronqué, dont la plus petite base se confond avec la base du premier cône, & dont l'autre base qui est plus dilatée, a un diamètre égal à celui de la prunelle par laquelle les rayons entrent dans l'œil.

Quelqu'opinion que l'on adopte sur la distance précise à laquelle on aperçoit l'image vue par réfraction, il est

certain que, toutes choses égales d'ailleurs, cette distance est plus grande, lorsque les deux diamètres des bases du cône tronqué formé par les rayons qui sont dirigés vers l'œil, diffèrent moins entr'eux, ce qui fait que le sommet du même cône, prolongé par l'imagination derriere la surface réfringente, est plus éloigné de cette surface.

Cela posé, soit *acbf (fig. 6)* la base supérieure d'un rhomboïde de spath sous lequel est un point visible placé sur la petite diagonale de la base inférieure; soit *a* le grand angle solide. Supposons l'œil situé de manière que *rts* soit la circonférence de la prunelle, & que le rayon visuel se trouve dans le plan des petites diagonales des bases du spath. Concevons que le cône de rayons qui part du point visible, & à l'aide duquel l'œil aperçoit l'image ordinaire de ce point, ait pour base le cercle *cgho;* ce cercle sera en même temps la petite base du cône tronqué qui est formé par les rayons rompus, & qui a pour base supérieure *rts*. Or si nous considérons, par exemple, les deux rayons du cône intérieur, qui aboutissent en *g* & en *o*, il est facile de voir, d'après ce qui a été dit plus haut, que les rayons d'aberration qui leur correspondent, doivent se trouver aux extrémités *n*, *l*, de deux lignes *gn*, *ol*, obliques par rapport à la diagonale *ab*; car on peut considérer les rayons rompus au-dessus de la surface réfringente, savoir, *gr*, *nr*, *os*, *ls*, comme autant de rayons visuels particuliers, dont l'effet est le même que si l'œil étoit mû de manière que le centre de la prunelle se trouvât successivement en *r* & en *s*. Or, dans ce cas, l'œil verroit du point *r*, les deux images sur une ligne *gn* oblique par rapport à *ab*, & il les verroit du point *s*, sur une autre oblique *ol*, inclinée en sens contraire.

Concluons de-là, que les loix suivant lesquelles se réfractent les rayons d'aberration, tendent à rendre la distance *nl* entre deux de ces rayons, pris de deux côtés opposés, plus grande que la distance *go* des deux rayons ordinaires correspondans, & par conséquent à élargir la

baſe inférieure du cône tronqué, formé par les rayons d'aberration qui vont vers l'œil. Donc ſi l'on ſuppoſe ce cône prolongé derrière la ſurface réfringente, le point de ſon axe relativement auquel toutes les directions ſe compenſent, & que Newton appelle *le centre d radiation (a)*, doit ſe trouver plus reculé par rapport à l'œil & à la ſurface réfringente, que le point correſpondant qui appartient aux rayons ordinaires. Donc le lieu de l'image d'aberration, qui dépend de la poſition du centre de radiation, ſera auſſi plus éloigné que celui de l'image ordinaire.

Si l'on conçoit que le rayon viſuel ſoit ſitué de l'autre côté du ſpath, vers le point a, on aura des concluſions analogues, en appliquant le même raiſonnement que nous venons de faire.

Si le rayon viſuel ſort du plan des deux petites diagonales, & ſe rejette de côté, de manière que, par exemple, il paſſe entre les points b, f, alors $c'g'o'$ étant la baſe inférieure du cône tronqué, les lignes $g'n'$, $o'l'$, s'inclineront du même côté; mais la ligne $o'l'$ s'écartera davantage que la ligne $g'n'$ de la direction parallèle à ab, d'où il ſuit que l'on aura encore $n'l'$ plus grande que $g'o'$, quoique dans un moindre rapport que quand le rayon viſuel étoit dans le plan des deux diagonales. L'image d'aberration paroîtra donc auſſi, dans ce cas, au-delà de l'image ordinaire, par rapport à l'œil; mais la différence des diſtances ſera moins ſenſible que dans le cas précédent, ce que l'obſervation m'a paru confirmer. Ainſi les réſultats qui rectifient la théorie de Newton, relativement à la direction de l'amplitude d'aberration, ſervent à rendre raiſon de certains phénomènes qui ſans cela ſembleroient inexplicables.

Nous avons vu que l'angle d'incidence du rayon viſuel, ſous lequel l'image d'aberration ſeroit aperçue dans le prolongement de ce rayon, étoit à peu-près de $16^d \frac{1}{2}$, d'où

(a) *Lectiones opticæ, pars prior, ſect. 3.ª propoſ. 8.*

il ſuit que s'il y avoit un plan à l'égard duquel les ſinus d'incidence & de réfraction du rayon d'aberration fuſſent en rapport conſtant, ce plan s'abaiſſeroit au deſſous de la baſe ſupérieure du rhomboïde, en faiſant avec elle un angle *bky (fig. 2)*, d'environ 16d, $\frac{1}{2}$. Huyghens a trouvé que ce rapport étoit variable. La Hire le croyoit conſtant, ainſi que nous l'avons dit, & à peu-près égal à celui des mêmes ſinus dans la réfraction produite par le verre commun. Quoiqu'il ne ſoit pas difficile de voir que la loi établie plus haut, relativement à la réfraction du rayon d'aberration, exclut l'hypothèſe d'un plan fixe, admiſe par ce ſavant & par quelques autres, cependant comme ce point eſt très-intéreſſant par rapport à la théorie, j'ai cherché à l'éclaircir par une méthode qui n'exigeant aucune meſure d'angle, ne fût point ſujette aux petites erreurs d'obſervations qui peuvent laiſſer de l'incertitude ſur le réſultat. Je crois y être parvenu, à l'aide de la démonſtration ſuivante, uniquement fondée ſur un fait qui n'eſt point équivoque, c'eſt-à-dire, ſur l'augmentation en longueur de l'amplitude d'aberration dans un ſens, & ſa diminution dans le ſens contraire, quelle que ſoit d'ailleurs la loi de cette variation.

Concevons que le rayon incident *ik (fig. 1)* ſe meuve autour de la perpendiculaire *kr*, de manière à décrire la ſurface d'un cône droit dont cette perpendiculaire ſoit l'axe; le prolongement inférieur de ce rayon décrira en même tems, autour de *km*, la ſurface d'un ſecond cône oppoſé par le ſommet & ſemblable au premier. Soit *thq (fig. 8)* la baſe de ce ſecond cône, priſe ſur la baſe inférieure du rhomboïde; ſoit *m* le pied de la perpendiculaire *km (fig. 1)*, & *s* le pied de la perpendiculaire ſur le plan auquel ſe rapporte, par l'hypothèſe, la réfraction du rayon d'aberration.

Suppoſons d'abord que l'extrémité ſupérieure *i (fig. 1)* du rayon incident, ſoit dans la perpendiculaire élevée du point *q (fig. 8)* ſur le plan *thq*; l'extrémité inférieure du même rayon prolongé tombera évidemment ſur le point *h*,

situé du côté opposé, sur la grande diagonale de la base du rhomboïde. Supposons de plus que *e* soit l'extrémité inférieure du rayon réfracté ordinaire. Ayant décrit du point *m*, pris comme centre, & de l'intervalle *me*, la circonférence *ecz*, il est clair que, pendant la révolution du rayon incident & de son prolongement, l'angle d'incidence étant constant, le rayon ordinaire tombera toujours sur un point de cette circonférence.

Maintenant, l'extrémité inférieure du rayon incident étant toujours en *h*, tirons par le point *e* la ligne *te* parallèle à *ms*, & menons *hs*. Dans l'hypothèse d'un plan fixe pour la réfraction extraordinaire, il est clair que le rayon d'aberration, qui doit se trouver sur le même plan que le rayon incident dont le prolongement aboutit en *h*, & que la perpendiculaire terminée en *s*, tombera sur quelque point de la ligne *hs*; & si l'on suppose pour un instant, que l'amplitude d'aberration soit parallèle à *ms*, le rayon d'aberration aura son extrémité au point *l*.

Si le rayon incident prend d'autres positions quelconques, de manière que son prolongement inférieur tombe en *h'* ou en *h''*, on trouvera, par une construction semblable à la précédente, que l'extrémité du rayon d'aberration, dans la même hypothèse, doit toujours se trouver sur un point *l'* ou *l''*, situé dans l'intersection de la ligne *h's* ou *h''s* avec une parallèle à la ligne *ms*.

Cela posé, les triangles *hel* & *hms* étant semblables, on aura, *hm* : *ms* : : *he* : *el*. On trouvera de même, pour les triangles *h'e'l'*, *h'ms*, *h'm* : *ms* : : *h'e'* : *e'l'*. Or dans toutes ces proportions, les trois premiers termes étant constans, le quatrième terme *el* le sera aussi. Maintenant, dans toutes les positions du rayon incident que nous venons de considérer, l'amplitude d'aberration s'écarte à la vérité du parallélisme avec *ms*, d'après ce qui a été dit plus haut, & tombe sur quelque point *g*, *g'*, *g''*, situé à la gauche de *el*. Mais en même temps plus *el* approche de coïncider avec la diagonale *fx*, & plus aussi l'amplitude d'aberration

approche de ſe confondre avec la conſtante *e l*, en ſorte que quand l'extrémité du rayon incident tombe en *f* ou en *x*, l'amplitude d'aberration ſe trouve exactement ſur la ligne *f x*.

Il ſuit de-là que dans l'hypothèſe d'un plan fixe, la conſtante *e l* eſt la limite de l'amplitude d'aberration. Par conſéquent, ſi l'on fait *c u* & *d i* égales chacune à *c l*, ces deux lignes repréſenteront les amplitudes d'aberration relatives à deux inclinaiſons égales du rayon incident, priſes de deux côtés oppoſés & ſituées dans le plan *a b c d (fig. 1)*. Or l'obſervation donne évidemment *d i* plus courte que *c u*, comme nous l'avons vu plus haut; donc l'hypothèſe d'un plan fixe eſt inadmiſſible, d'après cette ſeule condition que le rayon réfracté ſoit ſur le même plan que le rayon incident & la perpendiculaire, ce qui eſt bien éloigné de ſuffire, puiſqu'il reſteroit à prouver que le rapport des ſinus d'incidence & de réfraction eſt conſtant. Cette démonſtration, comme l'on voit, eſt générale, & a également lieu, quelle que ſoit la poſition du plan auquel on voudroit rapporter la réfraction du rayon d'aberration.

Je paſſe maintenant aux effets produits par la ſuperpoſition de deux rhomboïdes. Suppoſons d'abord que ces rhomboïdes ayent leurs faces homologues reſpectivement parallèles. Dans ce cas, ſoit qu'on les écarte l'un de l'autre ou qu'on les mette en contact par leurs baſes, l'œil ne verra que deux images de l'objet, qui ſeulement ſeront plus écartées l'une de l'autre que s'il n'y avoit qu'un ſeul rhomboïde.

Cette expérience prouve que les rayons qui ſortent du premier rhomboïde, pour paſſer dans le ſecond, ne ſe ſoudiviſent plus en traverſant celui-ci; car ſi cela étoit, l'œil verroit quatre images de l'objet, l'une produite par un rayon qui feroit, dans les deux ſpaths, la fonction de rayon ordinaire; une ſeconde, par un rayon qui feroit, dans les deux ſpaths, la fonction de rayon d'aberration; une troiſième, par un rayon ordinaire dans le ſpath

inférieur, devenu rayon d'aberration dans l'autre ſpath, & enfin, une quatrième par un rayon qui préſenteroit le cas inverſe du précédent : mais, au contraire, les rayons ſortis du premier ſpath demeurant ſimples en traverſant le ſecond, l'œil ne peut voir que deux images de l'objet, à l'aide de deux rayons, l'un ordinaire & l'autre d'aberration, dont chacun fera la même fonction dans les deux ſpaths, ce qui s'accorde avec le réſultat de Newton, expoſé vers le commencement de ce Mémoire.

Si l'on place les deux rhomboïdes de manière que les arêtes *ad, de,* & *bc, cf, (fig. 9)* des quadrilatères *abcd, dcfe,* faſſent, d'une part, un angle ſaillant, & de l'autre, un angle rentrant, auquel cas les plans de réfraction perpendiculaires ſeront toujours parallèles, l'œil ne verra encore que deux images, pourvu toutefois que le rayon viſuel ne ſoit pas trop incliné; car ſi on lui fait prendre une direction très-oblique, & qui de plus ſoit dans un plan incliné à celui qui paſſe par les petites diagonales des baſes, l'œil verra quatre images. Cette circonſtance, comme on le voit, fait exception au réſultat de Newton, & prouve qu'il n'eſt pas rigoureuſement vrai que, dans le cas préſent, les rayons ſortis du premier ſpath ne ſe diviſent plus en paſſant dans le ſecond.

Si les deux rhomboïdes ont des hauteurs égales, & que le rayon viſuel étant dans le plan du quadrilatère *abcd*, le point viſible *t* ſoit auſſi dans ce plan, l'œil ne verra qu'une ſeule image, au lieu de deux. Car ſoit *o* la poſition de l'œil, *trnko* la route d'un rayon ordinaire qui porteroit à l'œil une image du point *t*, la partie *rn* aura pour rayon d'aberration, dans le ſpath inférieur, la ligne *rl*, ſituée de manière que *ln* ſoit l'amplitude d'aberration. Imaginons que la partie *ok*, conſidérée comme un faiſceau de rayons incidens, fourniſſe auſſi un rayon d'aberration au ſpath ſupérieur, ce rayon ſera évidemment *kl*; donc le rayon *rl*, en paſſant dans le ſpath ſupérieur, prendra la direction *lk*, & après ſon

émergence, ſe confondra avec la partie *k o;* donc l'œil ne verra qu'une ſeule image de l'objet, ſuivant la direction *o k.*

Si les plans de réfraction perpendiculaire ſont à angle droit les uns ſur les autres, de manière que les diagonales des baſes adjacentes ſe coupent auſſi à angle droit, l'œil ne verra encore que deux images, pourvu que le rayon viſuel ne ſoit pas trop oblique, ou ne le ſoit que dans un certain ſens : car ſoit *a f b c (fig. 10)* la baſe ſupérieure du rhomboïde de deſſous, *i l m n* la baſe ſupérieure de l'autre rhomboïde; ſoit *a* le grand angle ſolide du premier, & *l* celui du ſecond. Si le rayon viſuel paſſe entre les points *i*, *n*, & qu'il ſoit incliné ſous un angle très-aigu, l'œil verra quatre images, dont les deux nouvelles ſeront ſeulement plus foibles que les autres, ce qui annonce une ſeconde ſoudiviſion des rayons dans le paſſage d'un rhomboïde à l'autre, & par conſéquent fait une nouvelle exception aux réſultats de Newton.

Enfin, ſi les deux rhomboïdes ont leurs plans de réfraction perpendiculaire, dans quelqu'une des poſitions compriſes entre le parallélíſme & l'angle droit, l'œil verra, en général, quatre images du même point. Suppoſons, pour mieux développer l'obſervation, que le rayon viſuel ſoit perpendiculaire aux baſes des ſpaths, ou qu'il n'ait que l'inclinaiſon convenable; ſuppoſons de plus que les plans de réfraction perpendiculaire étant d'abord à angle droit l'un ſur l'autre, comme le repréſente la *figure 10*, on faſſe tourner peu à peu le rhomboïde ſupérieur, en ſorte que le point *m*, par exemple, qui étoit ſur la même ligne que les points *a*, *b*, s'avance vers le point *f (fig. 11)*. Lorſque ce rhomboïde aura fait un certain mouvement, on commencera à apercevoir deux nouvelles images, d'abord très-foibles, qui augmenteront d'intenſité, à meſure que le rhomboïde continuera ſa révolution. Ces images jointes aux deux premières, ſeront diſpoſées aux quatre angles d'un quadrilatère dont la figure eſt variable, ſuivant la poſition des rhomboïdes. En même temps

temps les deux premières images s'affoibliront insensiblement, en sorte qu'il y aura un terme où les quatre images auront la même intensité. Passé ce terme, si le rhomboïde supérieur continue de se mouvoir circulairement, les deux nouvelles images augmenteront toujours d'intensité, les autres s'affoibliront de plus en plus, jusqu'à ce qu'on ne voye plus que les deux premières; ce qui arrivera avant que le rhomboïde supérieur ait achevé un quart de révolution, c'est-à-dire, avant que le point *m* soit arrivé sur la même ligne que les points *f*, *e*. Alors, si l'on poursuit le mouvement du rhomboïde supérieur, de manière à compléter la demi-révolution, on aura de nouveau des effets tout semblables aux précédens. Ce fait important pour la théorie, présente cependant aussi une circonstance qui tend à modifier les résultats de Newton. Car les choses étant dans l'état où les représentent la *figure 11*, de manière que le grand angle solide à la base inférieure du rhomboïde de dessous soit en *a*, & celui à la base inférieure de l'autre rhomboïde au point *l*, si le rayon visuel s'incline sous un certain angle, de manière qu'il passe entre les points *i*, *e*, l'œil ne verra plus que deux images; d'où il suit que, dans ce cas, les rayons sortis du premier spath restent simples en pénétrant le second.

Parmi les différentes manières dont on peut varier l'expérience qui vient d'être citée, il en est une qui m'a paru digne de remarque; voici en quoi elle consiste. Les deux rhomboïdes étant disposés comme dans le cas précédent, & l'œil étant placé de manière à apercevoir distinctement quatre images, je prends une bande étroite de carte, terminée en pointe aiguë; je l'insère doucement entre les bases adjacentes des deux spaths, jusqu'à ce que la pointe paroisse plongée dans l'une des deux images que j'apercevois lorsque les deux spaths avoient leurs faces homologues disposées semblablement. J'observe qu'alors la seconde image de la même pointe correspond exactement à l'une des deux nouvelles images produites par le changement de position

du ſpath ſupérieur. Cette obſervation prouve que chacune des deux parties d'un rayon qui s'eſt ſous-diviſé en pénétrant un premier ſpath, & dont l'une fait l'office de rayon ordinaire, & l'autre celui de rayon d'aberration, ſe ſous-diviſe dans le ſecond ſpath ſitué convenablement, préciſément comme ſi elle étoit envoyée par un point lumineux placé à l'endroit de ſon immerſion dans ce ſpath.

On voit par tout ce qui précède, que les réſultats indiqués par Newton, tant ſur la diviſion des rayons qui pénètrent ſucceſſivement les deux ſpaths, que ſur la grandeur & la direction de l'amplitude d'aberration, ne ſont pas exactement conformes aux obſervations. Cela n'empêche pas que les conſéquences qu'il en tire par rapport à la cauſe phyſique des phénomènes, ne paroiſſent s'appliquer en général aux véritables réſultats.

Cet illuſtre géomètre conſidère les rayons de la lumière, comme des eſpèces de priſmes à quatre pans, dont deux oppoſés entr'eux, & qu'il appelle *pans de réfraction extraordinaire*, ont des propriétés différentes de celles des deux autres pans. Ces propriétés ſont telles, que quand l'un ou l'autre des pans de réfraction extraordinaire ſe trouve tourné vers la région de cette même réfraction que nous avons dit être ſituée dans le voiſinage du petit angle ſolide, la ſubſtance propre du ſpath exerce ſur lui une action particulière, qui l'attire vers ce même angle. Au contraire, ſi c'eſt l'un des deux autres pans qui ſoit tourné vers la région de la réfraction extraordinaire, les rayons auxquels appartiennent ces pans, ſubiront la réfraction ordinaire.

Or les différens rayons d'un même faiſceau qui tombe ſur la ſurface d'un ſpath, ayant leurs pans diverſement tournés, de manière que les uns ſont diſpoſés pour ſubir l'action qui détermine la réfraction ordinaire, & les autres pour ſubir celle d'où dépend la ſeconde réfraction, il s'enſuit que ce faiſceau, à ſon immerſion dans le ſpath, doit ſe diviſer en deux parties, dont chacune éprouvera l'eſpèce de réfraction analogue à ſa poſition.

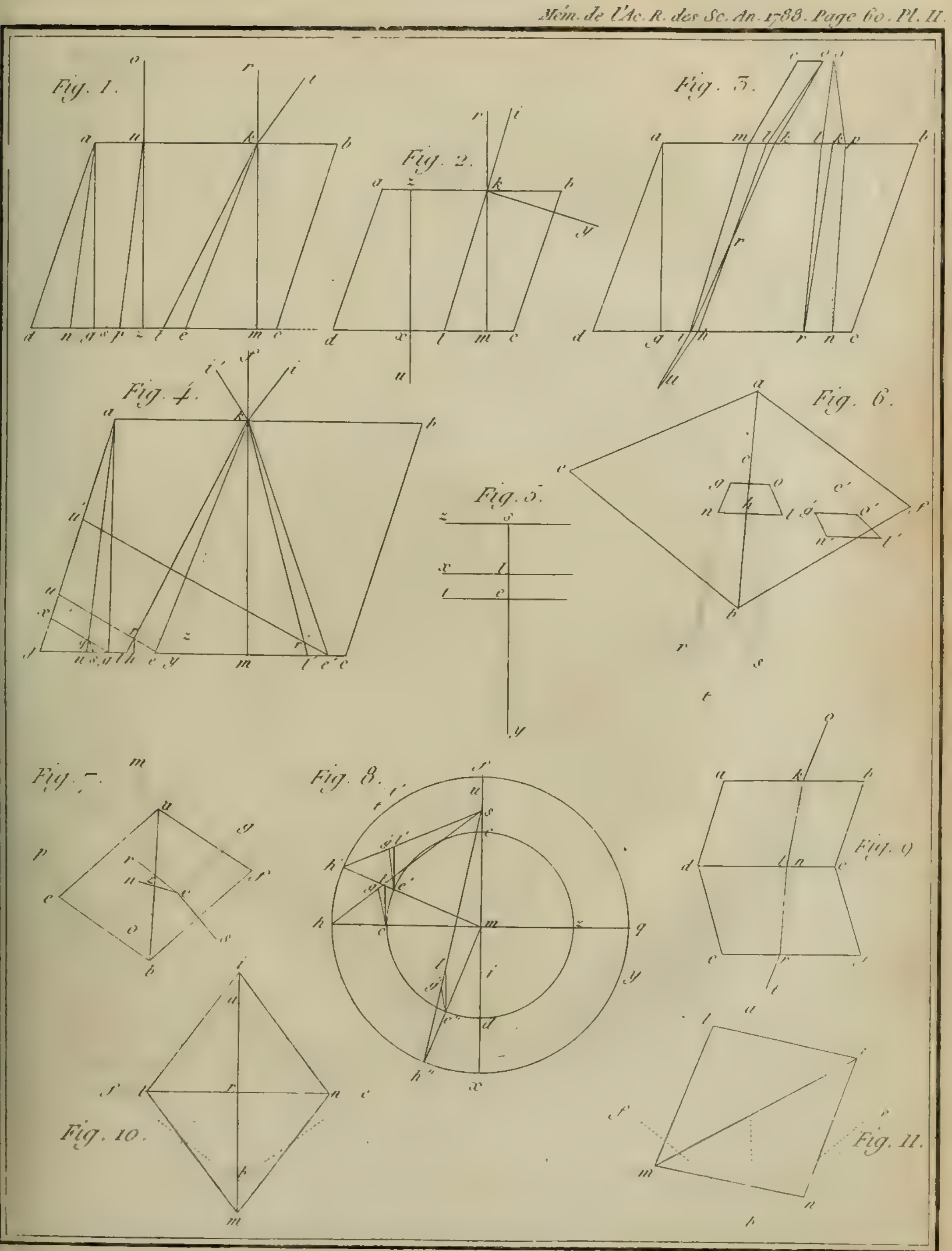
L'existence de ces propriétés, suivant Newton, dérive nécessairement des phénomènes qui ont lieu, lorsque l'on dispose deux spaths l'un au-dessus de l'autre, de manière que leurs pans de réfraction perpendiculaire soient successivement parallèles, ou à angle droit, ou inclinés l'un sur l'autre. Car dans le premier cas, les rayons qui étoient attirés vers la région de la réfraction extraordinaire du spath inférieur, ayant un de leurs pans analogues à cette réfraction, tourné vers la même région dans le spath supérieur, soit que les angles solides des deux spaths se trouvent situés semblablement, ou à contre-sens, ces rayons ne subiront encore dans le second spath que la réfraction extraordinaire. Quant aux autres rayons, il est visible qu'ils se trouvent situés dans les deux spaths, de manière à y subir la réfraction ordinaire.

Dans le second cas, les rayons qui étoient attirés vers la région de la réfraction extraordinaire du spath inférieur, ayant ceux de leurs pans qui sont analogues à cette réfraction, situés à angle droit par rapport à la région de la réfraction extraordinaire dans le spath supérieur, n'y subiront que la réfraction ordinaire, & le contraire aura lieu pour les autres rayons.

Enfin, dans le troisième cas, les rayons qui tendoient vers la région de la réfraction extraordinaire dans le spath inférieur, ayant ceux de leurs pans qui sont susceptibles de cette réfraction, situés dans une position-moyenne par rapport au spath supérieur, l'effet qui en résulte doit participer des deux extrêmes; c'est-à-dire, qu'une partie des rayons de chaque faisceau sera attirée vers la région de la réfraction extraordinaire, & une autre partie subira la réfraction ordinaire; d'où il suit qu'alors le faisceau se divisera de nouveau dans le spath supérieur, comme s'il partoit d'un point visible placé à l'endroit de son immersion dans le même spath. Il en faut dire autant des rayons qui s'étoient réfractés à l'ordinaire dans le premier spath.

Les expériences que j'ai faites ſur la duplication des images, s'accordent, en général, comme je l'ai dit, avec cette explication. Il y a ſur-tout une circonſtance qui m'a paru bien remarquable, dans celle qui conſiſte à faire tourner le rhomboïde ſupérieur au-deſſus de l'autre ; c'eſt la gradation d'intenſité que l'on obſerve entre les images, dont les deux nouvelles ſont d'abord à peine viſibles, puis ſe renforcent peu à peu, à meſure que l'on fait mouvoir circulairement le ſpath ſupérieur, tandis que les deux premières images s'affoibliſſent en paſſant par des degrés contraires, juſqu'à ce qu'elles diſparoiſſent entièrement. Ces effets ſemblent indiquer que le rayon d'aberration, dont les pans de réfraction extraordinaire étoient d'abord exactement tournés vers la région de la même réfraction, dans le ſpath ſupérieur, ſe ſous-diviſe peu à peu, à meſure que pendant le mouvement de ce ſpath, la région de la réfraction extraordinaire change de poſition, en ſorte que les molécules du rayon, qui d'abord obéiſſoient toutes à-la-fois à l'action émanée de cette même région, échappent les unes après les autres à cette action, pour ſubir la réfraction ordinaire. Le contraire arrive par rapport à l'autre rayon, qui avoit ſes pans de réfraction extraordinaire à angle droit ſur la région de la même réfraction ; car les pans dont il s'agit ſe trouvant peu à peu dans une poſition plus favorable à l'égard de cette région, pendant la révolution du ſpath, ſubiſſent les uns après les autres l'action qui en émane, & le rayon finit par être tout entier dans le cas de l'aberration.

Nous avons vu cependant que les effets qui viennent d'être expliqués d'après les principes de Newton, étoient ſujets à certaines déviations, en ſorte que quand les rayons tomboient très-obliquement ſur les ſurfaces réfringentes, une partie de chaque faiſceau échappoit à la loi qui eût agi ſur elle dans le cas d'une moindre obliquité. Je me propoſe d'examiner dans un plus grand détail ces eſpèces d'exceptions, & en même temps de faire des recherches


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.

ultérieures pour déterminer la loi que ſuit l'amplitude d'aberration dans tous les plans qui s'écartent de la ſection principale, faite ſur les petites diagonales des baſes. Mais j'ai cru devoir, en attendant, communiquer à l'Académie un travail dont les réſultats, ſans donner l'entière ſolution du problème, m'ont paru du moins propres à éclairer la route qui doit y conduire.



EXTRAIT

DES

OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES ET PHYSIQUES,

Faites par ordre de Sa Majesté,

A l'Observatoire royal, en l'année 1788.

M. le Comte DE CASSINI, Directeur.

M.rs NOUET, DE VILLENEUVE & RUELLE, Élèves.

INTRODUCTION.

L'ON a employé cette année les mêmes instrumens pour les observations, les mêmes méthodes & les mêmes élémens pour les calculs, que ceux qui ont été décrits dans les extraits précédens. La reconstruction totale des voûtes de l'observatoire ayant entraîné des réparations considérables dans toutes les parties de l'édifice, qui ne pourront être entièrement achevées que vers le milieu de l'année 1790, il a fallu démonter tous nos ateliers & renoncer absolument à la construction projetée des instrumens. Nous avons donc pris le parti, pour ne point perdre l'intervalle précieux de quatre années, de commander au-dehors les nouveaux instrumens. Nous attendons de jour en jour une grande lunette des passages, que le célèbre M. Ramsden nous annonce devoir incessamment nous parvenir, & à la construction de laquelle il nous assure avoir mis toute la perfection de travail dont

il eſt capable, c'eſt aſſez dire que cet inſtrument doit être un chef-d'œuvre. Le même artiſte a déjà auſſi commencé pour l'obſervatoire royal un grand cercle entier tournant, d'une conſtruction toute nouvelle. Nous donnerons une deſcription détaillée de ces deux inſtrumens auſſitôt que nous en ſerons poſſeſſeurs.

En attendant, nous avons fait uſage pour l'obſervation des paſſages, de notre lunette méridienne de trois pieds & demi de foyer; mais ſon ouverture qui n'eſt que de vingt-deux lignes, ne nous permet d'obſerver que très-peu d'étoiles en plein jour, & très-rarement Mercure : c'eſt la raiſon pour laquelle on trouve ſi peu d'obſervations de cette planète dans nos extraits; à la vérité, les mauvais temps y contribuent encore plus que le peu de force de la lunette.

Le grand quart-de-cercle mobile de ſix pieds avec lequel nous déterminons les hauteurs méridiennes des aſtres, eſt un inſtrument d'autant plus précieux pour nous, que l'uſage que l'on en fait à l'obſervatoire royal depuis quarante-ſix ans, a mis à portée de le mieux connoître. Lorſqu'en 1778, après avoir entrepris de calculer & de comparer toutes les obſervations faites avec ce quart-de-cercle depuis 1743, je publiai dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences, page 484,* le premier fruit de ce travail conſidérable, la détermination de la quantité abſolue de l'obliquité de l'écliptique & celle de ſes variations; les réſultats ne ſe trouvant pas tout-à-fait d'accord ſoit avec les opinions, ſoit avec les obſervations de quelques aſtronomes, on n'héſita point de rejeter toute la difference ſur l'erreur de notre inſtrument. On ſe crut d'autant mieux fondé à le taxer d'imperfection, que ſa conſtruction étoit ancienne, que ſa carcaſſe étoit en fer, beaucoup plus ſimple, beaucoup plus légère, tout autrement diſpoſée enfin que celle des inſtrumens modernes. Moi-même je crus prudent de ne chercher à défendre mon

inſtrument qu'après lui avoir fait ſubir toutes les vérifications qui pouvoient aſſurer ſon exactitude ou l'infirmer. J'y fis même porter une nouvelle diviſion tout à côté de l'ancienne; & ce ne fut qu'après pluſieurs années de comparaiſons, d'obſervations & de vérifications multipliées, que je me crus en droit d'aſſurer la bonté de l'inſtrument & l'exactitude de ſes réſultats. (Voyez *Mém. Ac. année 1782, page 281.*) J'inſiſtai même ſur la ſupériorité que devoit donner à cet inſtrument l'application de deux lunettes fixes, l'une à l'extrémité & l'autre au milieu du limbe, ce qui donne l'avantage d'obſerver la hauteur du même aſtre ſur différens points de la diviſion, & avec deux lunettes différentes qui ſe vérifient tantôt l'une par l'autre, tantôt ſéparément, & donnent ainſi des réſultats doubles & triples, comme ſi l'on employoit deux ou trois inſtrumens différens. Je ne connois que l'inſtrument de l'obſervatoire royal qui ait cet avantage, & j'ai lieu de m'étonner qu'on ne le procure pas à tous les grands inſtrumens mobiles, auxquels je crois devoir donner la préférence ſur les autres, par la facilité que l'on a de les vérifier fréquemment, & comme je ne manque pas de le faire, dans les différentes ſaiſons de l'année. Ces vérifications nombreuſes & répétées m'ont fait reconnoître qu'il n'y a peut-être pas un auſſi grand inconvénient qu'on pourroit l'imaginer à compoſer la carcaſſe des inſtrumens en fer. Je ſais tous les raiſonnemens que l'on peut faire à ce ſujet, tout ce que l'on peut dire contre l'emploi de deux métaux différens dans la conſtruction du même inſtrument; je conviens même qu'il eſt plus ſûr de n'y employer que le même métal pour toutes les parties. Mais la pratique, mais l'expérience me montrent que dans le grand quart-de-cercle mobile de l'obſervatoire, dont la carcaſſe eſt en fer & le limbe en cuivre, la poſition des lunettes n'éprouve aucune variation ſenſible de l'hiver à l'été, & que cet inſtrument dans tous les temps donne les

mêmes

mêmes résultats (1). Enfin l'exactitude de notre instrument une fois reconnue, j'en tire une conséquence bien importante pour l'art de la construction, c'est que la multiplicité des barres d'assemblage que l'on met dans la carcasse des instrumens modernes, par lesquelles on croit assurer leur solidité, est pour le moins inutile (2); on ne pourra en effet se refuser de le croire, comme ce que j'ai avancé plus haut, si je prouve que le quart-de-cercle mobile de six pieds de l'observatoire royal, fait & divisé il y a quarante-sept ans par le sieur Langlois, dont la carcasse est en fer & le limbe en cuivre, & qui n'a que quatre rayons d'assemblage, donne les mêmes résultats que les instrumens modernes les plus grands & les plus parfaits.

Mon père, dans son dernier ouvrage intitulé *Description géométrique de la France*, a déjà fait connoître *(page 187)* une comparaison des différens arcs de notre quart-de-cercle mobile

(1) Il faut faire attention que dans les observatoires où l'on prend quelque soin des instrumens, où ils sont renfermés dans des cabinets bien clos, à l'abri des injures & des fortes impressions de l'air, le froid, la chaleur & les variations de la température ne parviennent à eux que très-atténués & *graduellement*, d'une manière en cela fort différente de celle que les physiciens emploient pour soumettre les métaux à leurs expériences sur la dilatation, d'où il pourroit arriver que les résultats qu'ils en tirent ne fussent nullement applicables à l'état & aux circonstances où se trouvent nos instrumens. Je ne prétends pas cependant révoquer en doute l'effet de la chaleur & du froid, mais je crois qu'il est beaucoup moindre sur nos instrumens bien soignés, bien abrités, qu'on voudroit le faire craindre. Je pense même que dans la détermination des hauteurs des astres, la plus grande source d'erreur, la cause de ces différences qui se remarquent quelquefois dans les résultats de l'observation, c'est plus que toute autre chose l'inégalité des réfractions causée par les variations très-fréquentes de l'atmosphère dont les différentes couches changent d'état selon la force, la direction & même la qualité de certains vents qui eux-mêmes sont différens à diverses élévations. La multitude d'observations que font à l'observatoire, dans le cours d'une année, trois & quatre observateurs sans cesse en activité, a donné lieu à plusieurs remarques intéressantes à ce sujet, que nous ferons connoître lorsqu'une plus longue expérience les aura confirmées ou rectifiées.

(2) Peut-être même plus nuisible qu'avantageuse, en augmentant la masse des instrumens, la difficulté de leur assemblage, & offrant plus de pièces & de surfaces à l'effet de la dilatation, tel qu'il soit.

avec ceux d'un grand quart-de-cercle mural de ſix pieds & demi de rayon conſtruit par le célèbre Bird, acquis par M. Bergeret, & placé à l'école royale militaire. En voici les réſultats.

EN MAI 1783.			MURAL de l'École Milit.	MOBILE de l'Obſervatoire.	DIFFÉR.
			D. M. S.	D. M. S.	S
Diſtances	entre α de la Lyre	& π du Sagittaire.	59. 53. 48	59. 53. 50	2
		& *Syrius*.......	54. 59. 20	54. 59. 18	2
		& *Arcturus*......	18. 15. 56	18. 15. 58	2
	entre π du Sagitt. & α de la Couronne.		48. 45. 58	48. 46. 1	3
	entre *Arcturus*...	& α de la Vierge..	30. 19. 29	30. 19. 29	0
		& la Chèvre....	25. 26. 10	25. 26. 13	3

Voici encore une comparaiſon de notre inſtrument avec celui de l'obſervatoire de Greenwich ; elle réſulte des déclinaiſons des mêmes étoiles que M. Maskelyne & nous avons déterminées & publiées chacun de notre côté.

ÉTOILES.	DÉCLINAISON MOYENNE AU 1.er JANVIER 1788. Selon M. Maskelyne	Selon Nous.	DIFFÉR.
	D. M. S.	D. M. S.	Sec.
Aldebaran.........	16. 4. 8	16. 4. 4	+ 4
Arcturus..........	20. 17. 33	20. 17. 35	— 2
Regulus..........	12. 59. 47	12. 59. 50	— 3
Syrius............	16. 26. 13	16. 26. 13	— 0
α Balance.........	15. 8. 56	15. 8. 59	— 3
α Bélier..........	22. 27. 9	22. 27. 5	+ 4
α Couronne........	27. 26. 18	27. 26. 18	+ 0
α Orion...........	7. 21. 11	7. 21. 9	+ 2
α Vierge..........	10. 2. 57	10. 2. 53	+ 4
β Lion............	15. 45. 27	15. 45. 29	— 2
β Vierge..........	2. 57. 37	2. 57. 35	+ 2

Je n'étendrai pas plus loin la comparaison & l'apologie de notre instrument, d'autant que publiant comme nous le faisons chaque année un catalogue étendu des hauteurs méridiennes telles que nous les observons, tout astronome pourra examiner, discuter & comparer nos observations avec les siennes.

Il me reste à dire un mot de notre pendule. Nous étant aperçu de quelques irrégularités dans celle dont nous nous étions servi pendant le cours de 1787, nous y en avions substitué, au mois de septembre, une nouvelle construite exprès & avec soin par un de nos meilleurs artistes. Pendant les sept premiers mois, la marche de cette pendule a été de la plus grande régularité. Mais au mois de mai la chaleur a un peu changé son mouvement, & nous avons reconnu dès-lors, ainsi qu'on le verra par le tableau mis à la fin de cet extrait, qu'elle étoit un peu trop sensible aux variations de la température. A la vérité, comme nous avons l'attention de ne jamais laisser passer un seul jour favorable sans vérifier notre pendule & par le soleil & par les étoiles, ses moindres variations nous sont connues, & il n'en peut résulter d'erreur dans la réduction des observations, d'autant que nous n'avons rapporté dans cet extrait aucune de celles qui se sont trouvées trop éloignées d'une vérification de la pendule. Mais d'après cette sensibilité reconnue dans notre horloge aux variations de la température, nous avons dû craindre que dans les froids excessifs qui ont régné pendant les cinq dernières semaines de l'année, son mouvement n'éprouvât, du jour à la nuit, des irrégularités difficiles à saisir & à déterminer, c'est ce qui nous a engagés à supprimer une grande partie des observations faites dans ces circonstances, comme moins dignes de confiance que les autres.



HISTOIRE PHYSIQUE

DE L'ANNÉE 1788.

Il a plu les huit premiers jours de *Janvier*, & régné jusqu'au 11 un très-grand vent qui a été suivi de plusieurs jours de brouillards, accompagnés de petites gelées; le vent a repris ensuite & il a fait assez vilain temps jusqu'à la fin du mois. La température a été douce pour la saison.

Il a tombé de la neige dans le mois de *Février*, mais en petite quantité; elle a fondu presqu'aussitôt. Depuis le 12 jusqu'à la fin du mois il a plu tous les jours, excepté les 18 & 19. En conséquence, la température a été humide, mais peu froide.

Il y a eu beaucoup de pluie & de vent les dix premiers jours & les dix derniers du mois de *Mars*. De la neige le 2 & le 10, & de fréquens brouillards du 15 au 28. A quelques petites gelées près dans le commencement du mois, la température, sur-tout depuis le 20, a été très-douce; il y a même eu des éclairs & du tonnerre le 22. L'aurore boréale du 28 a été peu considérable.

Les pluies & les grands vents ont régné pendant les huit premiers jours du mois d'*Avril*. Il a tombé de la grêle mêlée de neige le 4 & le 5; le temps ensuite a été assez beau jusqu'au 22, & les quatre derniers jours du mois, on a observé trois aurores boréales. Le 1.er, le 29 & le 30, qui ont été peu considérables.

Les quatorze premiers jours du mois de *Mai* ont été très-beaux, très-secs & très-chauds, à l'exception du 9 où il y a eu grêle, tonnerre & pluie très-abondante; mais ensuite il a tombé tous les jours de la pluie du 15 au 22 (excepté le 20) & les quatre derniers jours du mois. Le tonnerre & le grand vent ont été fréquens. Dans l'intervalle du 22 au 28 où il a fait assez beau, on a observé deux aurores boréales, l'une le 24, l'autre le 25 : celle du 24 a duré depuis dix heures un quart jusqu'à onze heures trois quarts; elle s'étendoit de l'ouest au nord-ouest, des jets de lumière d'un rouge fort vif s'élevoient jusqu'au pôle : celle du 25,

ainſi qu'une autre obſervée le 2 de ce mois, étoit très-foible. La température de ce mois a été très-chaude.

Les quatorze premiers jours du mois de *Juin* ont été beaux, mais dans le reſte du mois il n'y a pas eu un ſeul jour ſans pluie; cependant la chaleur a été forte du 14 au 21, & il a tonné fréquemment dans cet intervalle. On a obſervé le 16 un arc-en-ciel lunaire, dont les couleurs étoient foibles; on diſtinguoit cependant très-bien le rouge à la convexité de l'arc, & une couleur verdâtre à ſa concavité.

Le 13 de *Juillet* ſera long-temps mémorable par le fléau dont il a été l'époque, & qui a cauſé dans une grande partie de la France de ſi affreux ravages. Le 3 de ce mois, jour de nouvelle lune, le ciel fut beau toute la matinée, mais fort orageux après midi. A $7^h\ 40'$ du ſoir il tomba de la grêle dont pluſieurs grains avoient juſqu'à dix lignes de diamètre; à onze heures du ſoir il y eut une aurore boréale, mais foible. Du 5 au 10, c'eſt-à-dire, tout le reſte du quartier il n'y eut pas un jour ſans pluie. Le 11 il fit aſſez beau, le thermomètre monta à $24^d,8$. Le 12 par un temps couvert la chaleur fut encore plus forte & le thermomètre s'éleva juſqu'à $26^d,8$. Sur les huit heures du ſoir il éclaira beaucoup & l'on entendit pluſieurs coups de tonnerre; le reſte de la ſoirée fut aſſez beau, & le baromètre qui ſe ſoutenoit preſque toujours depuis le commencement du mois vers vingt-huit pouces zero ligne n'annonçoit rien de particulier, puiſqu'à dix heures du ſoir il baiſſa à peine d'une ligne. Le lendemain 13 au matin, le ciel fut obſcurci de toute part; vers les huit heures un vent violent ſoufflant de l'oueſt, fut accompagné de coups de tonnerre & une grèle épouvantable commença à ſe répandre. Au centre & au midi de la capitale il n'en tomba que des grains fort ordinaires, noyés dans une averſe abondante qui dura depuis huit heures & demie juſqu'à neuf heures & demie; mais au faubourg Saint-Antoine la groſſeur de la grêle fut exorbitante & a tout fracaſſé. Heureux ſi ce déſaſtre ne ſe fût pas étendu au-delà; mais arrivé à Paris après avoir traverſé le Poitou, la Touraine, la Beauce, le pays Chartrain, il a continué ſa funeſte route à travers l'Iſle-de-France, la Picardie & la Flandre. Ce n'eſt pas ici le lieu de

donner ces détails auſſi curieux qu'effrayans des redoutables effets de cette grêle mémorable; l'Académie royale des Sciences ſe propoſe d'en rendre compte au public. Le lendemain de cet orage & les huit jours ſuivans, il fit un fort beau temps; il n'y eut même dans le reſte du mois que cinq jours de pluie, & l'atmoſphère n'en fut pas refroidie. Une aurore boréale aſſez belle eut lieu le 30.

Le temps a été aſſez beau les onze premiers jours du mois d'*Août* & les cinq derniers, excepté le 31; du 11 au 18 & du 20 au 27 il a été pluvieux. L'aurore boréale du 23 a commencé vers huit heures du ſoir & a fini vers les dix heures; elle étoit compoſée de dix-huit jets de lumière, dont quatre d'un rouge-pâle, le reſte d'un blanc-terne.

Il a fait généralement aſſez beau pendant le mois de *Septembre*, ſi ce n'eſt du 17 au 23 où il y a eu beaucoup de vent, de pluie & du tonnerre. Le 4 on a aperçu quelques jets d'aurore boréale.

Le mois d'*Octobre* a été très-beau & très-ſec, le ciel preſque toujours pur du 7 au 21. De deux aurores boréales qui ont eu lieu le 12 & le 31, la première étoit très-belle; elle a été précédée & ſuivie de brouillards & de vapeurs aſſez forts.

Le beau temps du mois d'Octobre s'eſt prolongé dans le mois de *Novembre*; l'on a preſque toujours joui du ciel le plus pur, à l'exception de très-peu de jours, tels que les 11, 12 & 13, où il régna un brouillard très-épais. Vers le 14 de ce mois, le thermomètre commença à deſcendre fréquemment au-deſſous de zero, mais ce ne fut que le 24 où commença à s'établir ce froid ſi long & ſi rigoureux, qui rendra cette année mémorable dans l'hiſtoire météorologique. Le 26 il tomba un peu de neige, la nuit ſuivante le thermomètre deſcendit à $9^{d},7$, & le 28 matin à $11^{d},3$; le 30 le froid parut beaucoup diminué, le thermomètre à midi revint preſqu'à zero. La température a été douce & très-sèche dans la première moitié de ce mois, très-froide dans la ſeconde. Les brouillards ont été aſſez fréquens; les eaux de la Seine exceſſivement baſſes à cauſe de la ſécheresſe de l'automne, ont été priſes de glace dès le 29.

La gelée qui avoit été déjà ſi longue dans le mois de Novembre, s'établit encore plus conſtamment dans le mois de *Décembre*. Un

ſeul jour, le 25, le thermomètre ne deſcendit pas au-deſſous de zero. Dès le 10 de ce mois il parvint à $11^{d},7$ au-deſſous du terme de la glace; le 18 à $14^{d},2$; les neuf jours ſuivans le froid parut vouloir diminuer, mais le 28 il ſe ranima, & les quatre derniers jours du mois le thermomètre deſcendit à 11^{d}, $11^{d},6$; $14^{d},6$ & $17^{d},4$: ce dernier terme eut lieu le 31 au matin & fut le plus grand froid que l'on éprouva cette année, & que l'on eût même éprouvé depuis long-temps. La neige qui tomba fréquemment s'accumula ſur la terre, & au moyen de l'humidité des brouillards fréquens & de l'intenſité du froid, forma une couche de glace des plus épaiſſes.

Il réſulte de tout ce que nous venons de rapporter, & des tableaux météorologiques qui ſuivront cet article, qu'à la ſuite d'un hiver très-doux, nous avons eu cette année un printemps ſec & chaud, un automne encore plus ſec, terminé par le froid le plus long & le plus rigoureux qu'on eût éprouvé depuis longues années

RÉSULTATS GÉNÉRAUX

des Obſervations météorologiques de l'année 1788.

1788.	PLUS GRANDE.	PLUS PETITE.	VARIATION annuelle.	
HAUTEUR du Baromètre.	$28^{pouc.}\ 9^{lig.},1$, le 16 Janvier.	$26^{pouc.}\ 10^{lig.},5$, le 21 Février.	$1^{pouc.}\ 10^{lig.},6$,	Jours de pluie.... 149. Jours de neige.... 18. Jours de gelée,... 67.
HAUTEUR du Thermomètre expoſé à l'air libre.	$+\ 26^{d},8$ le 12 Juillet.	$-\ 17^{d},4$ le 31 Décembre.	$44^{d},2$	Quantité d'eau tombée dans l'année, $17^{pouc.}\ 2^{lig.},0$.
Au fond des caves.	+ 9,47 en Novembre.	+ 9,41 en Février.	0,06	
VARIAT. DIUR. de l'aiguille aimant. ſuſpendue à un fil de ſoie.	20′,5 en Avril.	8′,2 en Janvier.	12′,3	Déclinaiſon de l'aiguille aimantée, le 1er Juin.... $21^{d}\ 40'$. Inclinaiſon........ $71^{d},1$.

TABLEAU MÉTÉOROLOGIQUE.

1788.	BAROMÈTRE.	THERMOMÈTRE.	VENTS dominans.	CIRCONSTANCES & Remarques.
JANVIER.	Plus grande hauteur 28$^{pouc.}$ 9$^{lign.}$ 1, le 16, à 10^{h} du matin. Plus petite hauteur. 27$^{pouc.}$ 2$^{lign.}$ 9, le 3, à 9^{h} $\frac{1}{2}$ du soir. Dix jours de pluie. Eau tombée, 1$^{pouc.}$ 4$^{lig.}$,8.	Plus grande hauteur + 8^{d},4, le 2, à 9^{h} $\frac{1}{2}$ du soir. Plus petite hauteur — 2^{d},0, le 16, à 8^{h} du matin. Dix jours de gelée.	S. N.N.E. S. O.	Dix-neuf jours de grand vent, principalement les 2, 5, 6, 8, 10, 14, 18, 24, & 25. Brumes & brouillards assez fréquens, particulièrement les 1, 11 & 28. Le 19, pluie mêlée de grêle.
FÉVRIER.	Plus grande hauteur 28$^{pouc.}$ 3$^{lign.}$ 8, le 12, à midi. Plus petite hauteur 26$^{pouc.}$ 10$^{lign.}$ 5, le 21, à 9^{h} $\frac{1}{2}$ du soir. Dix-neuf jours de pluie. Eau tombée, 2$^{pouc.}$ 3$^{lig.}$,6.	Plus grande hauteur + 9^{d},3, le 28, à midi. Plus petite hauteur — 1^{d},6, le 2, à 7^{h} $\frac{1}{2}$ du matin. Quatre jours de gel. Trois jours de neige	E. O. S. S. E.	Six jours de grand vent, particulièrement les 3, 21, 22 & 24. Six jours de brouillards, particulièrement les 4 & 6.
MARS.	Plus grande hauteur 28$^{pouc.}$ 1$^{lig.}$ 9, le 29, à 10^{h} du soir. Plus petite hauteur 27$^{pouc.}$ 3$^{lig.}$ 2, le 22, à 5^{h} du soir. Dix-sept jours de pluie. Eau tombée, 1$^{pouc.}$ 4$^{lig.}$,9.	Plus grande hauteur + 11^{d},7, le 31, à 2^{h} $\frac{1}{2}$ du soir. Plus petite hauteur — 1^{d},5, le 4, à 7^{h} du matin. Quatre jours de gel. Deux jours de neige.	N. O. N. E. S.	Onze jours de grands vents, particulièrement le 3, le 30 & le 31. Cinq jours de brouillards, particulièrement le 20. Tonnerre le 22. Aurore boréale le 28.

TABLEAU

TABLEAU MÉTÉOROLOGIQUE.

1788.	BAROMÈTRE.	THERMOMÈTRE.	VENTS dominans.	CIRCONSTANCES & Remarques.
AVRIL.	Plus grande hauteur 28$^{pouc.}$ 5$^{lig.}$,7, le 9, à 10^{h} du matin. Plus petite hauteur 27$^{pouc.}$ 8$^{lig.}$,3, le 3, à 9^{h} $\frac{1}{2}$ du soir. Quatorze jours de pluie. Eau tombée, 0$^{pouc.}$ 5$^{lig.}$ 6.	Plus grande hauteur + 20^{d},3, le 30, à 2^{h} $\frac{3}{4}$ du soir. Plus petite hauteur + 0^{d},5, le 5, à 6^{h} $\frac{1}{2}$ du matin. Un jour de gelée. Deux jours de neige.	O. N. O. N. N. O. O.	Dix jours de grand vent, particulièrement les 1 & 3. Brume assez forte le 14. Grêle & neige les 4 & 5. Aurore boréale les 1, 29 & 30.
MAI.	Plus grande hauteur 28$^{pouc.}$ 4$^{lig.}$,4, le 22, à 5^{h} du matin. Plus petite hauteur 27$^{pouc.}$ 8$^{lig.}$,5, le 29, à 2^{h} $\frac{1}{2}$ du soir. Douze jours de pluie. Eau tombée, 2^{pouc} 7^{lignes},9.	Plus grande hauteur + 22^{d},1, le 26, à 1^{h} $\frac{1}{2}$ du soir. Plus petite hauteur + 6^{d},5, le 16, à 6^{h} du matin.	N. N. E. N. E. S. E.	Cinq jours de grand vent, particulièrement le 3. Grêle le 9 & le 16. Tonnerre les 6, 9, 18, 19, 28, 29, 30 & 31. Aurore boréale les 2, 24 & 25.
JUIN.	Plus grande hauteur 28^{pouc} 3$^{lig.}$,7, le 5, à 10^{h} du soir. Plus petite hauteur 27$^{pouc.}$ 10$^{lig.}$,0, le 24, à 9^{h} $\frac{1}{4}$ du soir. Vingt-un jours de pluie. Eau tombée, 2$^{pouc.}$ 10^{lignes},9.	Plus grande hauteur 23^{d},7, le 18, à 2^{h} $\frac{1}{4}$ du soir. Plus petite hauteur 9^{d},1, le 8, à 9^{h} du soir.	N. N. E. Calme. S. O.	Cinq jours de grand vent. Brume assez forte le 21. Tonnerre les 3, 15, 16, 17, 18, 20 & 21. Arc-en-ciel lunaire le 16.

TABLEAU MÉTÉOROLOGIQUE.

1788.	BAROMÈTRE.	THERMOMÈTRE.	VENTS dominans.	*CIRCONSTANCES & Remarques.*
JUILLET.	Plus grande hauteur 28^{pouc.} 3^{lig.},5, le 31, à 2^h ½ du matin. Plus petite hauteur 27^{pouc.} 4^{lig.},7, le 3, à 9^h ¾ du soir. Seize jours de pluie. Eau tombée, 1^{pouc.} 4^{lign.},2.	Plus grande hauteur + 26^d,8, le 12, à midi. Plus petite hauteur + 9^d,2, le 25, à minuit.	O.S.O. S.S.O. O.N.O.	Tonnerre les 3, 4, 12 & 13. Grêle le 3 & particulièrement le 13, jour fatal où elle a causé de si grands ravages dans une partie de la France. Aurore boréale les 3 & 30.
AOÛT.	Plus grande hauteur 28^{pouc.} 5^{lig.},6, le 3, à 2^h du matin. Plus petite hauteur 27^{pouc.} 8^{lig.},5, le 14, à 2^h ½ du soir. Treize jours de pluie. Eau tombée, 2^{pouc.} 1^{lign.}, 0.	Plus grande hauteur + 19^d,9, le 21, à midi. Plus petite hauteur + 10^d,2, le 7, à 5^h du matin.	N.N.E. S. O. O.	Neuf jours de grand vent, particulièrement le 5. Tonnerre les 11 & 12. Aurore boréale le 23.
SEPT.	Plus grande hauteur 28^{pouc.} 2^{lig.},9, le 12, à 2^h du matin. Plus petite hauteur 27^{pouc.} 7^{lig.},2, le 20, à 9^h du soir. Quinze jours de pluie. Eau tombée, 2^{pouc.} 2^{lign.},5.	Plus grande hauteur + 21^d,3, le 5, à 2^h ½ du soir. Plus petite hauteur + 6^d,7, le 25, à 6^h du matin.	S. S. E. N.N.E. S. S. O.	Neuf jours de grand vent, particulièrement les 19, 20 & 21. Tonnerre les 18 & 19. Aurore boréale le 4.

TABLEAU MÉTÉOROLOGIQUE.

1788.	BAROMÈTRE.	THERMOMÈTRE.	VENTS dominans.	*CIRCONSTANCES & Remarques.*
OCTOBRE.	Plus grande hauteur 28$^{pouc.}$ 5$^{lig.}$,6, le 31, à 9^{h} du soir. Plus petite hauteur 27$^{pouc.}$ 8$^{lig.}$,5, le 16, à 9^{h} $\frac{1}{4}$ du soir. Quatre jours de pluie. Eau tombée, 0$^{pouc.}$ 0$^{lign.}$,4.	Plus grande hauteur + 16^{d},0, le 2, à 2^{h} $\frac{3}{4}$ du soir. Plus petite hauteur + 1^{d},2, le 21, à 5^{h} du matin.	S. O. N. N. E. N. N. O.	Six jours de grand vent, particulièrement les 8 & 9. Sept jours de brouillards, particulièrement les 5 & 16. Aurores boréales les 12 & 31.
NOVEMB.	Plus grande hauteur 28$^{pouc.}$ 7$^{lig.}$,8, le 24, à 10^{h} du soir. Plus petite hauteur 27$^{pouc.}$ 9$^{lig.}$,5, le 10, à 7^{h} du matin. Cinq jours de pluie. Eau tombée, 0$^{pouc.}$ 2$^{lig.}$,6.	Plus grande hauteur + 14^{d},3, le 3, à 2^{h} $\frac{3}{4}$ du soir. Plus petite hauteur — 11^{d},3, le 28, à 7^{h} $\frac{1}{2}$ du matin. Dix-huit jours de gelée. Un jour de neige.	E. O. N. O. N.	Brouillards épais les 11, 12, 13, 27 & 29. Un peu de neige le 26.
DÉCEMB.	Plus grande hauteur 28$^{pouc.}$ 4$^{lig.}$,1, le 23, à 9^{h} $\frac{1}{2}$ du soir. Plus petite hauteur 27$^{pouc.}$ 3$^{lig.}$,5, le 14, à 5^{h} du soir. Trois jours de pluie. Eau tombée, 0$^{pouc.}$ 1$^{lig.}$,6.	Plus grande hauteur + 2^{d},9, le 24, à 2^{h} du soir. Plus petite hauteur — 17^{d},4, le 31, à 7^{h} $\frac{1}{2}$ du matin. Trente jours de gelée. Dix jours de neige.		Cinq jours de grand vent, particulièrement les 5, 7 & 8. Brouillard considérable les 12, 19, 20 & 23. Aurore boréale le 23.

HISTOIRE CÉLESTE DE L'ANNÉE 1788.

CETTE année n'a offert d'autre événement astronomique qu'une éclipse de Soleil qui a eu lieu le 4 juin, mais que le mauvais temps a empêché d'observer à Paris; l'apparition de deux comètes découvertes, l'une en France, par M. Messier, vers la fin de novembre, l'autre en Angleterre, par Miss Herschel, vers la fin de décembre. Ces deux comètes n'ont pu être aperçues qu'avec le secours des lunettes; la dernière sur-tout étoit fort difficile à voir, & l'on n'en a pu faire à Paris qu'un très-petit nombre d'observations. Enfin une occultation de Jupiter par la Lune, observée le 14 mars, & dont on trouvera les circonstances dans le cours de cet extrait.

Nous avons apporté cette année une attention particulière à chercher dans les premiers jours de chaque nouvelle lune, l'apparence de volcan annoncée par M. Herschel, & dont nous avons parlé avec détail l'année dernière, & il a été tenu registre également des époques où cette apparence a été remarquée, & de celles où elle n'a point été visible, quoique les circonstances fussent favorables; voici un extrait de ces observations.

Le 13 mars, M. Nouët a aperçu très-distinctement, & observé pendant une heure, dans la partie obscure de la Lune, une lumière très-pâle & blanche, qui de temps en temps devenoit plus vive, puis disparoissoit quelquefois entièrement; le lendemain & les jours suivans, on n'a rien ap rçu: mais au mois d'avril suivant, dès le 8, c'est-à-dire, deux jours après la nouvelle Lune, cette apparence a été aperçue comme une petite nébulosité; & le lendemain 9, par le temps le plus favorable, toutes les taches brillantes de la Lune s'apercevant à travers la lumière cendrée, on voyoit au milieu de la nébulosité pointiller une petite lumière vive & qui n'étant pas très éloignée d'Héraclide,

faisoit douter si elle partoit d'Aristarchus ou d'Ecphantus. Le 11, même apparence, mais plus foible, parce que la partie éclairée de la Lune commençoit à être assez considérable; mais après la nouvelle Lune de juillet, d'octobre & de décembre, quoique les circonstances fussent également favorables qu'en août, on n'a pu rien distinguer de cette apparence. Nous continuerons ces observations à chaque lunaison où les circonstances seront favorables; & ce ne sera qu'après les avoir long-temps répétées, que l'on pourra peut-être parvenir à reconnoître la nature & la cause de cette apparence.

LE SOLEIL.

Une seule éclipse de Soleil devoit être visible à Paris, celle du 4 juin, mais une pluie presque continuelle pendant le temps de cette éclipse, a empêché de la voir.

Au mois de mars on a observé

La hauteur méridienne du bord supérieur du Soleil, le 19 Mars, ... 41d 16′ 45″,9.

D'où l'on conclut

La déclinaison du centre du Soleil.................. 0d 10′ 6″,6

L'heure de l'équinoxe, le 19 Mars, à........... 10h 14′ 43

Au mois de juin, avec une seconde lunette fixée sur le quart de-cercle mobile de 6 pieds à 49d 25′ 58″,4, on a observé les hauteurs méridiennes du bord supérieur du Soleil vers le solstice, ainsi qu'il suit.

	HAUTEURS marquées sur le limbe.	HAUTEUR du bord supér. du Soleil.	RÉDUCT. au Solstice.	Demi-diam. du Soleil.		HAUTEUR solsticiale du centre du ☉.
	D. M. S.	D. M. S.	M. S.	M. S.		D. M. S.
Juin.						
16	24. 15. 56,4	64. 49. 58,0	+ 3. 53,7	— 15. 47,3	Réfraction.	64. 37. 40,8
18	24. 18. 46,0	52. 47,6	1. 8,2	15. 47,2	— 27″,2	45,0
20	24. 19. 51,9	53. 53,5	0. 1,4	15. 47,1	Parallaxe.	44,2
23	24. 18. 26,5	52. 28,1	1. 27,6	15. 47,0	+ 3″,6	45,1
25	24. 15. 25,4	49. 27,0	4. 28,9	15. 46,9		45,8

Par un milieu.......................64d 37′ 44″,2.

	Hauteur de l'équateur *(a)*..................	41^d	9'	48",0
Donc,	obliquité de l'écliptique *apparente*........	23	27	56,2
	Nutation.........		+	2,2
	obliquité de l'écliptique *moyenne ou vraie*...	23	27	58,4

Remarquons en passant que cette obliquité de l'écliptique s'accorde à 3",2 près avec celle que nous avons déterminée en 1786 avec le même instrument, mais en employant une autre lunette fixée à l'extrémité de l'arc, & qui donnoit les hauteurs du Soleil au point du limbe éloigné de celui-ci de 40^d; ce qui détruit entièrement les soupçons que l'on avoit élevés sur l'exactitude de notre instrument, ne faisant point attention sans doute que lorsque deux lunettes différentes fixées sur le même instrument & qui se vérifient chacune séparément, donnent avec le plus grand accord la même hauteur des mêmes astres sur des points différens du limbe, il est impossible de supposer ni erreurs dans la division, ni changement de figure dans l'instrument, puisque c'est précisément dans diverses positions & sur divers points de la division que se remarque l'accord dans les résultats.

Au mois de septembre on a observé

La hauteur méridienne du bord supérieur du Soleil, le 21 Sept. .... 41^d 48' 10",1

D'où l'on conclut

La déclinaison du centre du Soleil............... 0^d 21' 24",8

L'heure de l'équinoxe, le 21 Septembre, à........ 21^h 55' 52"

Les passages, au méridien du Soleil & de diverses étoiles qui se sont trouvées dans son parallèle, observés à une lunette méridienne de 3 pieds & demi de foyer, & leurs hauteurs prises avec le quart-de-cercle mobile de 6 pieds, ont donné les résultats suivans.

---

(1) J'emploie ici la hauteur de l'équateur de 41^d 9' 48" parce que c'est ainsi que je l'ai supposée dans le calcul que j'ai fait des diverses obliquités de l'écliptique déterminées depuis 1743 à l'Observatoire royal avec ce même instrument (Voyez *Mém. Acad. années 1778 & 1782*). Je me réserve au reste à traiter dans nos prochains extraits ce qui a rapport à la véritable hauteur du pôle de l'Observatoire, sur laquelle on n'est pas généralement d'accord à quatre secondes près.

ÉPOQUES 1758.	ÉTOILES.	DIFFÉR. d'aſcenſ. droite du centre du SOLEIL & de l'ÉTOILE.	DIFFÉRENCE de déclinaiſon du bord ſupérieur du SOLEIL & de l'ÉTOILE.	ÉPOQUES 1758.	ÉTOILES.	DIFFÉR. d'aſcenſ. droite du centre du SOLEIL & de l'ÉTOILE.	DIFFÉRENCE de déclinaiſon du bord ſupérieur du SOLEIL & de l'ÉTOILE.
		D. M. S.	D. M. S.			D. M. S.	D. M. S.
Janv. 22	α Lièvre....	136. 20. 26	" " "	Mai. 25	β Hercule..	" " "	+ 0. 34. 35
27	*Idem*......	131. 7. 16	" " "	26	*Idem*......	181. 25. 38	+ 0. 24. 21
Fév. 7	γ Eridan...	96. 7. 33	+ 0. 54. 40	30	*Idem*......	177. 21. 35	— 0. 13. 3
Mars 16	τ^2 Hydre...	143. 25. 35	+ 0. 49. 15	Juin. 14	*Idem*......	161. 53. 16	" " "
	ε Hydre....	132. 1. 4	" " "	Juillet. 1	*Idem*......	144. 14. 29	" " "
	l Hydre....	145. 23. 24	+ 0. 53. 29	3	*Idem*......	141. 10. 11	" " "
17	η Vierge...	190. 29. 9	+ 1. 11. 57	15	*Idem*......	129. 54. 56	+ 0. 17. 15
	γ Vierge....	198. 57. 11	+ 0. 24. 11	19	*Idem*......	125. 53. 44	+ 0. 59. 5
	ζ Vierge....	203. 11. 44	+ 1. 10. 52		*Arcturus*.....	92. 6. 52	— 0. 41. 14
	τ^2 Hydre..	142. 30. 47	+ 0. 25. 31	20	β Hercule..	124. 53. 53	" " "
26	τ l'Hydre...	134. 20. 17	— 3. 6. 37	22	*Arcturus*....	89. 7. 21	— 0. 6. 1
	l Hydre....	136. 18. 15	— 3. 2. 21	Août. 3	α Flèche...	159. 12. 51	— 0. 1. 15
Avril. 14	ρ Lion.....	132. 6. 3	+ 0. 22. 35	4	*Idem*......	157. 33. 47	+ 0. 14. 42
19	ρ Lion.....	127. 28. 27	— 1. 22. 22		γ Flèche *..	162. 14. 26	" " "
	ε Vierge...	164. 58. 22	+ 0. 20. 8	Sept. 3	β Aigle....	133. 15. 4	— 1. 36. 4
20	ε Vierge...	164. 2. 37	— 0. 0. 17	Oct. 8	β Verſeau..	125. 31. 9	" " "
21	*Idem*......	163. 6. 50	— 0. 20. 29	13	λ Verſeau..	141. 11. 38	— 0. 49. 56
30	β Lion....	" " "	+ 0. 26. 5	14	*Idem*......	140. 15. 41	— 0. 27. 30
Mai. 2	*Idem*......	134. 21. 54	— 0. 9. 49	15	λ Verſeau..	139. 19. 40	— 0. 5. 22
5	θ Lion.....	122. 41. 57	— 0. 11. 58	26	α^2 Capric..	90. 4. 54	— 0. 40. 0
12	η Bouvier..	163. 46. 45	+ 0. 49. 45	Nov. 1	*Idem*......	84. 13. 56	+ 1. 18. 8
19	*Arcturus*....	154. 40. 57	+ 0. 3. 19	7	δ Capric...	100. 31. 53	— 0. 45. 25
21	*Idem*......	152. 41. 1	— 0. 21. 3	8	*Idem*......	99. 31. 18	— 0. 28. 4
23	*Idem*......	150. 40. 31	— 0. 44. 5	10	*Idem*......	97. 30. 3	" " "

Nota. L'aſtérique * que l'on trouve dans la ſeconde colonne, indique que le paſſage des étoiles & du Soleil a été déterminé le même jour par des hauteurs correſpondantes. Le ſigne + dans la quatrième colonne, indique que l'étoile étoit plus haute dans le méridien que le bord ſupérieur du Soleil; le ſigne — indique qu'elle étoit plus baſſe. Cette quatrième colonne renferme la différence de hauteur obſervée ſans aucune correction.

Ces comparaiſons du Soleil aux différentes étoiles, donnent encore les réſultats ſuivans.

Passages du Soleil dans le parallèle des Étoiles.			
ÉTOILES.			DIFFÉRENCE d'Ascension dr.
		H. M. S.	*D. M. S.*
ε Vierge....	Avril 20	18. 29. 36	163. 19. 38
β Lion......	Mai 2	8. 12. 18	134. 2. 14
θ Lion.......	*Idem*..... 5	5. 29. 33	122. 28. 41
Arcturus	*Idem*..... 20	13. 26. 29	153. 7. 26
β Hercule..	*Idem*......30	10. 36. 41	176. 54. 8
Arcturus.	Juillet 21	4. 36. 41	89. 55. 35
δ Capric....	Novembre 8	17	98. 48. 26

MERCURE.

CETTE planète a achevé, dans le courant de cette année, quatre révolutions plus quarante-deux degrés cinquante minutes autour du Soleil, & s'est trouvée

EN CONJONCTION.		PLUS G.de DIGRESSION		STATIONNAIRE.	DANS SON NŒUD.	
Supérieure.	Inférieure.	Orientale.	Occidentale.		Ascendant.	Descendant
11 Février.	26 Mars.	10 Mars.	22 Avril.	17. Mars.	29 Février.	10 Janvier.
31 Mai.	2. Août.	4 Juillet.	19 Août.	9 Avril.	11 Mars.	7 Avril.
14 Septemb.	21 Nov.	31 Octobre.	10 Décemb.	20 Juillet.	26 Mai.	4 Juillet.
				12 Août.	22 Août.	30 Septemb.
				11 Novembre.	18 Novemb.	27 Décemb.
				30 Novembre.		

On a déterminé, par observation, trois lieux de cette Planète, qui, comparés aux Tables, ont donné les résultats suivans :

1788.	TEMPS VRAI.	ÉTOILE comparée.	DIFFÉRENCES DANS LE MÉRIDIEN.		LIEUX OBSERVÉS DE MERCURE.		ERREUR des TABLES.	
			des Paſſages.	des Haut.	Longitude.	Latitude.	En long.	En latit.
	H. M. S.		*H. M. S.*	*D. M. S.*	*D. M. S.*	*D. M. S.*	*S.*	*S.*
Mai 23	23. 27. 8,4	*Arcturus*..	+ 13. 26. 9,0	— 1. 31. 35	55. 49. 15	0. 28. 57: *A.*	— 13	+ 3
		β Hercule	+ 11. 11. 24,5	59. 56. 5				
Juin 16	1. 18. 47,3	μ Hercule	— 10. 35. 31,0	65. 53. 7	103. 49. 20	1. 58. 53: *B.*	+ 4	+ 23
Oct. 16	1. 13. 48,6	γ Capric...	— 6. 45. 22,0	— 0. 2. 17	233. 30. 30	1. 48. 49: *A.*	— 24	+ 11

Nota. Le ſigne — pour la différence des paſſages, indiquera toujours que la planète étoit moins avancée en aſcenſion droite que l'étoile, ou qu'elle *précédoit* l'étoile au méridien, & qu'ainſi pour avoir l'aſcenſion droite de la planète, il faut, de l'aſcenſion droite de l'étoile, *ôter* ſa différence avec la planète. Le ſigne + indique que la planète ſuivoit l'étoile au méridien, & que par conſéquent, pour avoir l'aſcenſion droite de la planète, il faut, à l'aſcenſion droite de l'étoile *ajouter* ſa différence avec la planète.

Le ſigne — pour la difference de hauteur, indique que la planète étoit *moins élevée* ſur l'horizon que l'étoile. Le ſigne + indique que la planète étoit *plus haute* dans le méridien.

Lorſque la hauteur de l'étoile n'a pas été priſe, nous avons rapporté la hauteur abſolue obſervée de la planète, d'après laquelle a été conclue ſa déclinaiſon; cette hauteur eſt ſans autre correction que celle de l'inſtrument. On l'a diſtinguée dans la cinquième colonne en ne la précédant d'aucun ſigne.

VÉNUS.

Cette planète a achevé, dans le courant de cette année, deux révolutions moins $4^{ſ}\ 12^{d}\frac{1}{3}$ autour du Soleil, & s'eſt trouvée

EN CONJONCTION		PLUS G.^DE DIGRESSION		STATIONNAIRE.	DANS SON NŒUD	
Supérieure.	Inférieure.	Orientale.	Occidentale.		Aſcendant.	Deſcendant.
	8 Août.	30 Mai	19 Octobre.	16 Février. 17 Juillet. 29 Août.	10 Mars. 21 Octobre.	30 Juin.

On a déterminé, par obſervation, cinquante-huit lieux de cette planète, qui, comparés aux tables, ont donné les réſultats ſuivans :

1758.	TEMPS VRAI.	ÉTOILE comparée	DIFFÉRENCES DANS LE MÉRIDIEN.		LIEUX OBSERVÉS DE VÉNUS.		ERREUR des TABLES.	
			des Paſſages.	des Hauteurs.	Longitude.	Latitude.	En long.	En lat.
	H. M. S.		H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	S.	S.
Fév. 7	1.43.57,6	*i* Orion....	— 6.16. 9,7	— 0.57.34	345.17.32	Auſtrale. 1.19.39	—0.1	+ 10
Mars 16	2. 9.45,0	Régulus...	— 7.58.12,8	— 0.38. 4	31.40.13	Boréale. 0.18.37	— 13	— 32
Avril 13	2.39.16,8	γ Écreviſſe.	— 4.21. 4,0	+ 0.42.12	64.38.53	1.51.42	+ 13	+ 40
14	2.40.27,6	ζ Lion.....	— 5.49.50,5	— 1.17. 5	65.47.23	1.54.50	+ 4	+ 11
20	2.47.33,7	*Idem*......	— 5.20.32,5	+ 0. 2.43	72.38.28	2.11.33	— 29	+ 18
21	2.48.46,6	Arcturus...	— 9.16. 4,5	+ 4.24.22	73.46.45	2.14. 6	— 11	+ 17
28	2.56.49,5	ζ Lion.....	— 4.41.17,0	+ 1.13.51	81.37.46	2.30. 5	+ 9	+ 36
29	2.57.55,7	*Idem*......	— 4.36.23,6	+ 1.19.46	82.44.24	2.31.56	— 9	+ 11
30	2.59. 9,7	*Idem*......	— 4.31.30,0	+ 1.25. 7	83.50.47	2.33.56	— 11	+ 20
Mai 2	3. 1. 8,2	*Idem*......	— 4.21.45,2	+ 1.33.40	86. 2.56	2.37.21	— 15	+ 15
3	3. 2. 9,8	*Idem*......	— 4.16.54,0	+ 1.37. 0	87. 8.33	2.39. 9	— 17	+ 19
5	3. 4.10,4	γ Lion.....	— 4.10.35,7	+ 5.15.14	89.19.28	2.42. 5	— 36	+ 28
7	3. 6. 4,6	ε Bouvier...	— 8.27.42,3	— 1.46.35	91.29.59	2.40.30	— 12	+ 22
12	3.10.23,7	η Bouvier..	— 7.12.56,0	67.15.50	96.51.20	2.48.54	— 5	+ 23
		ε Bouvier..	— 8. 3.56,0	— 1.52.34				
13	3.11. 8,1	η Bouvier..	— 7. 8.15,8	67.12.48	97.54.36	2.49.20	— 18	+ 20
		ε Bouvier..	— 7.59.15,8	— 1.55.38				
23	3.16.40,3	β Hercule..	— 8.59. 6,3	66. 9.37	108.12.39	2.47.46	— 10	+ 32
		Arcturus...	— 6.44.21,8	+ 4.41.56				
24	3.16.59,0	Arcturus...	— 6.40. 1,6	+ 4.32.32	109.12.22	2.46.27	— 17	+ 11
25	3.17.14,6	β Hercule..	— 8.50.28,7	+ 2.42.29	110.12.12	2.45.36	— 16	+ 14
Juill. 2	2.41.25,4	α Hercule..	— 7.23.33,6: ☾	— 0.14. 1	140.16. 5	Auſtrale. 0.20.55	— 9	— 13
15	1.59.53,7	Arcturus...	— 4.23.33,9: ☾	52. 3.14	144. 3.34	2.47.20	— 47	+ 2
19	1.42.40,4	γ Aigle....	— 9.54. 3,7: ☾	— 0. 4. 3	144. 2.46	3.40.32	— 34	+ 20
22	1.28.15,7	α Ophiucus.	— 7.45.49,2: ☾	— 3.11.35	143.38.42	4.21.19	— 42	+ 9
31	0.37.59,5	*Idem*......	— 8. 0.46,5: ☾	49.52.54	140.22.59	6.19. 2	— 68	+ 3
Août 1	0.31.53,6	α Ophiucus.	— 8. 3. 0,5: ☾	— 4. 2.38	139.51.59	6.30.57	— 48	+ 30
		γ Ophiucus.	— 8.15. 9,0: ☾	+ 5.52.28				

1788.	TEMPS VRAI.	ÉTOILE comparée	DIFFÉRENCES DANS LE MÉRIDIEN. des passages.	des Hauteurs.	LIEUX OBSERVÉS DE VÉNUS. Longitude.	Latitude	ERREUR des TABLES. En long.	En latit.
	H. M. S.		H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S	S.	S.
						Australe.		
Août 2	0. 25. 43,2	*α Ophiucus*	— 8. 5. 18,4: ☾	49. 50. 50 : S	139. 19. 24	6. 42. 3	— 41	+ 28
		γ Ophiucus	— 8. 17. 27,4: ☾	+ 5. 51. 51 : S				
3	0. 19. 29,4	α Aigle..	— 10. 22. 40,3: ☾	+ 0. 21. 1 : S	138. 45. 23	6. 52. 46	— 37	+ 39
		β Aigle..	— 10. 27. 7 : ☾	49. 51. 6 : S				
4	0. 13. 12,4	α Aigle..	— 10. 39. 13,5: ☾	+ 0. 22. 11 : S	138. 10. 11	7. 2. 40	— 59	+ 20
		β Aigle..	— 10. 29. 33,2: ☾	+ 2. 47. 57,2 : S				
5	0. 6. 54,6	α Aigle..	— 10. 27. 34,3: ☾	49. 54. 16 : S	137. 34. 17	7. 11. 39	— 57	+ 35
8	23. 41. 44,1	*Idem*....	+ 13. 18. 30,3: ☽	+ 0. 38. 54	135. 6. 14	7. 40. 24	— 50	+ 15
21	22. 28. 39,6	ζ Aigle..	+ 13. 38. 36,0: ☽	+ 0. 36. 22	128. 46. 25	7. 46. 8	— 41	+ 37
23	22. 19. 35,6	*Idem*....	+ 13. 36. 50,0: ☽	52. 1. 57	128. 16. 37	7. 36. 20	— 52	+ 40
Sept. 3	21. 41. 23,7	ζ Aigle..	+ 13. 38. 37,4 ☽	— 1. 26. 30	128. 23. 20	6. 16. 1	— 45	+ 20
		γ Aigle..	+ 12. 58. 13,4 ☽	+ 2. 0. 32				
13	21. 21. 34,4	*Idem*....	+ 13. 14. 18,8: ☽	+ 2. 29. 53	132. 4. 14	4. 45. 40	— 41	+ 20
19	21. 14. 38,6	*Idem*....	+ 13. 28. 53,5: ☽	+ 2. 22. 23	135. 32. 13	3. 52. 21	— 39	+ 22
Oct. 4	21. 7. 39,1	ε Pégase.	+ 12. 18. 43,0	+ 1. 53. 26	147. 3. 13	1. 48. 5	— 36	+ 20
7	21. 7. 21,8	*Idem*....	+ 12. 29. 23,5	+ 1. 19. 18	149. 43. 12	1. 25. 41	— 32	+ 10
8	21. 7. 18,7	*Idem*....	+ 12. 33. 1,5	+ 1. 6. 59	150. 37. 58	1. 18. 20	— 19	+ 6
9	21. 7. 17,4	*Idem*....	+ 12. 36. 40,7	+ 0. 54. 4	151. 33. 2	1. 11. 20	— 32	+ 13
10	21. 7. 17,5	e Pégase.	+ 13. 1. 48,2	50. 46. 21	152. 29. 9	1. 4. 16	— 17	+ 9
13	21. 7. 24,3	α Pégase.	+ 11. 31. 20,5	50. 3. 34	155. 19. 43	0. 43. 51	— 18	+ 4
14	21. 7. 28,2	ε Pégase.	+ 12. 55. 20,8	— 0. 17. 22	156. 17. 34	0. 37. 26	— 16	+ 11
15	21. 7. 32,9	*Idem*....	+ 12. 59. 10,0	— 0. 32. 47	157. 15. 52	0. 30. 50	— 32	— 4
17	21. 7. 45,2	e Pégase.	+ 13. 28. 16,7	49. 0. 7	159. 14. 17	0. 18. 28	— 27	+ 9
18	21. 7. 52,1	ε Pégase.	+ 13. 10. 44,1	— 1. 22. 24	160. 14. 14	0. 12. 18	— 20	+ 3
19	21. 8. 0,6	*Idem*....	+ 13. 14. 38,2	— 1. 39. 41	161. 14. 38	0. 6. 14	— 15	— 8
						Boréale.		
26	21. 9. 2,3	β Aigle..	+ 15. 30. 56,6	— 0. 50. 44	168. 28. 23	0. 31. 59	— 39	+ 11
Nov. 1	21. 9. 58,3	*Idem*....	+ 15. 55. 16,5	44. 7. 26	174. 53. 35	0. 59. 51	— 6	— 4
2	21. 10. 7,4	γ Verseau	+ 13. 33. 55,9	+ 5. 1. 11	175. 58. 32	1. 4. 11	— 18	+ 2
5	21. 10. 33,1	*Idem*....	+ 13. 46. 18,5	+ 3. 53. 32	179. 16. 24	1. 16. 6	+ 17	+ 9
6	21. 10. 42,7	*Idem*....	+ 13. 50. 27,8	+ 3. 30. 35	180. 22. 44	1. 19. 50	+ 6	+ 4
7	21. 10. 51,3	*Idem*....	+ 13. 54. 36,2	+ 3. 7. 22	181. 29. 16	1. 23. 25	+ 12	+ 4

1788.	TEMPS VRAI.	ÉTOILE comparée	DIFFÉRENCES DANS LE MÉRIDIEN.		LIEUX OBSERVÉS DE VÉNUS.		ERREUR des TABLES.	
			des Passages.	des Hauteurs.	Longitude.	Latitude.	En long.	En latit.
	H. M. S.		H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	S.	S.
Nov. 8	21.10.58,8	*Idem*....	+13.58.47,0	+ 2. 43. 59	182. 36. 7	1. 26. 56	+ 19	+ 8
14	21.11.46,2	*Idem*....	+14.24. 0,2	+ 0. 20. 14	189. 21. 30	1. 45. 0	+ 14	+ 5
		α Lion..	+10.44.11,7	— 3. 50. 31				
15	21.11.53,5	β Eridan.	+ 7.42.36,0	+ 2. 51. 26	190. 29. 47	1. 47. 43	+ 8	+ 11
21	21.12.36,3	γ Verseau	+14.54. 0,2	— 2. 32. 0d	197. 23. 33	2. 0. 49	— 5	+ 21
22	21.12.43,2	λ Verseau	+14.27.34,5	+ 3. 17. 52	198. 33. 18	2. 2. 18	+ 4	+ 7
24	21.12.57,3	γ Verseau	+15. 7. 3,5	— 3. 46. 38	200. 52. 51	2. 5. 35	— 11	+ 9
28	21.13.28,9	λ Verseau.	+14.53.55,0	+ 0. 48. 7	205. 34. 36	2. 9. 18	+ 17	+ 13
Déc. 9	21.15.21,1	*Idem*....	+15.43.40,7	— 3. 34. 15	218. 37. 15	2. 14. 12	+ 11	+ 9

Nota. On a comparé les obſervations aux nouvelles tables de M. de la Lande, publiées dans la Connoiſſance des temps, *année 1789*. Dans la 4.me colonne, ☾ déſigne le bord occidental & ☽ le bord oriental de Vénus ; & dans la colonne ſuivante, *S* déſigne le bord ſupérieur ou boréal.

MARS.

CETTE Planète a parcouru, dans le courant de cette année, un arc de 175d 24′ autour du Soleil, & s'eſt trouvée

DANS SON NŒUD deſcendant.	EN QUADRATURE	EN OPPOSITION.	STATIONNAIRE.
Le 29 Septembre.	Le 11 Avril.	Le 7 Janvier.	Le 16 Février.

On a déterminé, par obſervation, vingt lieux de cette Planète, qui, comparés aux Tables, ont donné les réſultats ſuivans :

1788.	TEMPS VRAI.	ÉTOILE comparée	DIFFÉRENCES DANS LE MÉRIDIEN. des Passages.	des Hauteurs.	LIEUX OBSERVÉS DE MARS. Longitude.	Latitude.	ERREUR des TABLES. En long.	En latit.
	H. M. S.		H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.	S.
						Boréale.		
Janv. 4	12. 19. 39,0	ε Gém..	+ 0. 51. 15	67. 19. 54	108. 26. 18	4. 0. 17	— 3. 41	+ 19
10	11. 43. 2,9	*Idem*....	+ 0. 40. 46,3	+ 1. 14. 47	106. 2. 42	4. 6. 6	— 3. 50	+ 16
22	10. 33. 9,5	β Gém..	— 0. 39. 12,5	68. 11. 53	101. 49. 18	4 6. 29	— 3. 34	+ 16
Févr. 7	9. 13. 19,7	β Taur..	+ 1. 25. 20	68. 11. 0	98. 35. 15	3. 50. 11	— 3. 7	+ 21
13	8. 48. 8,0	*Idem*....	+ 1. 23. 44,5	— 1. 31. 28	98. 14. 26	3. 41. 17	— 2. 47	+ 21
19	8. 25. 22,1	*Idem*....	+ 1. 24. 10	— 1. 41. 22	98. 20. 36	3. 31. 37	— 2. 54	+ 36
Mars 6	7. 35. 3,0	ε Gém..	+ 0. 16. 4,6	+ 0. 48. 37	100. 33. 34	3. 5. 59	— 2. 3	— 3
13	7. 16. 50,7	*Idem*....	+ 0. 23. 31,7	+ 0. 29. 6	102. 15. 46	2. 55. 18	— 1. 58	+ 5
16	7. 9. 36,7	*Idem*....	+ 0. 27. 12,4	+ 0. 19. 42	103. 6. 20	2. 50. 51	— 1. 48	+ 3
17	7. 7. 13,6	*Idem*....	+ 0. 28. 30,5	+ 0. 16. 24	103. 24. 16	2. 49. 31	— 1. 32	— 12
24	6. 51. 38,8	ε Lion..	— 2. 24. 10,2	+ 0. 26. 52	105. 38. 36	2. 39. 31	— 1. 28	+ 4
29	6. 41. 6,3	*Idem*....	— 2. 16. 30,5	+ 0. 7. 0	107. 24. 58	2. 32. 49	— 1. 35	+ 7
Avril 11	6. 16. 2,7	γ Écrev..	— 0. 51. 40,8	+ 1. 35. 48	112. 35. 16	2. 16. 39	— 1. 11	+ 13
13	6. 12. 12,6	*Idem*....	— 0. 48. 2,0	+ 1. 24. 44	113. 26. 40	2. 14. 20	— 1. 54	+ 15
14	6. 10. 31,8	ζ Lion..	— 2. 19. 49,0	— 0. 55. 39	113. 52. 30	2. 13. 6	— 1. 27	+ 11
20	5. 59. 38,9	*Idem*....	— 2. 8. 29,0	— 1. 31. 56				
		δ Lion..	— 3. 6. 16,2	+ 1. 15. 5	116. 33. 9	2. 7. 15	— 1. 44	+ 28
21	5. 57. 50,8	*Arcturus*..	— 6. 7. 2,0	+ 2. 32. 9	117. 0. 40	2. 5. 12	— 1. 14	+ 10
25	5. 50. 40,9	ζ Lion..	— 1. 58. 45,5	— 2. 5. 10	118. 52. 14	2. 0. 49	— 1. 19	+ 8
29	5. 43. 31,9	*Idem*....	— 1. 50. 48,3	— 2. 33. 42	120. 46. 39	1. 56. 36	— 1. 0	+ 7
Mai 5	5. 32. 44,2	γ Lion..	— 1. 42. 2,5	+ 0. 13. 34				
		θ Lion..	— 2. 36. 44,2	+ 4. 32. 55	123. 42. 31	1. 50. 32	— 1. 20	+ 9

Les obſervations du mois de Janvier donnent encore les réſultats ſuivans :

Oppoſition vraie de Mars, le 7 Janvier 1788, à........... { 8h 2′ 43″ *temps moy.* / 7. 55. 50,8, *temps vrai.* }

Longitude en oppoſition, comptée de l'équinoxe moyen. 107d 18′ 16″,8

Latitude en oppoſition.................................... 4 4. 3,5 *boréale.*

On a ſuppoſé l'erreur moyenne des Tables, de 3 minutes

45 secondes, soustractive en longitude, & 17 secondes, additive en latitude.

On conclut des premières observations d'Avril la quadrature de Mars, } le 11, à { 10^h 16′ 20″,1, t. v. / 10. 17. 2. t. m.

Longitude géocentrique vraie de Mars en quadrature.............. 112^d 39′ 4″,8.

On a supposé l'erreur moyenne des tables, de 1′ 35″, soustractive en longitude.

JUPITER.

CETTE Planète a parcouru, dans le courant de cette année, un arc de 30^d 37′ autour du Soleil, & s'est trouvée

DANS SON NŒUD ASCENDANT.	EN QUADRATURE.	OCCULTATION PAR LA LUNE.	STATIONNAIRE.
Le 2 Juillet.	Le 7 Mars. 21 Octobre.	Le 14 Mars.	Le 10 Février. 26 Novembre.

On a déterminé, par observation, quarante-deux lieux de cette Planète, qui, comparés aux Tables, ont donné les résultats suivans :

1788.	TEMPS VRAI.	ÉTOILE comparée	DIFFÉRENCES DANS LE MÉRIDIEN. des Passages.	des Hauteurs	LIEUX OBSERVÉS DE JUPITER. Longitude.	Latitude.	ERREUR des TABLES. En long.	En lat.
	H. M. S.		H. M. S.		D. M. S.	D. M. S.	M. S.	S.
						Australe.		
Janv. 9	9. 44. 20,8	α Bélier..	+ 3. 12. 36,4	63. 42. 40	78. 6. 11	0. 23. 32	— 5. 42	— 67
		ζ Taureau	— 0. 16. 33,8	+1. 32. 32				
10	9. 39. 34,1	α Bélier..	+ 3. 12. 10,3	63. 42. 19	78. 0. 8	0. 23. 23	— 5. 47	— 6
		Alcyone..	+ 1. 32. 46,8	—0. 54. 5				
15	9. 15. 7,9	α Bélier..	+ 3. 10. 15,9	63. 40. 44	77. 33. 35	0. 22. 29	— 5. 50	— 61
		ζ Taureau	— 0. 18. 54,3	+1. 30. 36				
22	8. 44. 18,7	*Idem*	— 0. 21. 4,7	+1. 29. 6	77. 3. 35	0. 21. 12	— 5. 37	— 64
		η Gém...	— 0. 58. 4,7	63. 39. 14				

1788.	TEMPS VRAI.	ÉTOILE comparée	DIFFÉRENCES DANS LE MÉRIDIEN. des Passages.	des Hauteurs.	LIEUX OBSERVÉS DE JUPITER. Longitude.	Latitude.	ERREUR des TABLES. En long.	En lat.
	H. M. S.		H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.	S.
						Australe.		
Janv. 27	8. 22. 23,4	η Gém...	— 0. 59. 12,5	63. 38. 34	76. 47. 42	0. 20. 20	— 5. 8	— 54
Fév. 7	7. 36. 32,6	*Idem*....	— 1. 0. 29,7	— 0. 4. 18 }				
		ζ Gém...	— 1. 49. 48	63. 38. 57 }	76. 29. 53	0. 18. 13	— 4. 33	— 57
13	7. 12. 58,1	η Gém...	— 1. 0. 28	— 0. 3. 11	76. 30. 23	0. 17. 5	— 5. 1	— 56
16	7. 1. 31,7	*Idem*....	— 1. 0. 15,3	63. 40. 51 }	76. 33. 19	0. 16. 37	— 5. 2	— 53
		ζ Gém...	— 1. 49. 34,3	" " " }				
17	6. 57. 46,5	η Gem...	— 1. 0. 9,0	— 0. 1. 59	76. 34. 54	0. 16. 13	— 4. 47	— 67
19	6. 50. 19,1	*Idem*....	— 0. 59. 55,3	— 0. 1. 25	76. 38. 30	0. 16. 10	— 4. 23	— 48
Mars. 5	5. 57. 33,1	γ Écrev..	— 3. 24. 53,9	+ 0. 26. 9	77. 27. 46	0. 13. 13	— 4. 15	— 72
13	5. 31. 15,1	*Idem*....	— 3. 21. 50,5	+ 0. 31. 7 }	78. 10. 24	0. 12. 6	— 4. 22	— 62
		η Gem...	+ 0. 53. 20,0	63. 54. 21 }				
Avril 11	4. 2. 35,8	γ Écrev..	— 3. 5. 6	+ 0. 52. 21	82. 3. 16	0. 8. 10	— 4. 7	— 51
13	3. 56. 41,8	*Idem*....	— 3. 3. 40	+ 0. 53. 45	82. 23. 10	0. 7. 52	— 3. 59	— 54
14	3. 53. 44,2	ζ Lion...	— 4. 36. 35,2	— 1. 20. 19	82. 32. 44	0. 7. 49	— 4. 22	— 50
20	3. 36. 2,5	*Idem*....	— 4. 32. 3,8	— 1. 16. 16	83. 35. 15	0. 7. 8	— 4. 24	— 47
21	3. 33. 5,9	*Arcturus*..	— 8. 31. 45,5	— 2. 54. 47	83. 46. 11	0. 6. 57	— 4. 5	— 49
28	3. 12. 24,9	ζ Lion...	— 4. 25. 41,3	— 1. 11. 29	85. 3. 36	0. 6. 4	— 4. 7	— 53
29	3. 9. 27,5	*Idem*....	— 4. 24. 51,6	— 1. 11. 4	85. 15. 1	0. 6. 0	— 4. 3	— 48
30	3. 5. 28,4	*Idem*....	— 4. 24. 2,5	+ 1. 10. 32	85. 26. 23	0. 5. 52	— 4. 13	— 50
						Boréale.		
Août. 3	22. 10. 36,5	β Hercule	+ 14. 47. 11,0	+ 0. 33. 46	106. 18. 50	0. 3. 44	— 4. 11	— 52
8	21. 56. 8,9	*Idem*....	+ 14. 51. 43,6	+ 0. 26. 13	107. 22. 27	0. 4. 8	— 3. 54	+ 38
Sept. 3	20. 42. 1,0	{ ζ Aigle..	+ 12. 39. 15,5	62. 52. 39 }	112. 27. 5	0. 6. 57	— 4. 29	+ 37
		{ e Pégase..	+ 10. 23. 1,3	+ 2. 47. 35 }				
22	19. 47. 9,8	e Pégase..	+ 10. 36. 12,0	+ 2. 17. 27	115. 34. 10	0. 9. 25	— 4. 32	+ 46
Oct. 4	19. 10. 27,2	*Idem*.....	+ 10. 42. 58,7	+ 2. 0. 42	117. 10. 27	0. 11. 1	— 4. 59	+ 47
7	19. 0. 58,0	*Idem*.....	+ 10. 44. 28	+ 1. 56. 58	117. 31. 40	0. 11. 27	— 4. 57	+ 46
8	18. 57. 46,4	*Idem*.....	+ 10. 44. 56,7	+ 1. 55. 45	117. 38. 31	0. 11. 34	— 4. 58	+ 45
9	18. 54. 32,8	ε Pégase..	+ 10. 23. 57,0	61. 59. 44	117. 44. 33	0. 11. 37	— 5. 21	+ 41
10	18. 51. 18,9	e Pégase..	+ 10. 45. 50,8	+ 1. 53. 35	117. 51. 16	0. 11. 56	— 4. 58	+ 41
13	18. 41. 30,7	*Idem*.....	+ 10. 47. 7,4	+ 1. 50. 15	118. 9. 41	0. 12. 19	— 5. 15	+ 48
15	18. 34. 52,2	*Idem*.....	+ 10. 47. 56,7	+ 1. 48. 16	118. 21. 15	0. 12. 39	— 5. 1	+ 50
18	18. 24. 44,2	{ *Idem*.....	+ 10. 49. 4,0	+ 1. 45. 32 }	118. 37. 24	0. 13. 5	— 5. 2	+ 50
		{ γ Dauph.	+ 11. 24. 26,0	+ 5. 17. 40 }				

1788.	TEMPS VRAI.	ÉTOILE comparée	DIFFÉRENCES DANS LE MÉRIDIEN.		LIEUX OBSERVÉS DE JUPITER.		ERREUR des TABLES.	
			des Paſſages.	des Hauteurs.	Longitude.	Latitude.	En long.	En lat.
	H. M. S.		H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.	S.
Oct. 31	17. 38. 26,6	ε Pégaſe..	+ 10. 52. 41	+ 1. 36. 46	119. 28. 49	0. 15. 7	— 5. 29	+ 41
Nov. 1	17. 33. 43,8	γ Bélier..	+ 6. 23. 56,5	+ 2. 15. 50	119. 31. 20	0. 15. 11	— 5. 45	+ 43
2	17. 30. 57,4	ε Pégaſe..	+ 10. 53. 2,5	+ 1. 35. 55	119. 33. 57	0. 15. 21	— 5. 48	+ 40
5	17. 19. 28,7	*Idem*	+ 10. 53. 30,5	+ 1. 35. 5	119. 40. 31	0. 15. 56	— 5. 19	+ 48
6	17. 15. 39,1	γ Pégaſe..	+ 8. 4. 1,7	+ 6. 28. 52	119. 42. 31	0. 16. 15	— 5. 29	+ 59
7	17. 11. 43,8	γ Écrev..	— 0. 23. 8,3	61. 39. 52	119. 43. 39	0. 16. 17	— 5. 36	+ 50
		ε Pégaſe..	+ 10. 53. 43	+ 1. 34. 43				
9	17. 3. 55,4	δ Écrev..	— 0. 24. 34	+ 1. 34. 20	119. 46. 32	0. 16. 39	— 5. 40	+ 53
21	16. 14. 16,4	α Bélier..	+ 6. 11. 38,2	— 1. 55. 44	119. 45. 15	0. 18. 49	— 5. 35	+ 57
		δ Écrev..	— 0. 24. 37,3	61. 40. 45				
22	16. 9. 56,8	*Idem*	— 0. 24. 43,7	+ 1. 37. 6	119. 43. 41	0. 18. 57	— 5. 27	+ 54
		α Bélier..	+ 6. 11. 31,8	— 1. 55. 17				
24	16. 1. 15,7	δ Écrev..	— 0. 24. 56,7	61. 42. 17	119. 40. 26	0. 19. 17	— 5. 38	+ 52

Occultation de Jupiter par la Lune, le 14 Mars.

$4^h\ 46'\ 28'',0$ *t. v.* 1.er contact extérieur des bords de Jupiter & de la Lune.

4. 47. 49,0 1.er contact intérieur ou immerſion totale de Jupiter, derrière le bord obſcur de la Lune, mais viſible.

6. 4. 40,7 2.me contact intérieur ou émerſion du 1.er bord de Jupiter du bord éclairé de la Lune.

6. 6. 0,7 2.me contact extérieur ou émerſion totale de Jupiter.

SATURNE.

CETTE Planète a parcouru, dans le courant de cette année, un arc de $11^d 45'$ autour du Soleil, & s'eſt trouvée

EN QUADRATURE.	EN OPPOSITION.	STATIONNAIRE.
Le 31 Mai. 26 Novembre.	Le 29 Août.	Le 19 Juin. 6 Novembre.

On a déterminé, par obſervation, quarante-ſept lieux de cette Planète, qui, comparés aux Tables, ont donné les réſultats ſuivans :

1788.	TEMPS VRAI.	ÉTOILE comparée	DIFFÉRENCES DANS LE MÉRIDIEN. des Paſſages.	DIFFÉRENCES DANS LE MÉRIDIEN. des Hauteurs.	LIEUX OBSERVÉS DE SATURNE. Longitude.	LIEUX OBSERVÉS DE SATURNE. Latitude.	ERREUR des TABLES. En longit.	ERREUR des TABLES. En lat.
	H. M. S.		H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.	S.
						Auſtrale.		
Juill. 6	15. 44. 4,8	ζ *Ophiucus*	+ 6. 24. 57,5	+ 0. 51. 3	340. 41. 52	1. 50. 49	— 5. 26	— 44
12	15. 18. 59,3	λ Verſ....	+ 0. 9. 18,1	— 0. 40. 7	340. 30. 51	1. 52. 24	— 5. 12	— 30
14	15. 10. 40,0	ζ *Ophiucus*	+ 6. 24. 3,0	+ 0. 43. 27	340. 26. 36	1. 52. 49	— 5. 21	— 31
15	15. 6. 28,3	*Idem*....	+ 6. 23. 54,0	+ 0. 42. 19				
		λ Verſeau	+ 0. 8. 54,0	— 0. 43. 14	340. 24. 5	1. 52. 56	— 5. 21	— 36
19	14. 49. 51,3	*Idem*....	+ 0. 8. 16,7	— 0. 47. 55				
		ζ *Ophiucus*	+ 6. 23. 17,0	+ 0. 37. 38	340. 13. 46	1. 53. 53	— 5. 16	— 30
21	14. 41. 33,7	δ *Ophiucus*	+ 6. 45. 9,0	— 6. 23. 32	340. 8. 24	1. 54. 5	— 5. 13	— 44
29	14. 8. 33,3	γ *Ophiucus*	+ 5. 9. 50	31. 28. 0	339. 42. 48	1. 55. 48	— 5. 27	— 32
31	14. 0. 22,1	λ Verſeau	+ 0. 5. 57,5	— 1. 4. 25	339. 35. 44	1. 56. 4	— 5. 29	— 35
Août 2	13. 52. 11,3	*Idem*....	+ 0. 5. 30,5	— 1. 7. 27	339. 28. 27	1. 56. 20	— 5. 21	— 40
8	13. 27. 50,4	*Idem*....	+ 0. 4. 4,2	— 1. 17. 8	339. 5. 7	1. 57. 8	— 5. 13	— 48
16	12. 55. 43,8	*Idem*....	+ 0. 2. 0,7	— 1. 30. 51	338. 31. 41	1. 58. 28	— 5. 15	— 32
21	12. 35. 51,0	*Idem*....	— 0. 0. 38,0	— 1. 39. 33	338. 9. 52	1. 58. 53	— 5. 28	— 38
Sept. 1	11. 52. 33,3	α^2 Capric.	+ 2. 32. 22,0	+ 2. 29. 55				
		β Verſeau	+ 1. 18. 27,0	30. 30. 22	337. 19. 21	1. 59. 43	— 5. 32	— 33
3	11. 44. 48,9	α^2 Capric.	+ 2. 31. 47,3	+ 2. 26. 21	337. 10. 12	1. 59. 55	— 5. 41	— 43
		λ Verſeau.	— 0. 3. 3,2	— 2. 2. 37				
7	11. 29. 17,6	*Idem*....	— 0. 4. 10,5	30. 20. 3	336. 52. 13	1. 59. 54	— 5. 32	— 40
		α^2 Capric.	+ 2. 30. 39,5	+ 2. 19. 36				
12	11. 9. 58,8	*Idem*....	+ 2. 29. 16,5	+ 2. 11. 18				
		λ Verſeau	— 0. 5. 34,0	— 2. 17. 43	336. 30. 4	2. 0. 2	— 5. 24	— 39
13	11. 6. 7,5	*Idem*....	— 0. 5. 50,5	— 2. 19. 19				
		α^2 Capric.	+ 2. 29. 0,0	+ 2. 9. 41	336. 25. 47	1. 59. 58	— 5. 39	— 43
15	10. 58. 23,9	λ Verſeau	— 0. 6. 23,0	— 2. 22. 28	336. 17. 15	1. 59. 54	— 5. 34	— 44
22	10. 31. 32,0	α^2 Capric.	+ 2. 26. 41,2	+ 1. 56. 2				
		λ Verſeau	— 0. 8. 9,3	29. 56. 29	335. 48. 55	2. 0. 2	— 5. 31	— 30
28	10. 8. 31,8	*Idem*....	— 0. 9. 35,5	— 2. 40. 56	335. 26. 25	1. 59. 35	— 5. 26	— 41
29	10. 4. 40,8	*Idem*....	— 0. 9. 49,0	— 2. 42. 15	335. 22. 49	1. 59. 37	— 5. 11	— 36

1788.	TEMPS VRAI.	ÉTOILE comparée.	DIFFÉRENCES DANS LE MÉRIDIEN. des Passages.	des Hauteurs	LIEUX OBSERVÉS DE SATURNE. Longitude.	Latitude.	ERREUR des TABLES. En long.	En lat.
	H. M. S.		H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S. Australe.	M. S.	S.
Oct. 5	9. 41. 38,6	λ Verseau.	— 0. 11. 4,5	— 2. 49. 4	335. 2. 50	1. 59. 7	— 5. 43	— 24
		α^2 Capric.	+ 2. 23. 46,0	+ 1. 39. 52				
7	9. 33. 58,0	*Idem*.	+ 2. 23. 24,2	+ 1. 37. 51	334. 57. 0	1. 59. 0	— 5. 26	— 35
		λ Verseau.	— 0. 11. 26,3	— 2. 51. 6				
9	9. 26. 15,4	*Idem*. . . .	— 0. 11. 48,7	29. 36. 26	334. 51. 20	1. 58. 51	— 5. 39	— 36
		α^2 Capric.	+ 2. 23. 2,3	+ 1. 35. 56				
11	9. 18. 33,4	*Idem*. . . .	+ 2. 22. 42,5	+ 1. 34. 7	334. 46. 5	1. 58. 46	— 5. 34	— 30
12	9. 14. 42,2	*Idem*. . . .	+ 2. 22. 32	+ 1. 33. 24	334. 43. 24	1. 58. 26	— 5. 43	— 44
13	9. 10. 51,1	*Idem*. . . .	+ 2. 22. 23,9	+ 1. 32. 30	334. 41. 16	1. 58. 34	— 5. 27	— 30
		λ Verseau.	— 0. 12. 27,6	29. 33. 0				
14	9. 6. 59,0	*Idem*. . . .	— 0. 12. 36,3	— 2. 57. 14	334. 38. 55	1. 58. 27	— 5. 27	— 32
		α^2 Capric.	+ 2. 22. 14,5	+ 1. 31. 43				
18	8. 51. 28,0	*Idem*. . . .	+ 2. 21. 41,5	+ 1. 29. 5	334. 30. 20	1. 57. 48	— 5. 35	— 32
		λ Verseau.	— 0. 13. 10,0	— 2. 59. 52				
20	8. 43. 43,3	α^2 Capric.	+ 2. 21. 27,8	+ 1. 27. 54	334. 26. 40	1. 57. 45	— 5. 30	— 33
26	8. 20. 16,1	*Idem*. . . .	+ 2. 20. 54,0	+ 1. 25. 26	334. 18. 1	1. 56. 57	— 5. 25	— 38
		δ Capric.	+ 0. 52. 5,7	29. 25. 57				
27	8. 16. 59,0	λ Verseau	— 0. 14. 2,0	— 3. 4. 5	334. 17. 4	1. 57. 6	— 5. 17	— 21
31	8. 0. 32,0	*Idem*. . . .	— 0. 14. 15,5	— 3. 4. 35	334. 13. 38	1. 56. 17	— 5. 15	— 39
Nov. 1	7. 56. 34,7	α^2 Capric.	+ 2. 20. 34,0	+ 1. 24. 15	334. 12. 58	1. 56. 21	— 9	— 28
2	7. 52. 36,2	*Idem*. . . .	+ 2. 20. 31,0	+ 1. 24. 13	334. 12. 15	1. 56. 7	— 5. 36	— 41
3	7. 48. 37,5	η Baleine..	— 2. 30. 22,5	29. 24. 37	334. 12. 0	1. 55. 53	— 5. 30	— 41
4	7. 44. 37,8	α^2 Capric.	+ 2. 20. 28,3	+ 1. 24. 10	334. 11. 44	1. 56. 2	— 5. 23	— 22
		β Baleine.	— 2. 5. 28,7	29. 24. 41				
6	7. 36. 40,2	λ Verseau.	— 0. 14. 23,8	29. 24. 51	334. 11. 41	1. 55. 35	— 5. 10	— 34
7	7. 32. 39,2	α^2 Capric.	+ 2. 20. 27,2	+ 1. 24. 30	334. 11. 30	1. 55. 31	— 5. 23	— 28
8	7. 28. 37,5	λ Verseau.	— 0. 14. 24,2	— 3. 4. 16	334. 11. 45	1. 55. 16	— 5. 14	— 35
10	7. 20. 35,4	α^2 Capric.	+ 2. 20. 29,3	+ 1. 25. 10	334. 12. 14	1. 55. 7	— 5. 22	— 26
14	7. 4. 23,6	η Baleine.	— 2. 30. 15,0	— 0. 26. 0	334. 14. 32	1. 54. 12	— 5. 27	— 48
21	6. 35. 48,9	*Idem*. . . .	— 2. 29. 44,3	— 0. 22. 14	334. 22. 57	1. 53. 22	— 5. 14	— 40
22	6. 31. 41,4	*Idem*. . . .	— 2. 29. 38,7	— 0. 21. 26	334. 24. 32	1. 53. 8	— 5. 23	— 43
23	6. 27. 33,7	*Idem*. . . .	— 2. 29. 33,5	— 0. 20. 56	334. 25. 54	1. 53. 7	— 5. 13	— 37
24	6. 23. 26,8	*Idem*. . . .	— 2. 29. 25,7	— 0. 19. 57	334. 28. 9	1. 53. 1	— 5. 11	— 32
		λ Verseau.	— 0. 13. 24,7	— 2. 56. 11				
25	6. 19. 18,8	η Baleine.	— 2. 29. 18,5	— 0. 19. 9	334. 30. 0	1. 52. 53	— 5. 11	— 31

Les obſervations de la fin d'Août & du commencement du mois de Septembre, donnent encore les réſultats ſuivans :

Oppoſition vraie de Saturne, le 29 Août, à........	8h 15′ 52″ *temps moyen.* 8. 15. 31 *temps vrai.*
Longitude en oppoſition comptée de l'équinoxe moyen..	337d 31′ 46″
Latitude en oppoſition............................	1. 59. 43 *Auſtrale.*

On a ſuppoſé l'erreur des Tables, de 5′ 30″ ſouſtractive en longitude, & de 35″ ſouſtractive en latitude.

On conclut auſſi des dernières obſervations de Novembre

La quadrature de Saturne, le 25 Novembre............ 12h 48′ 34″ *temps moyen.*
Longitude géocentrique vraie de Saturne, en quadrature..334. 30. 46 comptée de l'équinoxe moyen.

On a ſuppoſé l'erreur des Tables en longitude, de 5′ 11″ ſouſtractive.

HERSCHEL.

CETTE Planète a parcouru, dans le courant de cette année, un arc de 6d 35′ autour du Soleil, & s'eſt trouvée

EN OPPOSITION.	STATIONNAIRE.
Le 18. Janvier.	Le 3 Avril.

On a déterminé, par obſervation, dix-huit lieux de cette Planète, qui, comparés aux Tables, ont donné les réſultats ſuivans :

1788.	TEMPS VRAI.	ÉTOILE comparée	DIFFÉRENCES. DANS LE MÉRIDIEN. des Passages.	des Hauteurs.	LIEUX OBSERVÉS DE HERSCHEL. Longitude.	Latitude.	ERREUR des TABLES. En long.	En latit.
	H. M. S.		D. M. S.	H. M. S.	D. M. S.	D. M. S. Boréale.	M.	S.
Janv. 9	12. 38. 35,1	ζ Taureau	+ 2.37.43,8	+ 0. 2. 11	118. 32. 54	0. 34. 24	— 10	+ 12
14	12. 16. 6,5	*Idem*....	+ 2.36.50,0	— 0. 5. 23	118. 19. 53	0. 34. 58	— 11	+ 17
Fév. 13	10. 8. 6,5	*n* Gém...	+ 1.54.37,0	— 1. 12. 54	117. 5. 4	0. 35. 1	+ 6	+ 19
16	9. 55. 56,8	ζ Gém...	+ 1. 4.50,5	+ 0. 29. 18	116. 58. 37	0. 34. 46	+ 6	+ 5
19	9. 43. 57,9	*Idem*....	+ 1. 4.24,4	62. 32. 37	116. 52. 19	0. 34. 45	+ 2	+ 7
		ζ Taureau	+ 2.30.43,0	+ 0. 22. 29				
Mars 6	8. 42. 4,0	γ Ecrev..	— 0.36.42,3	— 0. 45 24	116. 25. 14	0. 34. 46	+ 31	+ 16
29	7. 17. 4,2	ε Lion...	— 1.40.37,5	— 3. 13. 45	116. 6. 47	0. 34. 8	+ 24	+ 13
Oct. 31	18. 1. 0,7	*e* Pégase..	+ 11.15.14,3	+ 0. 43. 42	124. 51. 11	0. 35. 9	— 32	+ 7
Nov. 1	17. 57. 6,3	δ Écrev..	— 0. 3.13,5	+ 0. 43. 21	124. 51. 42	0. 35. 14	— 29	+ 10
2	17. 53. 11,9	*e* Pégase..	+ 11.15.16,5	+ 0. 43. 29	124. 51. 40	0. 35. 12	— 39	+ 4
5	17. 41. 19,9	*Idem*. ...	+ 11.15.20,7	+ 0. 43. 23	124. 52. 45	0. 35. 21	— 28	+ 7
6	17. 37. 21,3	δ Écrev..	— 0. 3. 7,8	+ 0. 43. 12	124. 53. 1	0. 35. 24	— 18	+ 7
7	17. 33. 21,5	*Idem*. ...	— 0. 3. 7,5	+ 0. 43. 8,5	124. 53. 6	0. 35. 22	— 31	+ 3
		γ Écrev..	— 0. 1.30,8	60. 48. 29				
9	17. 25. 17,6	δ Écrev..	— 0. 3. 8,0	60. 48. 29	124. 53. 0	0. 35. 23	— 24	— 2
10	17. 21. 14,7	γ Écrev..	+ 0. 1.30,7	60. 48. 35	124. 53. 5	0. 35. 29	— 21	+ 4
21	16. 35. 28,4	γ Pégase..	+ 8.25.28,0	+ 5. 39. 0	124. 48. 44	0. 36. 12	— 30	+ 21
22	16. 31. 12,4	*Idem*. ...	+ 8.25.25,0	+ 5. 39. 4	124. 47. 58	0. 35. 56	— 26	+ 4
24	16. 22. 37,9	α Pégase.	+ 9.33.16,0	60. 50. 48	124. 46. 29	0. 36. 9	— 17	+ 11

Les Observations du mois de Janvier donnent encore les résultats suivans :

Opposition vraie de Herschel, le {18 / 17} Janvier, à {0h 2′ 39″, *t. m.* / 23. 51. 46, *t. v.*}

Longitude vraie en opposition, comptée de l'équinoxe moyen........................ 118d 10′ 13″.

Latitude en opposition.................... 0. 34. 55, boréale.

On a supposé l'erreur moyenne des Tables 0′ 10″ soustractive en longitude, & de 15″ additive en latitude.

LA LUNE.

On a déterminé, par obſervation, cinquante-ſept lieux de la Lune, qui, comparés aux Tables d'Euler, ont donné les réſultats ſuivans:

1788.	TEMPS VRAI.	ÉTOILE comparée.	DIFFÉRENCES DANS LE MÉRIDIEN. des Paſſages.	DIFFÉRENCES DANS LE MÉRIDIEN. des Hauteurs.	LIEUX OBSERVÉS DE LA LUNE. Longitude.	LIEUX OBSERVÉS DE LA LUNE. Latitude.	ERREUR DES TABLES. En long.	ERREUR DES TABLES. En lat.
	H. M. S.		*H. M. S.*	*D. M. S.*	*D. M. S.*	*D. M. S.*	..	*S*
Fév. 16	7.28.18,2	η Gém...	— 0.33.29,0 : ☾	+ 0. 6.21 : *I*	83. 2.50	0. 5.12 : *B*	— 0.34	+ 42
17	8.29.36,6	ζ Gém...	— 0.17.37,7 : ☾	+ 0.22. 9 : *I*	98. 7.16	1.16. 8 : *A*	— 0.55	+ 42
18	9.29.54,5	*Idem*....	+ 0.46.31,0 : ☾	— 2. 7.38 : *S*	113.25.58	2.29.42 : *A*	— 65	+ 70
Mars 13	4.27.55,6	η Gém...	— 1.56.38,8 : ☾	— 0.50.42 : *I*	63.53. 1	1.29.18 : *B*	+ 18	— 1[illegible]
14	5.26.52,7	γ Écrev..	— 3.22.34,7 : ☾	+ 0.49.12 : *S*	78.18.56	0.14.47 : *B*	+ 48	+ 23
16	7.25.36,5	γ Gém...	+ 0.48.36,7 : ☾	61. 1. 8 : *S*	107.41.34	2.15.13 : *A*	+ 78	— 43
Avril 11	4.29.38,3	γ Écrev..	— 2.38. 3,5 : ☾	+ 0.10.38 : *S*	88.32.54	0.53.17 : *A*	+ 40	— 66
13	6.25.48,2	θ Lion...	— 3. 6.17,0 : ☾	+ 0.34. 6 : *S*	117.57.10	3.15.19 : *A*	+ 39	— 44
14	7.20. 1,9	o Lion...	— 0.35.21,8 : ☾	+ 1.53.54 : *S*				
		ρ Lion...	— 1.27. 2,3 : ☾	+ 2.21.12 : *S*	132.36.25	4. 8.56 : *A*	+ 46	— 41
		θ Lion...	— 2. 8.23,3 : ☾	53.55. 3 : *S*				
18	10.38.58,7	α Vierge.	— 0.45.16,5 : ☾	+ 1. 8.29 : *S*	190. 8. 5	4.43.26 : *A*	+ 24	— 81
19	11.28. 4,8	δ Corb..	+ 1. 2.31,2 : ☾	+ 1.34.23 : *S*	204. 2.17	4. 8.12 : *A*	+ 52	— 40
20	12.20.21,5	α Coupe.	+ 3.27.42,7 : ☽	— 0.38. 1 : *S*	217.40.23	3.18.31 : *A*	+ 55	— 34
		δ Corb..	+ 1.58.29,7 : ☽	23.23. 6 : *S*				
28	18.49.31,6	α Vierge.	+ 8. 2.39,0 : ☽	— 1.33. 7 : *S*	318.14.42	4.31.51 : *B*	— 2	+ 16
29	19.32.41,2	*Idem*....	+ 8.49.35,0 : ☽	+ 2.58.24 : *S*	330.44.42	4.58.35 : *B*	— 5	+ 50
		θ Vierge..	+ 9. 4.36,0 : ☽	34. 6.26 : *S*				
Mai. 12	6.12.44,6	α Serpent.	— 5.59.32,0 : ☾	+ 1.55.51 : *S*	142.50.42	4.46.35 : *A*	+ 20	— 43
		η Bouvier.	— 4.10.34,5 : ☾	50.12.30 : *S*				
13	7. 2.28,7	β Vierge.	— 1.12.19,2 : ☾	+ 0.40.11 : *S*	157.16.33	5. 9.46 : *A*	+ 17	— 2
		δ Vierge.	— 2.17.25,3 : ☾	44.48.12 : *S*				
14	7.50.37,7	δ Vierge.	— 1.25.21,8 : ☾	— 6.27.19 : *S*	171.28.27	5.13.29 : *A*	+ 31	— 48
		β Vierge.	— 0.20.15,8 : ☾	— 4.51.30 : *S*				
19	11.54.39,3	δ Scorp..	— 0. 3.56,0 : ☾	— 0. 8.28 : *S*	208.52.31	1.38.14 : *A*	+ 33	— 34

1788.	TEMPS VRAI.	ÉTOILE comparée	DIFFÉRENCES DANS LE MÉRIDIEN. des Passages.	des Hauteurs.	LIEUX OBSERVÉS DE LA LUNE. Longitude.	Latitude.	ERREUR DES TABLES. En long.	En lat.
	H. M. S.		H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	S.	S.
Mai 20	12.47.55,3	δ Scorp..	+ 0.53.20,3 : ☽	— 1.48.16 : *I*				
		σ Scorp..	+ 0.32.53,0 : ☽	17.23.48 : *I*	251. 40. 22	0. 29.18 : *A*	+ 5	— 41
		Antarès..	+ 0.24.48,3 : ☽	+ 2. 7.25 : *I*				
21	13.38.31,4	δ Scorp..	+ 1.47.56,5 : ☽	— 1.16.17 : *S*				
		σ Scorp..	+ 1.27.29,5 : ☽	17.55.44 : *S*	264. 14. 54	0. 40.32 : *B*	— 13	+ 38
		Antarès..	+ 1.19.24,5 : ☽	+ 2.39.24 : *S*				
24	16. 1. 3,1	ν Scorp..	+ 4.10.41,2 : ☽	+ 1.59.15 : *S*	301. 8. 25	3. 41. 9 : *B*	— 13	+ 15
		δ Scorp..	+ 4.22.31,7 : ☽	24.17.25 : *S*				
Juin 15	9.46. 1,8	δ Scorp..	— 0.22.20,9 : ☾	+ 0.29.56 : *S*	234. 32. 19	2. 1.30 : *A*	+ 12	— 20
		σ Scorp..	— 0.42.48,2 : ☾	19.42. 1 : *S*				
17	11.26.35,3	θ *Ophiucus*	+ 0. 5.34,5 : ☾	17.46.45 : *S*	259. 48. 50	0. 15.48 : *B*	— 21	+ 18
21	14.36.50,4	β Cap...	+ 0.32.52,7 : ☽	+ 0.50.57 : *S*	308. 57. 20	4. 9.36 : *B*	+ 59	+ 15
Juill. 13	8.28. 6,8	*Antarès*..	— 0.13.30,2 : ☾	18.34.25 : *S*	243. 17. 47	1. 12. 6 : *A*	— 2	— 1,5
		σ Scorp..	— 0. 5.25,4 : ☾					
14	9.18.16,0	*Antarès*..	+ 0.40.40,5 : ☾	+ 2.33.24 : *S*	255. 49. 7	0. 4.30 : *A*	— 15	+ 5
		σ Scorp..	+ 0.48.45,5 : ☾	+ 1.40. 0 : *S*				
15	10. 7.54,8	δ Scorp..	+ 2. 2.55,7 : ☾	— 1. 0.40 : *S*	268. 12. 25	1. 2.41 : *B*	+ 17	— 16
16	10.56.27,8	ο Sagitt..	— 0. 8.10,2 : ☾	+ 0.28.39 : *S*	280. 29. 5	2. 6. 4 : *B*	+ 9	+ 18
18	12.30.38,2	η *Ophiucus*	+ 3.27.26,3 : ☽	— 0.24.57 : *S*	304. 56. 12	3. 52. 0 : *B*	+ 2	— 18
19	13.14. 5,7	ζ *Ophiucus*	+ 4.47.31,6 : ☽	— 1.49.55 : *S*	317. 9. 31	4. 30. 0 : *B*	— 12	— 12
		λ Verseau	— 1.27.28,7 : ☽	— 3.15.27 : *S*				
25	17.36.23,7	α Dauph..	+ 5.29.56,8 : ☽	56.49.51 : *S*	33. 22. 20	3. 28.51 : *L*	— 25	— 18
		α *Ophiucus*	+ 8.34. 8,2 : ☽	+ 2.55.45 : *S*				
Août 16	11.55.43,5	λ Verseau	— 0.56.59,6 : ☽	— 0.23. 1 : *S*	325. 27. 54	4. 45.30 : *B*	— 32	— 5
21	15.37. 1,6	ζ Aigle..	+ 6.47. 2,5 : ☽	55.20.38 : *S*	29. 3. 14	3. 32. 4 : *B*	— 18	+ 4
22	16.26.56,7	α Flèche.	+ 7. 5.47,5 : ☽	+ 0.17.33 : *S*	42. 25. 45	2. 36.30 : *B*	+ 7	+ 0
Sept. 4	3.31.42,1	α² Capric.	— 5.37.36,5 : ☾	— 4.56.15 : *S*	220. 31. 10	2. 39. 6 : *A*	— 90	— 7
8	6.57.11,6	ο Sagit..	— 0.43.40,0 : ☾	— 0.47.39 : *I*	272. 10. 0	1. 44.28 : *B*	— 31	— 12
12	10. 1.10,8	α² Capric.	+ 1.20.29,5 : ☾	+ 2. 8.29 : *I*	321. 8. 59	4. 41.12 : *B*	— 31	— 37
		λ Verseau	— 1.14.21,0 : ☾	— 2.20.31 : *I*				
13	10.44. 7,0	β Verseau	+ 0.53. 6,0 : ☾	+ 0.24.42 : *I*	333. 33. 43	4. 57.10 : *B*	— 46	— 24
15	12.12.22,3	*Idem*....	+ 2.28.30,0 : ☽	44.42.42 : *I*	358. 54. 10	1. 45.20 : *B*	— 34	— 48
		α Verseau	+ 1.54. 5,6 : ☽	— 4.51.59 : *S*				
22	18.16.34,1	ε Pégase..	+ 9. 5.52,3 : ☽	+ 2.14.48 : *S*	94. 19. 48	2. 2.53 : *A*	— 63	— 35
Oct. 8	7.21.15,6	δ Capric.	— 1.14.24,8 : ☾	+ 0.50. 0 : *I*	304. 8. 22	4. 10.53 : *B*	— 71	— 7

1788.	TEMPS VRAI.	ÉTOILE comparée.	DIFFÉRENCES DANS LE MÉRIDIEN. des Passages.	des Hauteurs.	LIEUX OBSERVÉS DE LA LUNE. Longitude.	Latitude.	ERREUR des TABLES. En long.	En latit.
	H. M. S.		*H. M. S.*	*D. M. S.*	*D. M. S.*	*D. M. S.*	*S.*	*M.*
Oct. 9	8. 5. 5,7	α² Capric.	+ 1. 1.53,5 : ☾	+ 0.42. 4 : *I*	316. 22. 30	4. 43. 13 : *B*	— 70	+ 16
10	8.48. 16,0	λ Verseau	— 0.46. 7,5 : ☾	+ 0.28.28 : *I*	328. 42. 10	5. 1.32 : *B*	— 69	— 19
11	9.30.57,9	γ Verseau	+ 0.31. 1,5 : ☾	— 1.10.14 : *I*	341. 12. 14	5. 6.18 : *B*	— 59	— 21
12	10.14. 17,6	α Verseau	+ 1.33.36,7 : ☾	+ 2.31.39 : *I*	353. 55. 7	4. 56.47 : *B*	— 45	+ 8
13	10.58. 31,9	*Idem*....	+ 2. 21.44 : ☾	47.42.19 : *S*	6. 53. 38	4. 31.20 : *B*	— 65	— 9
14	11.44. 59,2	α Pégase..	+ 2. 12. 44,5 : ☾	52.18.10 : *S*	20. 8. 6	3. 51.12 : *B*	— 88	— 4
		ε Pégase..	+ 3. 32. 57,5 : ☾	+ 2.12.31 : *S*				
19	16.19. 18,2	*e* Pégase..	+ 8. 47. 24,5 : ☽	+ 1.55.13 : *I*	89. 59. 28	1. 54.34 : *A*	— 91	— 6
20	17.16. 58,9	*Idem*....	+ 9. 48. 50 : ☽	— 0. 1.58 : *I*	104. 31. 0	3. 3.45 . *A*	— 59	— 17
		α Dauph.	+ 10. 31. 12,8 : ☽	60. 3.31 : *dI*				
Nov. 2	3.43. 14,7	β Baleine.	— 6. 14.47 : ☾	— 2.33.44 : *S*	274. 16. 3	2. 18.57 : *B*	— 41	— 33
4	5. 18. 14,5	*Idem*....	— 4.31.52,3 : ☾	+ 1.42. 7 : *I*	299. 5. 12	4. 4.38 : *B*	— 42	— 22
7	7.27. 25,3	γ Verseau	+ 0. 11. 7,7 : ☾	— 3. 1.32 : *I*	335. 52. 30	5. 14.30 : *B*	— 53	— 20
		λ Verseau	— 0. 19.38,2 : ☾	35.42.52 : *I*				
10	9.37.46,0	ε Pégase.	+ 3. 10. 24,7 : ☾	— 0.14.54 : *I*	14. 14. 40	4. 13.56 : *B*	— 35	— 30
14	13. 11.38,2	α Bélier..	+ 2. 39. 50,5 : ☽	62.13.57 : *I*	70. 12. 52	0. 11.27 : *A*	— 18	— 22
		α Pégase..	+ 5.40.24,8 : ☽					
15	14. 10.57,8	ζ Taureau	+ 0.14. 8 : ☽	+ 0. 5.57 : *I*	84. 54. 43	1. 32.58 : *A*	— 28	— 6
21	19.34. 14,9	γ Verseau	+ 13. 15. 33,9 : ☽	— 0.36.40 : *I*	173. 19. 26	5. 5.50 : *A*	— 38	— 20
Déc. 9	8. 54. 18,4	α Pégase..	+ 3. 9.46,7 : ☾	+ 0.57.39 : *I*	34. 41. 54	2. 53.10 : *B*	— 62	— 33

Nota. Dans la quatrième colonne, ☾ désigne que la différence de passage a été prise entre l'étoile & le *premier* bord, ou bord *occidental* de la lune; ☽ désigne que cette différence a été prise entre l'étoile & le *deuxième* bord, ou bord *oriental* de la lune. Dans la cinquième colonne, *I* désigne que c'est le bord *inférieur* de la lune dont on a pris la différence de hauteur avec l'étoile, & *S* désigne que c'est le bord *supérieur*. *Voyez pour le surplus la note de l'extrait de 1787, page 136.*

Occultations d'Étoiles par la Lune.

ÉTOILES ÉCLIPSÉES.	JOURS.	TEMPS VRAI.	CIRCONSTANCES.
1788.		H. M. S.	
Gémaux...	20 Janv..	10. 37. 29,3	Immerſion dans le bord obſcur.
Idem	*Idem*.....	11. 48. 13,9	Emerſion du bord éclairé.
ζ Bélier.....	8 Avril.	8. 8. 46,1	Immerſion }
ψ des Gémeaux.	11 Avril.	8. 3. 40,3	Immerſion }
κ Écreviſſe.....	14 Avril.	8. 31. 34,1	Immerſion } .....bord obſcur.
3.ᵉ Écreviſſe..	10 Mai..	8. 13. 3,5	Immerſion }
14.ᵉ Sagittaire.	5 Oct..	8. 17. 1,8	Immerſion }
i Taureau....	18 Oct..	10. 57. 33,0	Immerſion ......bord éclairé.
Idem........	*Idem*.....	11. 49. 5,3	Emerſion }
29.ᵉ Sagittaire.	2 Nov.	7. 26. 1,7	Immerſion } .....bord obſcur.
61.ᵉ Sagittaire.	4 Nov.	6. 31. 15,5	Immerſion }
a Écreviſſe....	15 Nov.	18. 47. 23,6	Immerſion }
c Lion.......	21 Nov.	14. 23. 25,6	Immerſion ......bord éclairé.
	Idem....	15. 19. 48,9	Emerſion ......bord obſcur.

Voyez ci-deſſus l'occultation de Jupiter par la Lune. (Page 88.)

TABLE du mouvement de la Pendule pour la réduction des heures en degrés.

		ANTICIP. des Fixes.			ANTICIP. des Fixes.			ANTICIP. des Fixes.
Janvier.	1	} 3′ 56″,3	Juin.	1	} 3′ 59″,5	Octobre.	15	} 3′ 56″,5
Février.	1		Juillet.	11		Novemb.	3	
Mars...	20	} 3. 56,0.		14	} 4. 0,6.		6	3. 57,0.
Avril..	13	} 3. 56,7.		22	} 3. 59,0.	Décembre	1	} 3. 56,0.
	21	} 3. 57,0.		30	} 3. 58,0		9	3. 56,0.
Mai...	1	} 3. 57,5.	Août..	14	} 3. 58,5.			
	10	} 3. 58,0.	Sept...	11	3. 58,0.			
	21	} 3. 57,0.		21	} 3. 56,8.			
	25	3. 58.	Octob.	11	3. 56,0.			
	31	} 3. 59.		15	} 3. 7,5.			

L'on voit par le préſent Tableau que la Pendule étoit un peu trop ſuſceptible des variations de la température, ce qui nous a fait rejeter toutes les obſervations qui n'ont pu être accompagnées d'une vérification prochaine de l'horloge.

PREMIER

Éclipses des Satellites de Jupiter.

MOIS & JOURS.	TEMPS VRAI.				CIRCONSTANCES.
1788.	*H.*	*M.*	*S.*		
PREMIER SATELLITE.					
Janvier 4	7.	44.	5	Émersion.....	beaucoup de vapeurs.
27	7.	49.	40	Émersion.....	légères vapeurs.
Février. 19	8.	3.	17	Émersion.....	temps assez favorable.
Mars. 6	6.	26.	19	Émersion.....	temps peu favorable.
13	8.	22.	39	Émersion.....	quelques vapeurs.
20	10.	21.	8	Émersion.....	temps peu favorable.
29	6.	47.	49	Émersion.....	temps favorable.
Avril. 5	8.	46.	24	Émersion.....	temps favorable.
Août. 3	15.	2.	51[d]	Immersion....	temps peu favorable.
Octob. 4	13.	57.	31	Immersion....	temps peu favorable.
11	15.	53.	32	Immersion....	temps favorable.
18	17.	48.	15	Immersion....	temps peu favorable.
Nov.. 10	17.	57.	55	Immersion....	beaucoup de vapeurs.
28	10.	36.	57	Immersion....	temps peu favorable.
Déc.. 14	8.	45.	35	Immersion....	temps peu favorable.
DEUXIÈME SATELLITE.					
Janvier. 4	10.	32.	23	Émersion....	temps favorable.
Février. 5	10.	15.	9	Émersion....	temps assez favorable.
Octob. 7	13.	15.	33	Immersion...	temps assez favorable.
14	15.	52.	17	Immersion...	légères vapeurs.
Nov. 22	18.	1.	24	Immersion....	légères vapeurs.
Déc. 3	9.	49.	42	Immersion....	légères vapeurs.
28	6.	43.	27	Immersion....	temps peu favorable.
TROISIÈME SATELLITE.					
Mars. 7	8.	28.	40	Emersion....	temps peu favorable.
Avril. 19	8.	47.	50	Emersion.....	légères vapeurs.
Octob. 15	13.	4.	18	Émersion....	légères vapeurs.
QUATRIÈME SATELLITE.					
Nov. 25	11.	59.	37.	Émersion.....	légères vapeurs.

COMÈTES.

DANS la nuit du 25 au 26 Novembre de cette année, M. Meſſier a découvert une Comète entre les Étoiles χ & ψ de la cuiſſe de la grande Ourſe, quoiqu'elle ne fût viſible qu'avec le ſecours des lunettes; elle étoit aſſez brillante, & la queue pouvoit avoir deux ou trois degrés. Cette Comète a été obſervée juſqu'à la fin de l'année. Voici les élémens que M. Méchain en a déterminés d'après ſes propres obſervations, dans un intervalle de 34 jours.

Lieu du nœud aſcendant................	$5^s\ 7^d\ 10'\ 28''$.
Inclinaiſon de l'orbite................	12. 28. 20.
Lieu du périhélie..................	3. 9. 8. 27.
Paſſage au périhélie, le 10 Nov. à.......	$7^h\ 35'\ 0''$ *temps moy.*
Logarithme de la diſtance périhélie........	0,0265381.
Sens du mouvement...............	Rétrograde.

Le 21 Décembre, Miſſ. Herchel a découvert, en Angleterre, une autre Comète proche de l'Étoile β de la Lyre; on n'en a fait à Paris que très-peu d'obſervations. Cette Comète étoit infiniment petite & très-difficile à apercevoir avec les meilleures lunettes.

TABLE de la Déclinaison de plusieurs Étoiles, déduite de leur hauteur méridienne, observée au quart-de-cercle mobile de 6 pieds, en 1788.

MOIS & JOURS.		ÉTOILES.	NOMBRE des OBSERVATIONS	HAUTEUR OBSERVÉE.			DÉCLINAISON MOYENNE au 1.er Janvier 1788.		
1788.				*D.*	*M.*	*S.*	*D.*	*M.*	*S.*
Janvier..	10	Alcione......	3	64.	36.	25,2	23.	26.	2.B.
Juillet..	2	Antarès.......	3	15.	16.	11,4	25.	56.	55.A.
Juin....	15	*Idem*.........	2	"	"	16,0			
Mai....	23	*Arcturus*......	6	61.	27.	40,0	20.	17.	32.B.
Juillet..	15	*Idem*.........	3	"	"	43,2			
Mars...	16	*Syrius*........	2	24.	45.	17,1	16.	26.	22.A.
Août...	14	Aigle.......	5	49.	30.	4,8	8.	19.	15.B.
Déc....	28	α Bélier.......	4	63.	37.	49,7	22.	27.	5.B.
Septemb.	12	α^1 Capricorne..	8	28.	2.	47,3	13.	9.	5.A.
Septemb.	11	α^2 Capricorne..	7	28.	0.	27,3	13.	11.	26.A.
Octobre.	26	*Idem*.........	7	"	"	30,5			
Avril...	20	α Corbeau.....	3	17.	39.	35,0	23.	32.	50.A.
Octobre.	15	α Dauphin.....	3	56.	21.	10,2	15.	10.	17.B.
Août...	3	α Flèche......	5	58.	42.	54,7	17.	32.	18.B.
Juillet..	16	α Hercule.....	3	55.	49.	5,2	14.	38.	36.B.
Septemb.	22	α Lyre.......	3	79.	46.	3,7	38.	35.	44.B.
Juillet...	31	α *Ophiucus*....	12	53.	54.	6,0	12.	43.	30.B.
Nov....	14	α *Pégase*.....	3	55.	14.	56,4	14.	3.	57.B.
Nov....	28	*Idem*........	4	"	15.	0,9			
Octobre.	15	α Verseau.....	2	39.	50.	50,6	1.	20.	33.A.
Avril...	29	α Vierge......	5	31.	8.	1,4	10.	3.	1.A.
Mai....	25	*Idem*........	2	"	"	2,2			

Suite de la *Table de la Déclinaison, &c.*

Mois & Jours.	Étoiles.	Nombre des observations	Hauteur observée.			Déclinaison moyenne au 1.er Janvier 1788.		
1788.			D.	M.	S.	D.	M.	S.
Septemb.. 7	β Aigle.......	9	47.	4.	18,5	5.	53.	18.B.
Nov.... 1	*Idem*.........	3	"	"	21,3			
Juin.... 5	β Balance.....	2	32.	35.	37,7	8.	35.	28.A.
Nov.... 2	β Baleine......	3	22.	3.	24,9	19.	9.	12.A.
Déc.... 28	β Bélier.......	2	60.	56.	46	19.	45.	57.B.
Avril... 30	β Lion. *.....	2	56.	55.	33,3	15.	45.	24.B.
Mai.... 26	β Hercule.....	2	63.	7.	52,5	21.	57.	46.B.
Juillet.. 14	*Idem*.........	6	63.	8.	5,5			
Février.. 7	β Taureau.....	3	69.	34.	46,8	28.	24.	36 B.
Septemb. 7	β Verseau.....	3	34.	41.	48,2	6.	29.	43.A.
Septemb. 7	γ Aigle......	8	51.	17.	21,4	10.	6.	28.B.
Octobre. 27	γ Capricorne...	4	23.	35.	45,0	17.	36.	38.A.
Avril.... 11	γ Écrevisse.....	4	63.	23.	13,5	22.	13.	7.B.
Août.... 5	γ *Ophiucus*.....	4	43.	58.	58,8	2.	48.	5.B.
Nov.... 23	γ Pégase......	5	55.	11.	16,1	14.	0.	15.B.
Octobre. 12	γ Verseau.....	3	38.	44.	24,9	2.	27.	5.A.
Nov.... 22	*Idem*.........	3	"	"	22,5			
Mai.... 8	γ Vierge.....	6	40.	53.	26,4	0.	17.	10.A.
Octobre. 26	δ Capricorne *..	4	24.	7.	26,7	17.	4.	54.A.
Avril... 20	δ Corbeau.....	2	25.	51.	23,8	15.	20.	1.A.
Nov..... 6	δ Écrevisse....	2	60.	5.	22,1	18.	55.	20.B.
Nov... 21	*Idem*.........	3	"	"	25,6			
Août... 14	δ Hercule......	2	66.	16.	20	25.	6.	0.B.
Mai.... 8	δ Lion.......	3	62.	50.	58,5	21.	40.	54.B.
Mai.... 25	δ Scorpion....	5	19.	12.	4,5	22.	0.	17.A.
Mai.... 20	δ Vierge......	2	45.	43.	36,8	4.	33.	10.B.

Suite de la *Table de la Déclinaison, &c.*

MOIS. & JOURS.	ÉTOILES.	NOMBRE des OBSERVATIONS	HAUTEUR OBSERVÉE.	DÉCLINAISON MOYENNE au 1.er Janvier 1788.
1788.			D. M. S.	D. M. S.
Mai. . . . 12	ε Bouvier.	3	69. 8. 27,7	27. 58. 31. B.
Janvier. . 10	ε Gémeaux.	4	66. 29. 33,0	25. 19. 23. B.
Mars . . . 26	ε Lion.	2	65. 54. 30,0	24. 44. 28. B.
Avril. . . . 19	ε Vierge.	4	53. 16. 18,2	12. 6. 6. B.
Août. . . 23	ζ Aigle.*	5	54. 44. 17,4	13. 33. 34. B.
Février. . 7	ζ Gémeaux. . . .	4	62. 2. 7,5	20. 51. 54. B.
Avril. . . 25	ζ Lion.	7	65. 37. 58,0	24. 27. 56. B.
Juillet. . . 13	ζ *Ophiucus*.	6	31. 3. 50,5	10. 7. 28. A.
Août. . . . 2	ζ Serpent.	8	37. 31. 29,3	3. 39. 38. A.
Janvier. . 9	ζ Taureau.	3	62. 10. 9,0	20. 59. 49. B.
Nov . . . 3	*Idem*.	2	" " 6,3	
Mai. . . . 14	η Bouvier. * . . .	2	60. 38. 1,7	19. 27. 55. B.
Février. . 17	η Gémeaux. . . .	6	63. 43. 15,4	22. 33. 1. B.
Juillet. . . 18	η *Ophiucus*.	5	25. 44. 50,3	15. 26. 54. A.
Mai. . . . 25	η Gr. Ourse. . . .	2	91. 32. 25,0	50. 22. 42. B.
Avril. . . 15	θ Lion.	2	57. 45. 10,7	16. 35. 2. B.
Avril. . . 29	θ Vierge.	3	36. 46. 32,6	4. 24. 11. A.
Juillet. . . 19	λ Verseau.	3	32. 29. 23,3	
Septemb. 13	*Idem*.	6	" " 27,1	8. 42. 17,5. A.
Nov. . . . 28	*Idem*.	5	" " 33,0	
Juillet. . . 22	μ Sagittaire. . . .	5	20. 6. 31,9	21. 5. 53. A.
Août. . . . 9	*Idem*.	5	" " 37,5	

Suite de la *Table de la Déclinaison, &c.*

MOIS & JOURS.	ÉTOILES.	NOMBRE des OBSERVATIONS	HAUTEUR OBSERVÉE.	DÉCLINAISON MOYENNE. au 1.er Janvier 1788.
1788.			*D. M. S.*	*D. M. S.*
Juin.... 15	ν Scorpion *....	2	22. 18. 7,8	18. 53. 49.A.
Juillet.. 11	*Idem*.........	3	〃 〃 6,9	
Avril... 19	ρ Lion.......	2	51. 33. 47,5	10. 23. 31.B.
Mai.... 20	σ Scorpion....	2	16. 8. 47,0	25. 4. 17.A.
Juillet.. 2	*Idem*.........	3	〃 〃 37,9	
Décemb. 20	τ Pégase......	2	63. 45. 46,3	22. 34. 56.B.
Septemb. 23	*e* Pégase......	5	60. 5. 4,6	18. 54. 16.B.
Octobre. 13	*Idem*.........	13	〃 〃 5,6	
Nov.... 8	*Idem*.........	7	〃 〃 9,0	
Mars... 29	*l* Hidre.......	2	40. 59. 9	0. 11. 28.A.

Les hauteurs d'étoiles rapportées dans la Table précédente ne sont corrigées que de l'erreur de la lunette & de la division de l'instrument; on pourra donc calculer la déclinaison moyenne avec tels élémens qu'il plaira d'employer. Quant à nous, nous avons supposé la hauteur de l'équateur de 41^d 9′ 46″. Nous nous sommes servi des Tables de Mezger pour l'aberration & la nutation, de celles du recueil de M. de la Lande, pour les réfractions moyennes, auxquelles nous avons appliqué la correction relative à la hauteur du baromètre & du thermomètre. Nous avons marqué de l'astérisque * les étoiles que nous avons pu vérifier cette année, & qui dans l'extrait de 1787, *page 146*, paroissoient avoir besoin d'une nouvelle détermination; le résultat de différentes années n'étant pas absolument le même, ce qui n'a guère lieu, comme on peut le remarquer, que pour les étoiles dont la déclinaison est australe, & qui étant peu élevées au-dessus de l'horizon, sont plus sujettes aux inégalités des réfractions.

SUPPLÉMENT.

EXTRAIT
DES
PRINCIPALES OBSERVATIONS,
FAITES DEPUIS 1767 JUSQU'EN 1777.

J'AI rapporté dans le ſupplément de l'extrait de 1786, les principales obſervations faites à l'Obſervatoire royal depuis 1777 juſqu'en 1785. Voici celles qui ont eu lieu dans les dix années précédentes ; je les ai toutes recueillies & recalculées avec ſoin, ce qui m'a donné lieu de rectifier quelques fautes, ſoit de calcul, ſoit d'impreſſion, qui avoient été commiſes dans ce qui en avoit été précédemment publié en divers ouvrages, & principalement dans les Mémoires de l'Académie. Il eſt bon de prévenir ici que la vétuſté des cabinets de l'Obſervatoire royal ayant néceſſité leur reconſtruction, on fut obligé de démonter, le 1.er Août 1776, le grand quart-de-cercle mural de 6 pieds, fait par Langlois en 1732, & placé depuis ce temps dans l'un de ces cabinets. Il fallut auſſi enlever le grand quart-de-cercle mobile, ce qui a interrompu pendant un laps de temps aſſez conſidérable la ſuite des obſervations : en effet, le mural ne put être remis en place qu'au mois d'Octobre 1778 ; il a été démonté de nouveau au mois d'Août 1780, à l'occaſion d'une fouille faite pour de nouveaux cabinets en avant des anciens, & n'a plus ſervi depuis, d'autant qu'au mois d'Avril 1782, j'ai fait placer dans les nouveaux cabinets une très-bonne lunette méridienne dont on n'a ceſſé depuis de faire uſage, & qui certainement a procuré des obſervations infiniment plus préciſes que celles que

l'on pouvoit faire au mural qui avoit le désavantage d'être soutenu & suspendu à l'extrémité de trois branches de fer susceptibles de se dilater plus ou moins, & de faire changer quelquefois le plan & les déviations de l'instrument, ce qui ne permettoit de comparer les planètes qu'à des étoiles situées absolument dans le même parallèle. Cette mauvaise disposition de l'instrument avoit été nécessitée par la situation des lieux, & le manque de secours & de moyens de tout genre, pour mettre l'Observatoire royal dans l'état convenable où il devoit être, & où depuis quelques années nous commençons à le voir.

§. I.er *Éclipses de Soleil.*

UNE seule éclipse de Soleil a eu lieu, pour Paris, dans l'intervalle de dix années, compris depuis 1767 jusqu'en 1777 (1). On a observé ce qui suit :

Le 4 Juin 1769.	TEMPS VRAI.	*CIRCONSTANCES.*
Commencement...............	6h 46′ 44,″5	Cassini, lunette acromatique de Dollond,
Fin.......................	8. 27. 17,2	
Croissante.	Décroissante.	
L'Éclipse est de 1 doigt. 6h 53′ 7″5	8h 20′ 28,″1	Maraldi, lunette de 7 pieds, garnie d'un réticule de 13 fils, a estimé le commencement de l'Éclipse 5″ plus tard que M. Cassini, & la fin 7″ plus tôt. Ces M.rs ont aussi observé l'entrée dans l'ombre & la sortie de plusieurs taches qui étoient sur le disque du Soleil.
2..... 6. 58. 38,5	8. 14. 2	
3..... 7. 5. 57,6	8. 6. 42,9	
4..... 7. 14. 9,6	7. 57. 44,9	
5..... 7. 23. 14,7	7. 47. 49,8	
Plus gr. Phase. $5\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{3}$ 7. 37. 9,8		

(1) Le 23 Mars 1773, il y a eu à la vérité une autre éclipse de Soleil, mais elle a fini peu de minutes après le lever du Soleil pour Paris, & dans les vapeurs de l'horizon ; on a néanmoins déterminé cette fin à l'Observatoire royal, à 5h 56′ 18″ temps vrai : on sent bien que cette observation ne peut être fort exacte.

§. II.

§. II. *Éclipses de Lune.*

De huit éclipses de Lune qui ont eu lieu pour Paris, dans l'intervalle de dix années, compris depuis 1767 jusqu'en 1777, on n'a pu observer que les suivantes:

Le 4 Janvier 1768.

Une brume assez considérable empêche d'observer bien exactement l'immersion & l'émersion des taches.

TEMPS VRAI.

Commencement.			Fin.
3^h 25′ 45″.	Cassini.	Lunette de 7^p	5. 44. 9.
25. 19..	Chappe.	Lunette de 9.	44. 28.

Le 30 Juin 1768.

La Lune s'est couchée vers le milieu de l'Éclipse, on n'a observé que les phases suivantes.

	3^h 2′ 0″	L'Éclipse est de 8 doigts.
	3. 6. 0.	. . . . de 9 doigts.
	3. 17. 0.	. . . . de 11 doigts.
Immersion totale...	3. 23. 56.	(Lunette de 7 pieds, M. Maraldi).

Le 23 Décembre 1768.

Temps favorable, cette Éclipse a été observée par M. Maraldi.

Le commencem.t l'immersion & le milieu avoient eu lieu avant le lever de la Lune.

TEMPS VRAI.	TACHES.
4^h 27′ 40.	*Copernic*, hors de l'ombre.
39. 16.	*Manilius*, hors de l'ombre.
46. 27.	*Plinius*, hors de l'ombre.
47. 52.	*Mare serenitatis*, hors de l'ombre.
50. 22.	*Promontorium acutum*, hors de l'ombre.
55. 52.	*Proclus*, hors de l'ombre.
5. 0. 48.	*Mare crisium*, hors de l'ombre.
3. 4.	On commence à voir le bord de la Lune.

Grandeur de la partie éclairée.

4h 26′ 26.	Neuf doigts environ.	4h 49′ 27.	Trois doigts.
32. 16.	Sept doigts environ.	53. 52.	Deux doigts.
35. 36.	Six doigts environ.	58. 3.	Un doigt.
42. 56.	Cinq doigts environ.		

Fin de l'Éclipse.............. { 5h 4′ 48″. douteuse. 5. 28. certaine.

Le 28 Avril 1771.

Les nuages permettant à peine de distinguer les taches de la Lune, on n'a observé que ce qui suit :

TEMPS VRAI.	
12h 52′ 5	On juge le commencement de la pénombre.
13. 10. 35	L'Éclipse paroît commencée.

Le 23 Octobre 1771.

Le temps a été peu favorable pour cette observation ; on n'a pu bien observer que la fin de l'Éclipse.......... 6h 2′ 33″.

Le 11 Octobre 1772.

Le commencement & l'immersion ont eu lieu avant le lever de la Lune.

TEMPS VRAI.	ÉMERSION DES TACHES.
6h 30′ 2″	Émersion.
6. 31. 26.	*Grimaldus*, sort de l'ombre.
38. 27.	*Aristarchus*.
51. 59.	*Copernic*.
56. 1.	*Tycho*.
7. 7. 20.	*Manilius*.
11. 2.	*Menelaüs*.
11. 51.	*Dionysius*.
20. 52	*Promontorium acutum*.
25. 11.	*Proclus*.
31. 42.	*Langrenus*.

Fin de l'Éclipse......... { 7h 35′ 14″ M. Duvaucel. 35. M. du Sejour. 52. M. Cassini.

Le 30 Septembre 1773.

Le commencement a eu lieu avant le lever de la Lune, & les vapeu de l'horizon n'ont permis de distinguer les taches & de commencer le observations que vers le milieu de l'Éclipse; le bord de la Lune étoit alors très-rouge & dentelé.

Temps vrai.	Émersion des taches,
6h 6′ 20″	le centre de *Tycho*, hors de l'ombre (Cassini, lun. simp. de 10r)
25. 10.	de *Gassendus.*
28. 30.	de *Grimaldi.*
35. 35.	de *Lansberge.*
44. 25.	de *Kepler*, hors de l'ombre.
55. 23.	de *Copernic.*
7. 6. 30.	de *Dionysius.*
19. 5.	de *Tymochares.*
12. 29.	de *Manilius.*
15. 15.	de *Menelaüs.*
23. 5.	de *Platon.*

Fin très-douteuse à cause des vapeurs. { 7h 42′ 9″ M. Duvaucel.
22. M. du Sejour.
38. M. l'Ab. de Rochon.

Le 30 Juillet 1776.

Cette éclipſe a été totale ; le ciel fut très-favorable au commencement & à la fin ; mais pendant l'immerſion totale & au milieu de l'éclipſe, un nuage qui occupoit toute la partie auſtrale du ciel, a empêché d'obſerver la Lune au méridien. L'ombre pendant cette éclipſe a été bien terminée, mais ſi claire qu'on voyoit diſtinctement les taches au travers. Pendant toute la durée de l'immerſion, le bord récemment immergé de la Lune paroiſſoit à travers l'ombre de couleur rougeâtre, & le bord oriental de couleur argentine, de ſorte qu'à la vue on croyoit toujours voir un filet de lumière autour de la Lune.

	TEMPS VRAI.	
	CASSINI.	JEAURAT.
Commencement de la pénombre...	$10^h\ 14'\ 6''$	$10^h\ 13'\ 28''$
Commencement certain de l'éclipſe.	10. 19. 3.	10. 19. 20.
Immerſion totale..............	11. 17. 48.	11. 17. 40.
Émerſion..................	12. 53. 3.	12. 50. 40.
Fin......................	13. 52. 48.	13. 52. 25.
Immerſion d'une étoile.........	11. 29. 55.	
Lunette ſimple de 10 pieds.		Lunette achrom. de 3^{Pi} groſſiſſant 60 fois.

	TACHES.	TEMPS VRAI.	
		IMMERSION.	ÉMERSION.
Obſervations des taches. Lunette $10.^{P}$	Grimaldi.......	$10^h\ 21'\ 48''$	$12^h\ 56'\ 48''$
	Kepler.......	29. 18.	13. 7. 33.
	Copernic......	40. 8.	16. 58.
	Platon.......	47. 23.	23. 53.
	Tycho.......	50. 3.	11. 53.
	Manilius.....	53. 13.	30. 23.
	Menelaüs.....	56. 48.	33. 33.
	Plinius.......	59. 53.	38. 48.

§. III. *Équinoxes.*

ANNÉES.	HAUTEUR OBSERVÉE du bord ſupérieur du Soleil.	DÉCLINAISON du centre du Soleil.	HEURE de L'ÉQUINOXE.	INTERVALLE d'un Équinoxe à l'autre.	ANNÉE.
1767.	21 Mars: 41ᵈ 42′ 35″	0ᵈ 15′ 44″3 : B	20 Mars: 8ʰ 3′ 4″	j°. h. ′. ″.	365 6ʰ 2′ 17″
1768.	19 Mars: 41. 12. 58.	0. 13. 54,2 : A	19 Mars: 14. 5. 21.	186. 11. 15. 28.	365. 5. 32. 22.
1768.	22 Sept.: 41. 28. 5.	0. 1. 18,9 : B	22 Sept.: 1. 20. 49.	178. 18. 16. 54.	365. 6. 12. 39.
1769.	21 Mars: 41. 54. 50.	0. 28. 0.1 : B	19 Mars: 19. 37. 43.	″ ″ ″ ″	365. 5. 37. 2.
1770.	20 Mars: 41. 25. 2,4.	0. 1. 48,9 : A	20 Mars: 1. 50. 22.	″ ″ ″ ″	″ ″ ″ ″
1771.	20 Mars: 41. 19. 30.	0. 7. 21,5 : A	20 Mars: 7. 27. 24.	″ ″ ″ ″	
1772.*	23 Sept.: 41. 4. 10,8	0. 22. 36,5 : A	22 Sept.: 0. 50. 42.	178. 18. 8. 44.	
1773.*	19 Mars: 41. 8. 7,9.	0. 18. 44.4 : A	19 Mars: 18. 59. 26.		

Toutes ces hauteurs du bord ſupérieur du Soleil (excepté en 1772 & 1773) ont été obſervées au quart-de-cercle mural, lequel étoit diviſé par tranſverſales de minute en minute, dont on eſtimoit enſuite facilement le quart, le tiers, la moitié ou les trois quarts, ce qui pouvoit laiſſer toujours une incertitude de 6 à 8″ ſur les hauteurs, & étoit bien moins précis que lorſqu'on prenoit ces hauteurs au grand quart-de-cercle mobile de 6 pieds avec un micromètre qui donnoit juſqu'à la préciſion de la demi-ſeconde ; ce qui a eu lieu en 1772 & 1773, & dans toutes les autres années ſuivantes rapportées dans le ſupplément de l'extrait de 1786, *p. 78.* Voyez-y en même temps la note qui ſuit le pareil Tableau.

§. IV. *Solſtices.*

ANNÉES.	HAUTEUR ſolſt. du bord ſupérieur du Soleil.	OBLIQUITÉ DE L'ECLIPTIQUE. Apparente.	Vraie.	DISTANCE SOLSTICIALE du bord ſupérieur du Soleil. *A Arcturus.*	A β Baleine.	CIRCONSTANCES.
1767.	64ᵈ 54′ 14″	23ᵈ 28′ 15″2	23ᵈ 28′ 10″4	3ᵈ 19′ 49″,9		Par 5 obſerv. diff. de 6″,5.
	18. 0. 46,6	6,1	23. 28. 1,3	″ ″ ″	3ᵈ 55′ 26″	Par 5 obſerv. diff. de 10″,8
1768.	18. 0. 49,4	23. 28. 3,3	23. 28. 2,6	″ ″ ″		Par 1 ſeule obſervation.
1770.	64. 53. 59	23. 28. 0,2	23. 28. 4,1	3. 20. 27,8		Par 3 obſerv. diff. de 4″.
	18. 0. 49,8	23. 28. 2,9	23. 28. 8,1	″ ″ ″		Par 1 ſeule obſervation.
1771.	64. 54. 3,2	23. 28. 4,4	23. 28. 10,7	3. 20. 46,0		Par 3 obſerv. diff. de 5″.
1772.	64. 53. 46,7	23. 27. 47,9	23. 27. 56,0	3. 20. 56,5		Par 4 obſerv. diff. de 4,1″.
	18. 0. 50,7	23. 28. 2,0	23. 28. 10,6	″ ″ ″	3. 56. 52.	Par 4 obſerv. diff. de 8″.
1773.	64. 53. 46,9	23. 27. 48.1	23. 27. 57,0	3. 20. 58,8		Par 3 obſerv. diff. de 2″,5.
	18. 0. 46,4	23. 28. 6,3	23. 28. 15,2	″ ″ ″		Par 3 obſerv. diff. de 4″,5.
1774.	64. 53. 46,5	23. 27. 47,7	23. 27. 56,4	3. 21. 36,0		Par 7 obſerv. diff. de 7″,4.
	18. 0. 48	23. 28. 4,7	23. 28. 11,0	″ ″ ″	3. 57. 28.	Par 6 obſerv. diff. de 12″.
1775.	64. 53. 40,8	23. 27. 42,0	23. 27. 49,7	3. 21. 40,0		Par 5 obſerv. diff. de 9″,4.
1776.	64. 53. 51,1	23. 27. 52,3	23. 27. 57,9	3. 22. 7,8		Par 5 obſerv. diff. de 3″,4.

Nous avons ſuppoſé la réfraction de 27″ à 65^{d}; & 2′ 53″,5 à 18^{d}. La parallaxe 3″,7 au ſolſtice d'été, & 8″,4 au ſolſtice d'hiver. Le demi-diamètre du Soleil 15′ 47″ au ſolſtice d'été, 16′ 19″,5 au ſolſtice d'hiver. La hauteur de l'équateur 41^{d} 9′ 48″.

Toutes ces hauteurs ont été priſes avec le grand quart-de-cercle mobile de ſix pieds. Nous ne rapportons point ici celles qui ont été obſervées au mural, n'étant point ſuſceptibles de la préciſion qu'exige une recherche auſſi importante que celle de l'obliquité véritable de l'écliptique, ſur laquelle il ne reſte plus qu'une incertitude de 10 à 12 ſecondes. Or, comme nous l'avons dit dans l'*article précédent*, on ne peut compter qu'à 8 ſecondes près ſur les hauteurs priſes au mural.

§. V. *Oppoſition des Planètes.*

ANNÉES.	TEMPS de l'OPPOSITION. Heure moyenne.	LIEU de l'Oppoſition vraie, comptée de l'Équinoxe vrai.		ERREUR des TABLES.		CIRCONSTANCES
		Longitude.	Latitude.	En longit.	En Latit.	
	H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.	M. S.	
SATURNE.						
1767.	22 Déc.: 0.39.19	90.32.21	1. 0.44:A	— 0.47	— 0. 7	Par 6 obſervations.
1769.	4 Janv: 4.17.43	104.42.59	0.20.27:A	— 1.21	0.	Par 3 obſerv.
1770.	18 Janv: 5.57.17	118.48.18	0.20.24.B	— 1.50	—0.33	Par 3 obſerv.
1771.	1 Fév.: 4. 4.35	132.41.47	1. 0.20:B	— 3.30	—0.12	Par 3 obſerv.
1772.	14 Fév.: 21.57.38	146.21. 0	1.35.42:B	— 5. 5	—0.16	Par 2 obſerv.
1773.	27 Fév.: 10.53.22	159.43.30	2. 4.36:B	— 6. 7	—0.40	Par 4 obſerv.
1774.	13 Mars: 18.12. 9	172.46. 9	2.26.46:B	— 8.22	—0.44	Par 4 obſerv.
1775.	25 Mars: 20.41.27	185.31. 5	2.40.43:B	— 9.11	—0.38	Par 4 obſerv.
1776.	6 Avril: 17.34. 7	197.57. 5	2.46.38:B	—10. 8	—0.44	Par 2 obſerv.
1779.	14 Mai: 5.36. 6	233.41. 5	2.21. 1:B	—11.20	—0.46	Par 5 obſerv.
1780.	25 Mai: 11. 7.32	245.12. 7	2. 1. 2:B	—11.19	— 0. 8	Par 8 obſerv.
1782.	18 Juin: 17.18. 4	267.55.58	1. 7.24:B	—10.57	+0.10	Par 6 obſerv.
1783.	30 Juin: 20. 1.39	279.14.50	0 36. 7:B	—10.31	+0.11	Par 6 obſerv.
1785.	24 Juill.: 5.40.35	302. 3.59	0.29.50.	— 8.58	—0.22	Par 6 obſerv.
1786.	5 Août: 14.22.37	313.40.15	1. 1.59.	— 7.47	—0.40	Par 6 obſerv.

ANNÉES.	TEMPS de l'OPPOSITION. Heure moyenne.	LIEU de l'Opposition vraie, comptée de l'Équinoxe vrai.		ERREUR des TABLES.		CIRCONSTANCES.
		Longitude.	Latitude.	En longit.	En Latit.	
	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.	M. S.	
		JUPITER.				
1767.	8 Mars: 6.31. 7	167.59.46	1.30. 34:B	— 2.23	— 0.10	Par 4 observations.
1768.	6 Avril: 17.55.40	197.55. 7	1.35.41:B	— 2. 9	— 0.35	Par 4 observ.
1769.	8 Mai : 0.46. 6	228. 6.40	1.14. 50:B	— 1. 1	— 0.20	Par 3 observ.
1770.	9 Juin : 21.45.36	259.24.59	0 31. 26:B	— 1.20	— 0.47	Par 4 observ.
1771.	14 Juill : 20.39.48	292.31.58	0.24. 44:A	— 1.33	+ 0.59	Par 3 observ.
1772.	19 Août: 18.31.22	327.39.53	1. 15.27:A	— 3.16	+ 0.30	Par 4 observ.
1778.	9 Fév. : 22.52. 3	141.53.44	1. 6.45:B	— 5.27	+ 0.17	Par 2 observ. dout.
1779.	12 Mars: 12.11.12	172.18.25	1.32. 47:B	— 4. 6	— 0.10	Par 6 observ.
1780.	11 Avril: 1.33.19	202.14.10	1.33. 51:B	— 3.12	— 0.31	Par 4 observ.
1781.	12 Mai : 13. 9. 0	232.33.44	1. 9.16:B	— 3. 8	— 1. 0	Par 3 observ. dout
1782.	14 Juin : 17.13.27	264. 6.40	0.23.44:B	— 4.14	— 1. 0	Par 6 observ.
1783.	19 Juill.: 23.47.50	297.31. 4	0.32. 57:A	— 5. 0	+ 1. 5	Par 4 observ.
1785.	1 Oct. : 21.47.14	9.34.13	1.38. 39:A	— 6.40	— 0.35	Par 6 observ.
1786.	7 Nov : 21.50. 3	46.12. 8	1.17.21:A	— 7. 0	— 1. 3	Par 6 observ.
		MARS.				
1768.	25 Oct.: 19.30.17	33.25.33	1.27.16:A	— 5.30	— 0.14	Par 3 observations.
1770.	14 Déc.: 11.19.56	83. 7.10	2.53. 9:B	— 4.27	+ 0.10	Par 4 observ.
1779.	11 Mai : 22. 3.42	231.27.18	0.20.39:A	+ 0.30	+ 0.45	Par 3 observ.
1783.	1 Oct. : 0. 0.39	8.10. 6	4. 6. 5:A	— 2.52	— 0.24	Par 7 observ.

L'on retrouve ici plusieurs oppositions que nous avions déjà rapportées dans l'extrait de 1786 ; mais alors nous avions calculé l'opposition *apparente* comptée de l'Équinoxe *apparent ;* au lieu qu'ici, c'est l'opposition *vraie* comptée de l'Équinoxe vrai ou *moyen* que nous avons déterminée, & que nous avons cru devoir rapporter de préférence, comme étant la plus intéressante à offrir aux Astronomes qui veulent s'occuper de la perfection & de la rectification des Tables. Les passages & les hauteurs des Planètes & des Étoiles auxquelles on les a comparées, ont été pris depuis 1767 jusqu'en 1782, au mural de 6 pieds mais comme cet instrument étoit suspendu à l'extrémité de

barres de fer qui, par leur dilatation, pouvoient rendre ſa déviation variable ; on n'a jamais comparé aux Planètes que des Étoiles qui ne différoient de leur parallèle que de quelques minutes ou un demi-degré au plus. Depuis 1782, on a toujours obſervé les paſſages à une lunette méridienne, & les hauteurs au grand quart-de-cercle mobile de 6 pieds.

§. VI. *Occultations par la Lune.*

ASTRES ÉCLIPSÉS.	ÉPOQUES.	TEMPS VRAI.	CIRCONSTANCES.	
α de l'Écreviſſe.	1773. le 6 Févr.	6^h 45′ 49″,6.	Immerſion.	
		7. 40. 15,3.	Émerſion un peu tard.	
Aldebaran....	1774. le 14 Avril.	6. 26. 2,1.	Immerſion douteuſe de 1″.	
		7. 35. 57,8.	Émerſion.	
Saturne.....	1775. le 18 Févr.	9. 11. 5,8.	Contact extér. de l'anſe.	à l'Immerſion.
		12. 16,8.	intérieur de l'anſe...	à l'Immerſion.
		9. 11. 26,8.	Contact extérieur du globe de Saturne....	à l'Immerſion.
		11. 52,8.	Intér. du globe de Sat..	à l'Immerſion.
		10. 10. 5,8.	Contact intérieur du globe de Saturne..	à l'Émerſion.
		10. 37,8.	Extérieur.......	à l'Émerſion.
		10. 11. 9,8.	Contact extérieur de la dernière anſe....	à l'Émerſion.

§. VII. *Paſſage de Vénus ſur le Soleil, le 3 Juin 1769.*

Les nuages ne ſe ſont diſſipés qu'à 7^h 38′; Vénus étoit déjà en partie entrée ſur le Soleil, on n'a pu obſerver que le ſecond contact de l'entrée.

	TEMPS VRAI.		
Contact intérieur...	7^h 38′ 53″	M. Caſſini de Thury..	Lunette achrom... de $3^p \frac{1}{2}$.
	38. 50.	M. Maraldi.........	Lunette achrom... de 3^p.
	38. 58.	M. le Duc de Chaulnes.	Lunette achrom... de $3^p \frac{1}{2}$.

Diamètre de Vénus, 61″ $\frac{1}{4}$ environ.

Diſparition & réapparition de l'anneau de Saturne en 1773 & 1774.

Le 26 ſeptembre 1773, vers 5 heures du matin, les anſes paroiſſent comme deux lignes de lumière, l'orientale plus continue que l'occidentale, qui paroiſſoit comme ſéparée du corps de Saturne.

Le 29

Le 29 ſeptembre, l'anſe occidentale interrompue auprès du diſque de Saturne; on y remarque deux points brillans, l'un à ſon extrémité, l'autre un peu plus proche de Saturne. Un pareil point brillant paroît à l'extrémité de l'autre anſe orientale.

Le 30 ſeptembre, l'anſe orientale paroît raccourcie; elle a, ainſi que l'anſe occidentale, un point brillant à ſon extrémité, mais il eſt moins apparent.

Le 2 octobre, les anſes très-foibles, l'orientale raccourcie.

Mauvais temps juſqu'au 6.

Le 6 octobre, les anſes très-foibles & comme un filet de lumière; petits points lumineux à l'orient du diſque.

Le 7, le 8 & le 9, mauvais temps.

Le 10 octobre, Saturne parfaitement rond (lun. achrom. à trois verres, de 3 pieds $\frac{1}{2}$ de foyer & 42 lignes d'ouverture).

La première réapparition qui eut lieu en janvier 1774, ne fut obſervée que le 16, mais elle avoit déjà eu lieu & été aperçue dès le 11 par M. Meſſier.

La ſeconde diſparition a été obſervée ainſi en 1774.

Le 2 avril 1774, à $10^h \frac{1}{4}$ du ſoir, les anſes de Saturne ſont très-foibles & comme un trait de lumière.

Le 3 avril, on diſtinguoit encore les anſes, mais très-difficilement; il eſt vrai qu'un vent affreux agitoit beaucoup la lunette.

Le 5 avril, à 10^h du ſoir, très-beau temps; il n'y avoit plus d'apparence d'anſe à Saturne (même lunette que ci-deſſus).

La ſeconde réapparition a été obſervée au mois de juillet.

Le 1.er juillet, à $9^h \frac{1}{2}$ du ſoir, Saturne, au premier coup-d'œil, paroît ſans anſes; mais en regardant attentivement, on aperçoit à l'orient un filet de lumière très-foible, & à l'occident un encore plus foible, & interrompu proche du corps de Saturne.

Le 2 juillet, les deux traits de lumière vus hier, s'aperçoivent au premier coup-d'œil, ſur-tout l'anſe orientale.

§. VIII. *Comparaison du Soleil à diverses Étoiles.*

ÉPOQUES.	ÉTOILES.	DIFFÉRENCE de déclinaison du bord sup. du Soleil & de l'Étoile.	PASSAGE DU CENTRE du Soleil par le parallèle de l'Étoile.
			TEMPS VRAI.
1770.—19 Mai. . .	*Arcturus*. .	+0^d 17′ 23″	
1771.—23 Février.	α Vierge.	+0. 5. 33.	Le 23 Févr.: 23^h 31′ 50″
1772.—20 Juillet.	*Arcturus*. .	—0. 26. 30.	Le 20 Juill.: 22. 8. 15.
14 Août. .	α Pégase.	—0. 25. 51.	Le 14 Août: 12. 52. 44.
	γ Pégase.	—0. 29. 57.	Le 14 Août: 18. 5. 52.
31 Août. .	α Aigle. .	—0. 21. 49.	Le 31 Août: 6. 35. 12.
1773.—24 Avril. .	*Regulus*. .	—0. 15. 5.	Le 24 Août: 0. 57. 6.
21 Mai. . .	*Arcturus*. .	—0. 11. 33.	Le 21 Mai: 8. 33. 44.
1774.—22 Juillet. .	*Arcturus*. .	—0. 8. 58.	Le 21 Juill.: 10. 0. 20.
1775.—22 Juillet. .	*Arcturus*. .	—0. 12. 29.	Le 21 Juill.: 17. 23. 29.

Les hauteurs du Soleil & des étoiles ont été obſervées au grand quart-de-cercle mobile de ſix pieds. Quant aux paſſages au méridien, ils n'ont point été obſervés, ce qui ne nous a pas permis de donner les différences d'aſcenſion droite. Le ſigne + déſigne que l'étoile étoit plus haute que le bord ſupérieur du Soleil.



RECHERCHES
SUR LES PRINCIPES
DE LA DIFFÉRENCIATION,
*Et ſur les Intégrales connues juſqu'ici ſous le nom d'*Intégrales particulières.

Par M. CHARLES.

J'AI obſervé dans le volume de nos Mémoires publié en 1786, que certaines équations en différences finies avoient deux intégrales diſtinctes, contenant chacune une conſtante arbitraire; mais je me propoſe aujourd'hui de conſidérer cet objet ſous un point de vue nouveau.

Soit l'équation $y = \frac{x \Delta y}{g} + \frac{\Delta y^2}{4 n^2 g^2}$, où g exprime la différence conſtante de la variable principale x. J'ai fait voir que cette équation avoit pour intégrales $y = 2 n a x + a^2$, a étant l'arbitraire; & $y = - n^2 x^2 + (b \text{ coſ. } \frac{\pi x}{g} + \frac{g n}{2})^2$, b étant l'arbitraire. Maintenant je me propoſe de trouver ces intégrales d'une manière nouvelle, qui répandra, je penſe, quelque jour ſur la théorie du calcul aux différences finies, & ſur celle de ces eſpèces d'intégrales qui ont été connues juſqu'ici ſous le nom d'*intégrales particulières.*

Pour remplir cet objet, je remarque que puiſque $y = 2 n a x + a^2$ eſt une des intégrales de la propoſée; ſi j'en tire la valeur de l'arbitraire a, ce qui me donne $a = - n x + \sqrt{(y + n^2 x^2)}$, & ſi je différencie, ce qui fait évanouir a, j'aurai une équation qui reviendra néceſſairement à la propoſée en faiſant évanouir les radicaux:

or cette équation différenciée devient $o = - ng + \surd(y' + n^2 x'^2) - \surd(y + n^2 x^2)$, & $o = - ng + \surd(y' + n^2 x'^2) + \surd(y + n^2 x^2)$; car si on fait évanouir les radicaux dans ces deux équations différencielles, on trouvera également la proposée; or la première de ces équations étant intégrée, reproduit celle qui a été différenciée, ce qui est tout simple; mais si je multiplie la seconde par $- \text{cos}.(\frac{\pi x}{g})$, elle deviendra

$$\surd(y' + n^2 x'^2)\ \text{cos}.[\pi(\frac{x}{g} + 1)]$$

$$- \surd(y + n^2 x^2)\ \text{cos}.(\frac{\pi x}{g}) = - ng\ \text{cos}.(\frac{\pi x}{g}),$$

dont l'intégrale est $\surd(y + n^2 x^2)\ \text{cos}.(\frac{\pi x}{g}) = b + \frac{ng}{2}\ \text{cos}.(\frac{\pi x}{g})$, ou élevant au carré, $y + n^2 x^2 = [\frac{ng}{2} + b\ \text{cos}.(\frac{\pi x}{g})]^2$ Soit (*fig. 1.*) la courbe ${}_0M\ {}_1D\ M$ le lieu de cette équation; imaginons l'abscisse x divisée en un nombre indéterminé de parties égales, chacune à la différence finie g, comme AB, BC, &c. à compter du point fixe A, origine des coordonnées; ainsi AB sera la première division, BC la seconde, ainsi de suite.

Cela posé, si on considère une abscisse quelconque $AP = x$, il est clair, quel que soit le numéro de la division KR, où est logée l'extrémité de cette abscisse, & quel que soit le lieu de ce point P dans la division, qu'on pourra toujours trouver une abscisse $A\,{}_0P$, contenue dans la première division que j'appelle X, & un nombre entier μ, tel qu'on ait $x = X + g\mu$; car si l'on prend $KP = A\,{}_0P$, il est clair que ${}_0P\,P$ sera égal à AK, c'est-à-dire, multiple de g. Maintenant, si on passe de l'abscisse x à l'abscisse $x + g$, il est clair qu'on aura X constant & μ changé en $\mu + 1$, c'est-à-dire, qu'on aura, $x + g$

$= X + g(\mu + 1)$; donc si on met pour x sa valeur $X + g\mu$ dans l'équation, on pourra regarder X comme une quantité constante, en différenciant aux différences finies, suivant le système de différenciation dont il est ici question; donc comme on a cos. $\frac{\pi x}{g}$ $= \text{cos.}\, \pi \left(\frac{X}{g} + \mu\right) = \text{cos.}\, \frac{\pi X}{g}$ cos. $\pi\mu$ à cause de sin. $\pi\mu = 0$. au lieu de b cos. $\frac{\pi x}{g}$ on pourra écrire b cos. $\pi\mu$, en comprenant dans la constante b la quantité cos. $\left(\frac{\pi X}{g}\right)$: ainsi notre équation sera $y + n^2 x^2$ $= \left(\frac{ng}{2} + b\, \text{cos.}\, \pi\mu\right)^2$, b étant une autre quantité. Pour déterminer cette arbitraire b, on peut se donner à volonté la courbe ${}_0D\, {}_1D$ étendue le long de la première division, & alors pour l'abscisse X, l'ordonnée Y sera déterminée par hypothèse; on aura donc, en représentant par o le numéro de la première division,

$$\sqrt{(Y + n^2 X^2)} - \frac{ng}{2} = b, \text{ \& } y + n^2 x^2$$
$$= \left[\frac{ng}{2} + \left[\sqrt{(Y + n^2 X^2)} - \frac{ng}{2}\right] \text{cos.}\, \pi\mu\right]^2.$$

On voit donc que quand la courbe ${}_0D\, {}_1D$ sera sans cosinus, l'équation n'en contiendra d'autres que cos. $\pi\mu$, qui sera toujours 1 ou -1. Je retiendrai la lettre b pour abréger, dans la suite de ce Mémoire; il suffit d'avoir démontré qu'elle est toujours une fonction algébrique des coordonnées de la courbe ${}_0D\, {}_1D$. Pour mon objet, je considérerai cette équation $y = b^2 + \frac{n^2 g^2}{4} - n^2 x^2 - nbg$ cos. $\pi\mu$, comme celle d'un polygone rectiligne. Je m'explique : soit d'abord construite la parabole CEG (*fig. 2*), dont l'équation est $z = b^2 + \frac{n^2 g^2}{4} - n^2 x^2$, c'est-à-dire, la partie

de y, qui eſt ſans coſinus; menons les ordonnées de cette parabole par les points de diviſion de l'abſciſſe déterminés comme ci-deſſus; il eſt clair que ſi on augmente & ſi on diminue ces ordonnées alternativement de la quantité ngb, on aura les valeurs de y correſpondantes aux abſciſſes $X + g\mu$, $X + g(\mu + 1)$, &c. & ſi on joint les extrémités de ces nouvelles ordonnées par les droites HL, LN, NO, &c. on aura un polygone rectiligne qui pourra être conſidéré comme le lieu de l'équation, en ne s'arrêtant pas aux ordonnées intermédiaires entre deux angles conſécutifs. Or je dis que ſi on prend l'équation de l'un des côtés de ce polygone, on trouvera qu'elle eſt de la forme $y = 2nax + a^2$, & par conſéquent que chaque côté de ce polygone appartient à quelques-unes des droites de la première intégrale; il eſt donc facile de concevoir, comme M. de la Grange l'a démontré pour les équations en différences infiniment petites, que l'équation de ce polygone rectiligne doit vérifier la propoſée.

Maintenant, ſi la différence g, d'abord finie, diminue ſucceſſivement juſqu'à devenir zéro, le polygone ſe confondra avec la courbe CEG, & ſera la ſeconde intégrale de la propoſée dans le cas des différences infiniment petites. Cette ſeconde intégrale contient une conſtante arbitraire comme la première; ce qui eſt tout ſimple, puiſque la ſeconde équation, d'abord en différences finies, devient

$$\partial \left[\text{coſ.} \left(\frac{\pi x}{\partial x}\right) \sqrt{(y + n^2 x^2)} \right] = n\,\partial x \,\text{coſ.} \left(\frac{\pi x}{\partial x}\right),$$

ou en diviſant par $\text{coſ.}\left(\frac{\pi X}{\partial x}\right)$, $\partial\left[\text{coſ.}(\pi\mu)\sqrt{(y + n^2 x^2)}\right] = n\,\partial x\,\text{coſ.}\,\pi\mu$, ce qui donne $y = b^2 - n^2 x^2 + n b\,\partial x\,\text{coſ.}(\pi\mu)$.

Les intégrales connues juſqu'ici ſous le nom d'intégrales particulières, ne ſont donc que des intégrales incomplettes, tirées d'une intégrale complette, à laquelle on n'avoit pas encore penſé.

Pour avoir dans cet exemple l'intégrale particulière

connue, il faut faire $b = 0$; le nombre μ exprime, comme dans le cas des différences finies, le rang de la division, à compter d'un point fixe, où est logée l'extrémité de l'abscisse indéterminée x; ce nombre d'abord fini, augmente successivement, & devient infini dans le cas des différences évanouissantes, pour toute abscisse finie; dès-lors nous n'en avons plus d'idée, mais nous n'en savons pas moins que cos. $\pi\mu$ est toujours 1 ou -1, & que cos. $\pi(\mu + 1) = -$ cos. $\pi\mu$.

Je retiens le terme $n b \partial x$ cos. $\pi\mu$, parce que ce terme différencié devient $-2 n b \partial x$ cos. $\pi\mu$, & donne $-2 n (n x + b$ cos. $\pi\mu)$ pour la vraie valeur de $\frac{\partial y}{\partial x}$ qu'on n'obtiendroit pas si on le négligeoit.

Remarques sur les principes de la différenciation.

LA nécessité de retenir ce terme différenciel, donne lieu à une remarque importante; c'est que la détermination des tangentes est une pure hypothèse, & dépend du polygone rectiligne qu'on emploie dans cette détermination. Je m'explique: on ne détermine pas les tangentes des courbes, quoique l'usage ait consacré cette expression; on compare les courbes à des polygones rectilignes qui ne sont pas ces courbes par conséquent, mais qui s'en rapprochent successivement par la diminution d'un paramètre, & finalement se confondent avec elle par l'évanouissement de ce même paramètre. On détermine la direction d'un côté de ce polygone correspondant d'abord à une partie finie de la courbe; cette direction est une fonction de deux abscisses dont la différence est d'abord finie, & du paramètre dont l'évanouissement procure la coïncidence avec la courbe. Quand le paramètre s'évanouit, la différence des abscisses s'évanouit, & la direction du côté, à cet instant, est regardée comme la tangente de la courbe. Prenons en exemple notre seconde intégrale pour l'équation en différences infiniment petites, qui est: $y = b^2 - n^2 x^2$. Déterminons la

valeur de $\frac{\partial y}{\partial x}$ à quoi ſe réduit le problème des tangentes; pour cela, ſoit cette parabole repréſentée par la fig. *CEG*. Imaginons l'axe des abſciſſes diviſé en parties égales, à compter du point *T*, par les points de diviſion; menons les ordonnées *TT'*, *VV'*, *RR'*, & par les extrémités menons les cordes *TV'*, *V'R'*, *R'S'*, &c. par ce moyen on aura pour la valeur de $\frac{\Delta y}{g}$, $-2n^2x - n^2g$; [Δy exprimant la différence de deux ordonnées conſécutives, & g une diviſion de l'abſciſſe] & quand g devient zéro, on a $\frac{\partial y}{\partial x} = -2n^2x$. Cependant ſi on emploie cette valeur de $\frac{\partial y}{\partial x}$, on trouvera que l'équation différencielle n'eſt pas vérifiée; cela vient de ce que ce polygone n'eſt pas celui qu'il faut employer dans cette occaſion; il y en a beaucoup d'autres qui ſe confondent auſſi avec la parabole par l'évanouiſſement de la différence finie g. Qui nous guidera dans le choix? la réponſe eſt ſimple; l'équation en différences infiniment petites eſt limite d'une équation en différences finies, nous connoiſſons le polygone qui vérifie cette équation, & qui par conſéquent la vérifiera encore quand elle tombera dans l'infiniment petit; c'eſt ce polygone qu'il faut choiſir, ou quelqu'autre donnant le même réſultat.

L'équation de ce polygone qui vérifie la propoſée en différences finies eſt $y = -n^2x^2 + \frac{n^2g^2}{4} + nbg \operatorname{coſ.} \pi\mu + b^2$; donc $\frac{\Delta y}{g} = -n^2g - 2n(nx + b \operatorname{coſ.} \pi\mu)$. Si on ſuppoſe $g = o$, on a pour la vraie valeur de $\frac{\partial y}{\partial x}$, $-2n(nx + b \operatorname{coſ.} \pi\mu)$ qui eſt double au même point; à ſavoir, $-2n(nx + b)$ & $-2n(nx - b)$; j'expliquerai dans la ſuite ce

que

que cela ſignifie. On auroit obtenu le même réſultat ſi on avoit $y = - n^2 x^2 + n b g$ coſ. $\pi \mu + b^2 + g X$, X étant une fonction de x ſans coſinus. Donc, comme je l'ai obſervé dans une autre occaſion, pour former ou vérifier une équation en différences infiniment petites, il faut conſidérer ſoigneuſement l'équation en différences finies dont elle eſt dérivée, autrement on court riſque d'être induit en erreur dans pluſieurs cas.

Pour mieux éclaircir encore la théorie précédente, je donnerai quelques exemples, & d'abord le ſuivant que M. le marquis de L'Hoſpital ſe propoſe dans ſon Analyſe des infiniment petits, *ſection 10.e problème 7.e* Préſenté le 4 mars 1790.

Soit une droite A O (fig. 3.) *qui ait un commencement fixe au point* A; *ſoit une infinité de paraboles* B F D, C D G, *qui ayent pour axe commun la droite* A O *&* *pour paramètre les droites* A B, A C, *interceptées entre le point fixe* A *&* *leurs ſommets* B C : *on demande la nature de la ligne* A F G *qui touche toutes ces paraboles.* Je ſuppoſerai que la tangente de la parabole eſt double de l'abſciſſe comptée du ſommet d'après l'hypothèſe du polygone inſcrit que ſuivoit M. de L'Hoſpital. Je dois chercher la ſolution dans le cas des différences finies, afin de la trouver d'une manière plus claire dans le cas des différences évanouiſſantes, & pour cela je poſerai le problème d'une manière un peu différente. Les paraboles étant décrites, je ſuppoſe qu'on diviſe l'abſciſſe en parties égales chacune à g, que par ces points de diviſion on élève des ordonnées, & que par l'extrémité de chaque deux ordonnées conſécutives on mène des cordes; il faut imaginer cette opération faite pour chaque parabole; cela poſé, nous avons une infinité de polygones rectilignes que j'appelle des individus, & je demande de trouver, s'il en exiſte, un nouveau polygone qui ſoit tel que chacun de ſes côtés ſoit un côté des individus, & que deux côtés conſécutifs ne puiſſent pas appartenir au même individu. En nommant a la diſtance indéterminée du point fixe au

ſommet de l'une des paraboles, x l'abſciſſe comptée du même point fixe, & y l'ordonnée correſpondante, on a $y^2 = ax - a^2$: cette équation donne $a = \frac{x}{2} + \sqrt{(\frac{x^2}{4} - y^2)}$; différenciant pour faire évanouir la conſtante, on a $-\frac{g}{2} = \sqrt{(\frac{x'^2}{4} - y'^2)} - \sqrt{(\frac{x^2}{4} - y^2)}$, & $-\frac{g}{2} = \sqrt{(\frac{x'^2}{4} - y'^2)} + \sqrt{(\frac{x^2}{4} - y^2)}$. Or comme la relation entre deux ordonnées conſécutives doit être la même pour tous nos polygones individus & pour le polygone cherché, comme cette relation eſt exprimée par les équations ci-deſſus, puiſqu'elles viennent également de l'élimination de la conſtante, il s'enſuit que l'une d'elles exprime les polygones individus, & l'autre le polygone cherché; multipliant donc la dernière par $-$ coſ. $\pi\mu$, & intégrant, on aura: coſ. $(\pi\mu)\sqrt{(\frac{x^2}{4} - y^2)} = -b - \frac{g}{4}$ coſ. $\pi\mu$; donc élevant au carré on aura $y^2 = \frac{x^2}{4} - (b \text{ coſ. } \pi\mu + \frac{g}{4})^2$ & $y^2 = \frac{x^2}{4} - b^2 - \frac{b\,\partial x}{2}$ coſ. $\pi\mu$, ſi $g = \partial x$.

EXEMPLE II.e

SOIT l'équation $\frac{\pi^2\,\partial x^2}{p^2} = \frac{\partial y^2}{q^2 - y^2}$, dont la première intégrale eſt $\pi(\frac{x}{p} + a) =$ arc ſin. $\frac{y}{q}$, a eſt l'arbitraire; différenciant aux différences finies, & faiſant $\Delta x =$ la conſtante g, on a $\frac{\pi g}{p} =$ arc ſin. $\frac{y'}{q}$ $-$ arc ſin. $\frac{y}{q}$; y' déſignant l'y conſécutif. Maintenant,

au lieu de arc ſin. $\frac{y}{q}$, on peut écrire $(2k + 1)\pi - $ arc ſin. $\frac{y}{q}$, k étant un nombre entier, parce que cet arc a auſſi pour ſinus $\frac{y}{q}$; ainſi $\pi\,(2k + 1 + \frac{g}{p}) =$ arc ſin. $\frac{y'}{q} +$ arc ſin. $\frac{y}{q}$; multipliant par $-$ coſ. $(\pi\,\mu)$, & intégrant, on a

$$\text{coſ.}(\pi\,\mu)\,\text{arc ſin.}\,\frac{y}{q} = \pi\,(b + \frac{2k + 1 + \frac{g}{p}}{2}\,\text{coſ.}\,\pi\,\mu;)$$

multipliant par coſ. $(\pi\,\mu)$, arc ſin. $\frac{y}{q} = \pi\,(b$ coſ. $\pi\,\mu + \frac{2k + 1 + \frac{g}{p}}{2})$, ou enfin $\frac{y}{q} =$ ſin. $\pi\,(k + \frac{1}{2} + \frac{g}{2p} + b$ coſ. $\pi\,\mu)$, faiſant $g = dx$, on a $\frac{y}{q} =$ coſ. $\pi\,k$. coſ. $(\pi\,b + \frac{\pi\,\partial x\,\text{coſ.}\,\pi\,\mu}{2p})$, & finalement $\frac{y}{q} =$ coſ. $\pi\,k$. coſ. $\pi\,b - \frac{\pi\,\partial x}{2p}$ ſin. $\pi\,b$. coſ. $\pi\,k$. coſ. $\pi\,\mu$. k exprime une double valeur, comme ſi au lieu de coſ. $\pi\,k$, il y avoit $\sqrt{(1)}$ qui eſt évidemment 1 ou -1.

On auroit l'intégrale connue juſqu'ici ſous le nom d'*intégrale particulière*, en faiſant $\pi\,b$ un multiple par de la demi-circonférence.

EXEMPLE III.e

SOIT l'équation $\partial x^2 = \frac{\partial y^2}{1 + y^2}$, dont la première intégrale eſt $a + x = L\,[y + \sqrt{(1 + y^2)}]$; différenciant aux différences finies, & faiſant $\Delta x =$ la conſtante g, on a $g = L\,[y' + \sqrt{(1 + y'^2)}]$

$-L[y+\sqrt{(1+y^2)}]$ & $g = L[y'+\sqrt{(1+y'^2)}]$ $+ L(\frac{1}{y-\sqrt{(1+y^2)}}) = L[y'+\sqrt{(1+y'^2)}]$ $+ L(-1) + L[y+\sqrt{(1+y^2)}]$, donc $g - L(-1) = L[y'+\sqrt{(1+y'^2)}]$ $+ L[y+\sqrt{(1+y^2)}]$; multipliant donc par $-$ cof. $\pi\mu$, & intégrant, on a :

$$\text{cof.}\,\pi\mu\, L[y+\sqrt{(1+y^2)}] = \frac{[g - L(-1)]\,\text{cof.}\,\pi\mu}{2}$$

$+ L\,b$, b étant une nouvelle arbitraire; multipliant par cof. $\pi\mu$, on aura $L[y+\sqrt{(1+y^2)}]$ $= \text{cof.}\,\pi\mu\; L\,b - L\sqrt{[(-1)]} + L\,h^{\frac{g}{2}}$; h est la base du fystème des logarithmes : donc paffant des logarithmes aux nombres, & chaffant le radical, on aura

$$2y\sqrt{(-1)} = b^{\text{cof.}\,\pi\mu}\,h^{\frac{g}{2}} + b^{-\text{cof.}\,\pi\mu}\,h^{-\frac{g}{2}}.$$

Soit maintenant $g = \partial x$, on aura, en ne retenant de ∂x que la première puiffance, $2y\sqrt{(-1)} = b^{\text{cof.}\,\pi\mu}$ $(1 + \frac{\partial x}{2}) + b^{-\text{cof.}\,\pi\mu}(1 - \frac{\partial x}{2})$, ou

$$2y\sqrt{(-1)} = b + \frac{1}{b} + (b - \frac{1}{b})\,\text{cof.}\,\pi\mu\,\frac{\partial x}{2};$$

car par la vérification, on trouvera que cette dernière expreffion revient à la précédente.

Suppofons maintenant $b = f\sqrt{(-1)}$, on aura

$$2y = f - \frac{1}{f} + (f + \frac{1}{f})\,\text{cof.}\,(\pi\mu)\,\frac{\partial x}{2},$$

équation dans laquelle il ne refte plus d'imaginaire, & qui vérifie la propofée.

Par la comparaifon de l'équation en différences finies avec celle en différences infiniment petites qui en eft dérivée, j'ai aperçu que les intégrales connues jufqu'ici fous le nom d'*intégrales particulières*, n'étoient que des intégrales incomplettes tirées d'une intégrale complette

qui n'étoit pas encore connue; mais par des considérations géométriques fort simples, on pouvoit s'assurer de l'existence de cette seconde intégrale, & même d'une infinité d'autres qui dépendent du système de différenciation. Rendons ceci sensible par un exemple. Soit *A* (*fig.* 2) l'origine des coordonnées perpendiculaires entre elles, *A Z* l'axe des *x*, & *A V* l'axe des *y*; soient entendues une infinité de droites *P g*, *P g'*, *R h*, *R h'*, *T i*, *T i'*, &c. toutes comprises dans l'équation $y = 2nax + a^2$, & résultantes des diverses valeurs qu'on peut donner à la constante *a*, par conséquent vérifiant toutes également l'équation différencielle, $y = \frac{x \partial y}{\partial x} + \frac{\partial y^2}{4 n^2 \partial x^2}$ qu'on obtiendroit en différenciant & éliminant la constante introduite dans l'intégration. On sait que cette équation différencielle est vérifiée non-seulement par ces droites, mais par la parabole *g h A g' h'* qui les touche toutes, comme l'a démontré M. de la Grange, & dont l'équation est $y = - n^2 x^2$. Maintenant si on propose ce problème : *Quelle doit être la route d'un point décrivant, pour que dans sa marche il soit toujours sur quelques-unes des tangentes!* je dis que la parabole ci-dessus mentionnée n'est pas à beaucoup près la seule courbe qui résolve le problème. Effectivement, si on imagine une courbe quelconque *P R T Y O*, & de chacun des points *P*, *R*, *T*, &c. les deux tangentes *P g*, *P g'*; *R h*, *R h'*; *T i*, *T i'*, &c. on peut concevoir le point décrivant placé d'abord en *G*, infiniment près de notre courbe *P T O*. Cela posé, il est clair qu'il peut décrire, 1.° l'élément infiniment petit *G P*; 2.° l'élément *P Q*, en s'écartant infiniment peu de la courbe, & faisant un angle fini avec sa première direction; 3.° l'élément *Q R*, différant infiniment peu en position du premier élément *G P*, en rentrant sur la courbe *P T O*; 4.° l'élément *R S*, en s'écartant de la courbe infiniment peu, qui diffère infiniment peu en

position de l'élément PQ, & ainsi de suite. Le problème peut donc se résoudre en tenant le point décrivant infiniment près d'une courbe donnée; mais sa direction sera double au même point, & sera des angles finis avec cette courbe considérée comme limite du polygone inscrit.

Quand la courbe, dont le point décrivant doit se tenir infiniment près, sera donnée, il n'y aura d'autre probleme à résoudre qu'à déterminer les deux tangentes à chaque point, ce qui se fera sans difficulté par un calcul ordinaire, mais non pas toujours sans quelque longueur. En général il est plus simple de chercher le terme différenciel qu'il faut ajouter à la valeur de y pour obtenir la détermination désirée.

EXEMPLE.

LE point décrivant doit se tenir infiniment près de la directrice de la parabole. L'équation de la courbe donnée se change en celle d'une droite parallèle à l'axe des x, éloignée de cet axe d'une quantité égale au quart du paramètre; ainsi son équation est $y = \frac{1}{4n^2}$, mais pour qu'elle vérifie la proposée différencielle, qui est $y = \frac{x \partial y}{\partial x} + \frac{\partial y^2}{4 n^2 \partial x^2}$, il faut écrire $y = \frac{1}{4n^2}$ $+ \text{cos.}(\pi \mu)(a \partial x + b \partial y)$, $a \partial x + b \partial y$ étant multiple d'une différencielle constante, ou du moins telle que sa différencielle s'élève au second ordre. On aura donc $\frac{\partial y}{\partial x}(1 + 2\, b \text{ cos. } \pi \mu) = - 2\, a \text{ cos. } (\pi \mu)$; donc on doit avoir $\frac{1}{4n^2}(1 + 2\, b \text{ cos. } \pi \mu)^2$ $= - 2\, a x \text{ cos. } \pi \mu\, (1 + 2\, b \text{ cos. } \pi \mu) + \frac{a^2}{n^2}$;
Les quantités sans cosinus doivent être égales entr'elles; il en est de même des quantités qui le contiennent, autrement on auroit des cosinus dans les expressions de a &

de b. On aura donc $\frac{1}{4n^2}(1+4b^2) = -4abx + \frac{a^2}{n^2}$ & $\frac{b}{2n^2} = -ax$. En comparant ces deux équations, on trouvera $a = \frac{1}{2\sqrt{(1+4n^4x^2)}}$ & $a\partial x + b\partial y = \frac{h^2n^2y}{2\sqrt{(1+4n^4x^2)}}\partial\left(\frac{x}{h^2n^2y}\right)$, quantité qu'il faut faire multiple d'une différencielle constante, ou du moins qui ne doit pas rester du même ordre dans la différenciation. Cette condition sera souvent difficile à vérifier utilement.

Autre Méthode pour trouver le terme différenciel.

COMMENÇONS par l'équation différencielle $\frac{\partial y^2}{\partial x^2} + 2P\frac{\partial y}{\partial x} = Q$, P & Q sont des fonctions de x & de y, sans radicaux, qui donnent $P + \frac{\partial y}{\partial x} = \sqrt{(P^2+Q)}$. Or ce radical indique deux branches: on obtient l'une en formant les ∂y consécutifs par l'addition continuelle des termes $\partial x\sqrt{(P^2+Q)}$, $\partial x'\sqrt{(P'^2+Q')}$, &c. on obtient l'autre par la soustraction continuelle des mêmes termes; mais on peut former un ∂y par l'addition du radical, & le ∂y consécutif par la soustraction du même radical, & ainsi de suite alternativement. Cette condition est exprimée par l'équation $P + \frac{\partial y}{\partial x} = \text{cos.}\,(\pi\mu)\sqrt{(P^2+Q)}$, μ exprime comme ci-dessus, le nombre infini d'élémens comptés d'un point fixe; or si φ est le facteur qui rend $\partial y + P\partial x$ différencielle complette, on a $S.\,\varphi(\partial y + P\partial x) = -\frac{\varphi\,\partial x\,\text{cos.}\,\pi\mu}{2}\sqrt{(P^2+Q)}$. On peut aussi écrire en renversant $\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{-P+\text{cos.}\,(\pi\mu)\sqrt{(P^2+Q)}}$

$= \frac{P}{Q} + \frac{\text{cof. } \pi \mu \sqrt{(P^2 + Q)}}{Q}$; donc en nommant ψ le multiplicateur qui rend $Q \partial x - P \partial y$ différencielle complette, on a $S. \psi (Q \partial x - P \partial y) = \frac{- \psi \partial y \text{ cof. } \pi \mu \sqrt{(P^2 + Q)}}{2}$. Si les équations $P^2 + Q = 0$, & $S. \varphi (P \partial x + \partial y) = 0$ ou $S. \psi (Q \partial x - P \partial y) = 0$ peuvent fubfifter en même temps, on aura l'équation de forme ordinaire, que M. de la Grange a appris à déterminer.

EXEMPLE.

On propofe de trouver une courbe, telle que menant d'un point donné des perpendiculaires fur les tangentes, ou pour mieux dire, fur les élémens de cette courbe, prolongés s'il le faut, ces perpendiculaires foient égales à une conftante b. Pour réfoudre ce problème, M. de la Grange trouve l'équation différencielle $y - x \frac{\partial y}{\partial x} = b \sqrt{(1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2})}$: tirant la valeur de $\frac{\partial y}{\partial x}$, on a $\partial y + \frac{x y \partial x}{b^2 - x^2} = \frac{b \partial x \text{ cof. } (\pi \mu) \sqrt{(x^2 + y^2 - b^2)}}{b^2 - x^2}$; divifant par $\sqrt{(b^2 - x^2)}$ & intégrant, on a

$$\frac{y}{\sqrt{(b^2 - x^2)}} = m - \frac{b \partial x \text{ cof. } \pi \mu}{2 (b^2 - x^2) \frac{3}{2}} \sqrt{(x^2 + y^2 - b^2)}.$$

Les deux parties $\frac{y}{\sqrt{(b^2 - x^2)}} - m$ & $\sqrt{(x^2 + y^2 - b^2}$ fuppofées chacune zéro, donneront la même courbe, en faifant $m = 1$; c'eft celle de M. de la Grange.

On peut mettre l'équation différencielle fous une autre forme, & écrire :

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{\frac{- x y}{b^2 - x^2} \pm \frac{b \text{ cof. } \pi \mu}{b^2 - x^2} \sqrt{(x^2 + y^2 - b^2)}},$$

ou

ou $\frac{\partial x}{\partial y} = [\frac{xy}{b^2 - x^2} + \frac{b \operatorname{cof.} \pi \mu}{b^2 - x^2} \sqrt{(x^2 + y^2 - b^2)}]$ $\frac{b^2 - x^2}{y^2 - b^2}$. Donc $\partial x - \frac{x y \partial y}{y^2 - b^2} = \frac{b \partial y \operatorname{cof.} \pi \mu}{y^2 - b^2}$ $\sqrt{(x^2 + y^2 - b^2)}$, divifant par $\sqrt{(y^2 - b^2)}$ & intégrant, on aura $\frac{x}{\sqrt{(y^2 - b^2)}} = n - \frac{b \partial y \operatorname{cof.} \pi \mu}{2 (y^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}}$ $\sqrt{(x^2 + y^2 - b^2)}$.

Cette théorie s'étend facilement aux équations plus élevées du premier ordre : par exemple, foit l'équation $\frac{\partial y^3}{\partial x^3} - P \frac{\partial y^2}{\partial x^2} + Q \frac{\partial y}{\partial x} = R$, & a, b, c, les trois valeurs de $\frac{\partial y}{\partial x}$; on pourra faire $\frac{\partial y}{\partial x}$ $= \frac{a + b}{2} + \frac{a - b}{2} \operatorname{cof.} \pi \mu$, $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a + c}{2}$ $+ \frac{a - c}{2} \operatorname{cof.} \pi \mu$, & $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{b + c}{2}$ $+ \frac{b - c}{2} \operatorname{cof.} \pi \mu$. Soient φ, ψ, λ, trois facteurs convenables; on aura

$$S. \varphi \left(\partial y - \frac{a + b}{2} \partial x\right) = - \frac{\varphi \partial x (a - b) \operatorname{cof.} \pi \mu}{4}$$

$$S. \psi \left(\partial y - \frac{a + c}{2} \partial x\right) = - \frac{\psi \partial x (a - c) \operatorname{cof.} \pi \mu}{4}$$

$$S. \lambda \left(\partial y - \frac{b + c}{2} \partial x\right) = - \frac{\lambda \partial x (b - c) \operatorname{cof.} \pi \mu}{4}$$

Si les équations $a - b = 0$ & $S. \varphi (\partial y - \frac{a + b}{2} \partial x)$ $= 0$ donnent la même courbe, cette courbe fera une des intégrales déterminées par M. de la Grange; même chofe à dire fi $a - c = 0$ & $S. \psi (\partial y - \frac{a + c}{2} \partial x)$ $= 0$ s'accordent auffi a donner la même courbe. On voit donc que nous pouvons trouver la feconde intégrale

de l'équation $\frac{\partial y^2}{\partial x^2} + 2 P \frac{\partial y}{\partial x} = Q$, & en général des équations élevées dans beaucoup de cas où on ne pourroit pas obtenir la première intégrale ; par exemple, quand l'équation élevée au second degré manquera de second terme ; c'est-à-dire, quand P sera zéro, on y satisfera toujours par une parallèle à l'axe des x, car φ devient ici l'unité, & P étant zéro, on a évidemment $S. \partial y$, ou $y =$ une constante ; on aura donc $y + C = \frac{-\partial x \operatorname{cos.} \pi \mu}{2} \sqrt{(Q)}$.

EXEMPLE.

On demande de trouver la route d'un point décrivant pour que les espaces linéaires parcourus soient doubles de l'abscisse correspondante, & pour que les espaces superficiels compris entre deux ordonnées, l'espace linéaire & l'axe des abscisses, soient proportionnels à ces mêmes abscisses.

SOLUTION.

On a évidemment $S. \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = 2 x$; donc $\partial y = \partial x \sqrt{(3)}$, & $y = a \pm x \sqrt{(3)}$, a étant l'arbitraire introduite dans l'intégration. Cette intégrale indique d'abord deux droites $B M$, $B M'$, (*fig. 5*) faisant chacune avec la ligne $B G$, parallèle à l'axe des x, un angle dont la tangente est $\sqrt{(3)}$, l'une au-dessus, l'autre au-dessous de cette ligne ; mais si on prend les espaces superficiels, d'abord l'espace $A B M P$ & ensuite l'espace $A B M' P$, on trouvera, en nommant $A B = a$, que le premier est $a x + \frac{x^2 \sqrt{(3)}}{2}$; & le second, $a x - \frac{x^2 \sqrt{(3)}}{2}$; donc ni l'un ni l'autre ne peuvent vérifier la seconde condition du problème ; mais je dis qu'on ne peut pas conclure qu'il n'a pas de solution. Effectivement, si l'on décrit d'abord l'élément

$B\,C$, appartenant à la première ligne, ensuite l'élément $C\,D$, parallèle à la seconde, puis l'élément $D\,E$, parallèle à la première, & ainsi de suite, il est clair qu'on n'en décrira pas moins des espaces proportionnels à l'abscisse; mais si ces élémens sont évanouissans, le point décrivant s'écartera infiniment peu de la parallèle $B\,G$; & l'espace superficiel $A\,B\,O\,P$ sera évidemment aussi proportionnel à l'abscisse, & par conséquent vérifiera la seconde condition du problème.

Il me reste une chose très-singulière à remarquer, c'est qu'Euler a rencontré une de ces secondes intégrales complettes. Il se propose d'abord d'intégrer l'équation $y\,\partial x - n\,x\,\partial y = a\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$, *page 538 du premier volume de son Calcul intégral.* Il intègre facilement cette équation pour plusieurs valeurs de n; mais quand $n = 1$, il trouve, en faisant $\frac{\partial y}{\partial x} = p$, $y = p\,x + a\sqrt{(1 + p^2)}$, équation qui se présente naturellement, & $x = \frac{C}{p^{\frac{1}{n-1}}} - \frac{a\,p}{\sqrt{(1 + p^2)}}$ où à cause de $n = 1$, il est évident que l'exposant $\frac{1}{n-1}$ est infini. Euler remarque d'abord que si on fait $C = 0$, on a $x^2 + y^2 = a^2$, mais que si C n'est pas zéro, des changemens infiniment petits dans p opèrent dans x des changemens finis; & par conséquent on peut donc, pour une même valeur de p, ou des valeurs infiniment peu différentes, obtenir toutes les valeurs de x, & par conséquent regarder l'équation $y = p\,x + a\sqrt{(1 + p^2)}$ comme l'intégrale, en faisant p constant, & le regardant comme l'arbitraire introduite dans l'intégration; mais il est clair qu'on peut éliminer p par le moyen des équations combinées $y = p\,x + a\sqrt{(1 + p^2)}$ & $x = \frac{C}{p^{\frac{1}{n-1}}}$

$-\frac{a p}{\sqrt{(1 + p^2)}}$. Cette équation, il eſt vrai, eſt indéterminée & ne nous apprend rien en général, mais elle ne repréſente pas moins la ſeconde intégrale complette, puiſqu'on a obtenu l'équation $x^2 + y^2 = a^2$, en donnant à la conſtante une valeur déterminée, ſavoir, zéro.

SUITE DU MÉMOIRE SUR LES PRINCIPES DE LA DIFFÉRENCIATION, &c.

Par M. CHARLES.

ÉTANT donnée l'équation $\frac{\partial y^2}{\partial x^2} + 2 P \frac{\partial y}{\partial x} = Q$, dans laquelle P & Q ſont des fonctions quelconques rationelles de x & y, j'ai fait voir qu'on avoit pour intégrale complette de cette équation :

$$S. \varphi (\partial y + P \partial x) = \frac{- \varphi \partial x \operatorname{coſ.} \pi \mu}{2} \sqrt{(P^2 + Q)}$$

$+ A$. φ eſt le facteur qui rend la quantité $\partial y + P \partial x$ différencielle complette. Je me propoſe ici de montrer que des réſultats analogues ont lieu pour les équations des ordres ſupérieurs, & ſur-tout que pour cette dernière eſpèce, les courbes réſultantes ſont preſque toujours ſans angle fini, & quelquefois auſſi pour les équations du premier ordre ; ce qui les rendra plus propres à réſoudre les problèmes dont on s'eſt occupé juſqu'à préſent, principalement dans la mécanique.

Pour m'expliquer clairement, je ſuis obligé de rappeler quelques-unes des choſes dites déjà dans mes Mémoires précédens.

J'ai fait voir que l'équation en différences finies :

$y = \frac{x \Delta y}{g} + \frac{\Delta y^2}{g^2}$ (où g exprime la différence conſtante de x), étoit vérifiée par l'équation $y = b^2$

$+ \frac{n^2 g^2}{4} - n^2 x^2 + n b g \operatorname{cos.} \frac{(\pi x)}{g}$. b eſt l'arbitraire introduite dans l'intégration.

Soit $EMGN$ (*fig. 6*) la courbe, lieu de cette intégrale étendue ſur les abſciſſes poſitives & négatives, A l'origine des coordonnées perpendiculaires entre elles, AZ l'axe des x, & AV l'axe des y; on peut imaginer les abſciſſes, tant poſitives que négatives, diviſées en parties égales chacune à g, à compter du point fixe A, & on aura les cellules AB, BC, &c. Je donne pour indice à la première 0, à la ſeconde 1, à la troiſième 2, &c. Cela poſé, il eſt clair que, quelle que ſoit la grandeur de l'abſciſſe indéterminée x, ſi on en retranche la différence finie g autant de fois que poſſible, le reſte, après toutes ces ſouſtractions, ſera néceſſairement moindre que g, & je le déſigne par X. Prenant $A\,{}_0P = X$, il eſt clair que ce point ${}_0P$ ſera dans la première diviſion; donc ſi on nomme μ le nombre des ſouſtractions, on aura $x = X + g\mu$, & ſi x vient à augmenter ou diminuer de la différence finie, X reſte fixe & μ devient $\mu + 1$ ou $\mu - 1$; μ indique le nombre des ſouſtractions, $\mu + 1$ le nombre des cellules; maintenant $\operatorname{cos.} \left(\frac{\pi x}{g}\right)$ $= \operatorname{cos.} \left[\pi \left(\frac{X}{g} + \mu\right)\right] = \operatorname{cos.} \pi \frac{X}{g} \operatorname{cos.} (\pi \mu)$. La quantité X ne doit pas varier dans la différenciation; donc on peut comprendre dans la conſtante b la quantité $\operatorname{cos.} \left(\frac{\pi X}{g}\right)$, & écrire : $y = b^2 + \frac{n^2 g^2}{4} - n^2 x^2 + n b g \operatorname{cos.} \pi \mu$.

Si par tous les points de diviſion, on élève des parallèles à l'axe AV juſqu'à la rencontre de la courbe, & ſi on joint leurs extrémités par des cordes, on aura un polygone que cette équation pourra repréſenter, pourvu qu'on faſſe $x = X$, $x = X + g$, $x = X + 2g$, &c.

ſucceſſivement, & $\mu + 1$ exprimera le nombre des côtés du polygone correſpondans à une abſciſſe quelconque x. Il eſt à propos maintenant d'examiner ce que devient notre équation dans les différentes ſuppoſitions qu'on peut faire ſur la valeur de la conſtante b.

Soit d'abord $b = 0$; on aura $y = \frac{n^2 g^2}{4} - n^2 x^2$. $\frac{\Delta y}{g} = -2 n^2 x - n^2 g$. $\frac{\Delta^2 y}{g^2} = -2 n^2$. $\frac{\Delta^3 y}{g^3} = 0$, & ainſi de ſuite pour les différences plus élevées.

Soit $g = 0$, on aura $y = - n^2 x^2$, $\frac{\partial y}{\partial x} = -2 n^2 x$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -2 n^2$. $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0$, &c. comme dans une intégrale ordinaire. Faiſons maintenant $b = c g$, c étant une nouvelle quantité finie qui ne dépend pas de g, nous aurons:
$y = c^2 g^2 + \frac{n^2 g^2}{4} - n^2 x^2 + n c g^2 \text{ cof. } \pi \mu$.
$\frac{\Delta y}{g} = -2 n^2 x - n^2 g - 2 n c g \text{ cof. } (\pi \mu)$.
$\frac{\Delta^2 y}{g^2} = -2 n^2 + 4 n c \text{ cof. } \pi \mu$; $\frac{\Delta^3 y}{g^3}$
$= - \frac{8 n c \text{ cof. } \pi \mu}{g}$, &c.

Soit $g = 0$, on aura $y = - n^2 x^2$ & $\frac{\partial y}{\partial x} = -2 n^2 x$ comme ci-deſſus. Ainſi cette courbe n'a pas d'angles finis; mais $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -2 n^2 + 4 n c \text{ cof. } \pi \mu$; elle a donc au même point deux rayons de développée qui diffèrent d'une quantité finie. $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ devient infini, ainſi de ſuite.

Soit encore $b = a g^2$, on aura $y = a^2 g^4 + \frac{n^2 g^2}{4}$ $- n^2 x^2 + n a g^3 \text{ cof. } (\pi \mu)$; $\frac{\Delta y}{g} = -2 n^2 x$

$- n^2 g - 2 n a g^2$ cof. $(\pi \mu)$; $\frac{\Delta^2 y}{g^2} = - 2 n^2$ $+ 4 n a g$ cof. $(\pi \mu)$; $\frac{\Delta^3 y}{g^3} = - 8 n . a .$ cof. $\pi \mu$. $\frac{\Delta^4 y}{g^4} = \frac{16 n a \text{ cof. } \pi \mu}{g}$, &c. Or fi l'on fuppofe $g = 0$, on aura $y = - n^2 x^2$, $\frac{\partial y}{\partial x} = - 2 n^2 x$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = - 2 n^2$ comme dans la parabole ordinaire; mais $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = - 8 n a$ cof. $\pi \mu$. $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$, & les différences fupérieures deviennent infinies.

Des Équations du fecond ordre.

Soit $(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2})^2 + 2 P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = Q$, P & Q font des fonctions fans radicaux de x, y & $\frac{\partial y}{\partial x}$. On a, en extrayant les racines, $\partial^2 y + P \partial x^2 = \partial x^2$ cof. $\pi \mu \sqrt{(P^2 + Q)}$. Soit φ le facteur qui rend $\partial^2 y + P \partial x^2$ différencielle complette d'une quantité finie; on aura $S S. \varphi (\partial^2 y + P \partial x^2) = \varphi \frac{\partial x^2 \text{ cof. } \pi \mu}{4} \sqrt{(P^2 + Q)}$. Il eft vifible que les valeurs de y & $\frac{\partial y}{\partial x}$ ne contiendront pas cof. $(\pi \mu)$, mais que la valeur de $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ le contiendra, & que les différences plus élevées feront infinies; la courbe réfultante fera donc fans angle fini, mais elle aura au même point deux rayons de la développée différens d'une quantité finie. Si les équations $\sqrt{(P^2 + Q)} = 0$ & $S S. \varphi (\partial^2 y + P \partial x^2) = 0$, ont lieu en même temps pour certaines valeurs des conftantes, on aura les intégrales particulières ordinaires.

EXEMPLE I.er

Soit $x (\frac{\partial^2 y}{\partial x^2})^2 + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} (x^2 - \frac{\partial y}{\partial x})$

$= 2\left(\frac{x\partial y}{\partial x} - y\right)$; on aura $2x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x^2$
$- \frac{\partial y}{\partial x} = \text{cof.}\, \pi\mu \sqrt{\left[\left(x^2 - \frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 8x\left(\frac{x\partial y}{\partial x} - y\right)\right]}$.
Divisant par $x\sqrt{(x)}$, & intégrant, on aura, en observant que ∂x est constant :

$$\frac{2\partial y}{\sqrt{(x)}} + \frac{2x\partial x\sqrt{(x)}}{3} + c\partial x$$
$$= -\frac{\partial x^2 \,\text{cof.}\, \pi\mu}{2x\sqrt{(x)}}\sqrt{\left[\left(x^2 - \frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 8x\left(\frac{x\partial y}{\partial x} - y\right)\right]};$$

donc $2\partial y + \frac{2x^2\partial x}{3} + c\partial x\sqrt{(x)}$
$$= -\frac{\partial x^2 \,\text{cof.}\, \pi\mu}{2x}\sqrt{\left[\left(x^2 - \frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 8x\left(\frac{x\partial y}{\partial x} - y\right)\right]}.$$

Intégrant de nouveau, on aura, en nommant $2e$ la constante, $-2e + 2y + \frac{2x^3}{9} + \frac{2cx\sqrt{(x)}}{3}$
$$= \frac{\partial x^2 \,\text{cof.}\, \pi\mu}{4x}\sqrt{\left[\left(x^2 - \frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 8x\left(\frac{x\partial y}{\partial x} - y\right)\right]}.$$

Substituant dans le radical pour $\frac{\partial y}{\partial x}$ sa valeur qui est $-\frac{x^2}{3} - \frac{c\sqrt{(x)}}{2}$, on trouvera :

$$y = e - \frac{x^3}{9} - \frac{cx\sqrt{(x)}}{3} + \frac{\partial x^2 \,\text{cof.}\, \pi\mu}{\sqrt{(8x)}}$$
$$\sqrt{\left(\frac{c^2}{32} - y - \frac{x^3}{9} - \frac{cx\sqrt{(x)}}{3}\right)};$$ donc si on fait $e = \frac{c^2}{32}$, on aura $y = \frac{c^2}{32} - \frac{x^3}{9} - \frac{cx\sqrt{(x)}}{3}$; intégrale ordinaire, parce que le terme différenciel s'évanouit. Il est clair que l'intégrale complétée par la constante e, représente une courbe sans angles finis, mais le rayon de la développée est double au même point, parce que la différence positive ou négative de $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ pour le

même

même point, eſt $\frac{\sqrt{(\frac{c^2}{32} - e)}}{\sqrt{(8x)}}$ & s'évanouit quand $\frac{c^2}{32} = e$.

La première intégrale de la propoſée eſt $y = a x^2 + b x + a b$, a & b étant les arbitraires introduites dans l'intégration. On s'en aſſurera en chaſſant les arbitraires par le moyen des équations $\frac{\partial y}{\partial x} = 2 a x + b$, & $\frac{\partial \partial y}{\partial x^2} = 2 a$. Si on veut tirer de-là l'équation particulière ordinaire qui a été déterminée ci-deſſus, il faut faire varier les arbitraires a & b, de manière qu'on ait toujours $\frac{\partial y}{\partial x} = 2 a x + b$, & $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 2 a$, comme ſi ces arbitraires n'avoient pas varié.

Il faut donc ſuppoſer $(x^2 + b) \partial a + (x + a) \partial b = 0$, & $2 x \partial a + \partial b = 0$; de cette ſuppoſition on tire facilement $b = 2 a x + x^2$; différenciant & mettant pour ∂b ſa valeur $- 2 x \partial a$, on aura, $- x \partial a = a \partial x + x \partial a + x \partial x$. Cette équation facile à intégrer, fera connoître la valeur de a, & par conſéquent celle de b; mais il vaut mieux ſuivre la première méthode, & cette première méthode eſt même la ſeule qui puiſſe réuſſir quand on ne peut pas obtenir l'intégrale ordinaire, tel eſt l'exemple ſuivant :

EXEMPLE II.

On a l'équation, $2 x \partial^2 y - \partial y \partial x + x^2 \partial x^2 = (x^2 + y^2) \partial x^2 \text{ coſ. } \pi \mu \sqrt{[(x^2 - \frac{\partial y}{\partial x})^2 + 8 x (\frac{x \partial y}{\partial x} - y)]}$. Le réſultat eſt évidemment le même que ci-deſſus, & cependant ſi on ôtoit coſ. $\pi \mu$, on ne pourroit en aucune manière intégrer l'équation.

EXEMPLE. III.

SOIT l'équation $x\,\partial^2 y - \partial y\,\partial x = \partial x$ cof. $\pi\,\mu$ $\sqrt{(4\,y^2\,\partial x^2 - x^2\,\partial y^2)}$, on a; $y = e + c\,x^2 + \frac{\partial x \text{ cof. } \pi\,\mu}{4\,x} \sqrt{(4\,y^2\,\partial x^2 - x^2\,\partial y^2)}$, e & c font les arbitraires introduites. Si on fait $e = 0$, le terme différenciel s'évanouit, & on a une intégrale particulière ordinaire.

On a généralement $y = e + c\,x^2 + \frac{\partial x^2 \text{ cof. } \pi\,\mu}{4\,x} \sqrt{(4\,e^2 + 8\,e\,c\,x^2)}$, ou $y = e + c\,x^2 + \frac{\partial x^2 \text{ cof. } \pi\,\mu}{2\,x} \sqrt{[(e + 2\,c\,x^2)]}$; fi on fait $e = f\,\partial x^2$, on aura $y = c\,x^2 + \frac{\partial x^3 \text{ cof. } \pi\,\mu}{2} \sqrt{(2\,f\,c)}$. Il eft clair que la courbe repréfentée par cette équation, non-feulement eft fans angles finis, mais n'a pour chaque point qu'un rayon de la développée; mais la valeur de $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ eft double pour chaque point, & les différences d'un ordre plus élevé font infinies.

EXEMPLE IV.

SOIT l'équation, $\partial^2 y - \left(\frac{4\,m^2\,x\,\partial y\,\partial x + m^2\,x^2\,\partial x^2}{1 + 4\,m^2\,x^2}\right)$ $= 2\,m\,\partial x^2$ cof. $\pi\,\mu \sqrt{\left[\frac{y - \frac{x\,\partial y}{\partial x} - \frac{\partial y^2}{\partial x^2}}{1 + 4\,m^2\,x^2} + \frac{4\,m^2\left(\frac{x\,\partial y}{\partial x} + \frac{x^2}{4}\right)^2}{(1 + 4\,m^2\,x^2)^2}\right]}$. On a pour l'intégrale,

$$y = e + \frac{c\,x\,\sqrt{(1 + 4\,m^2\,x^2)}}{2} + \frac{c\,L}{4\,m} + \frac{L^2}{64\,m^2} + \frac{L\,x\,\sqrt{(1 + 4\,m^2\,x^2)}}{16\,m} - \frac{3\,x^2}{16} + \frac{m\,\partial x^2 \text{ cof. } \pi\,\mu}{2}$$

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 4.

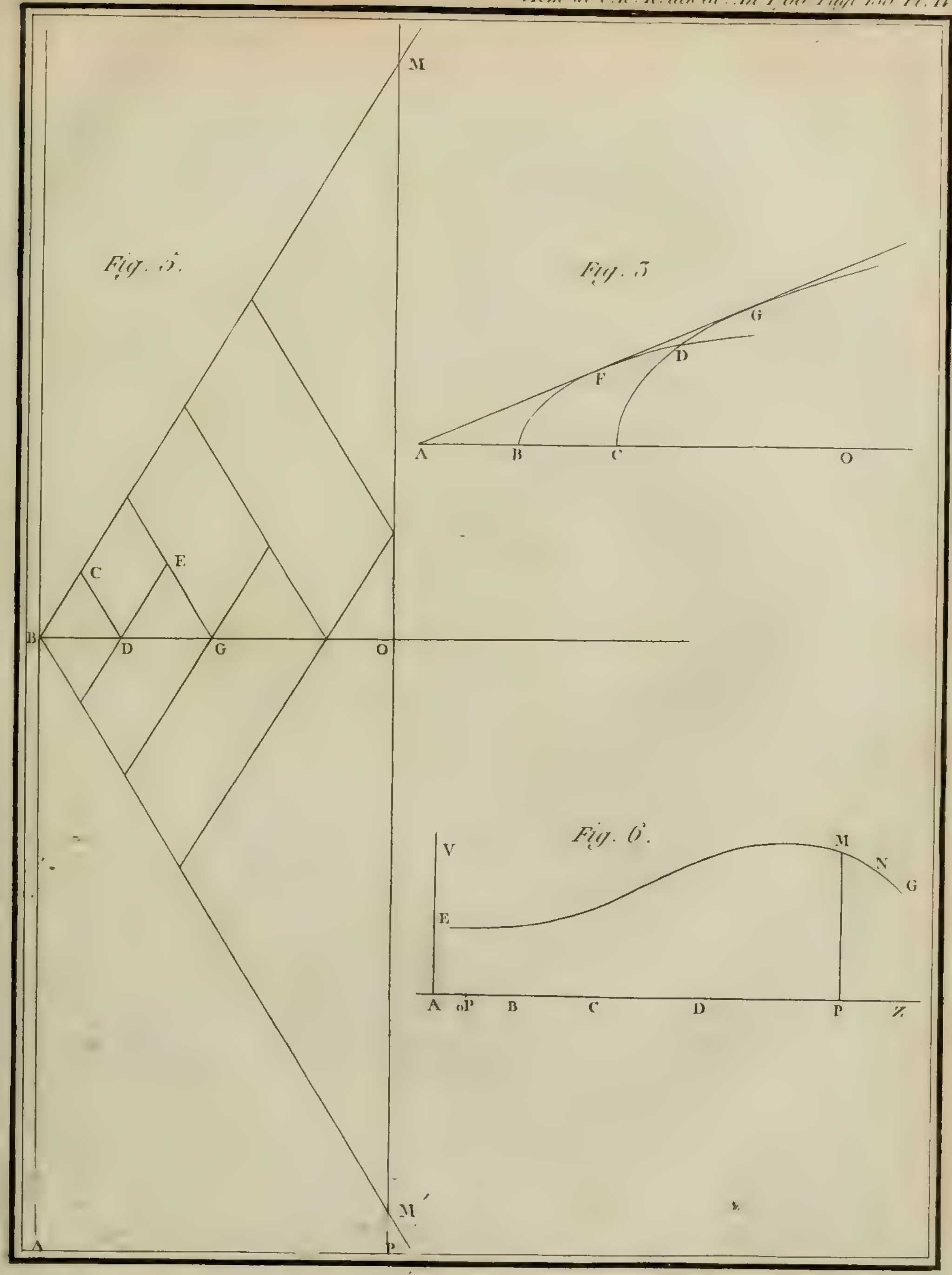


Fig. 5.
M
C
E
B
D
G
O
M'
A
P
Fig. 3
G
D
F
A
B
C
O
Fig. 6.
V
M
N
G
E
A
oP
B
C
D
P
Z



$\sqrt{(y - \&c.)}$, e & c ſont les arbitraires introduites dans l'intégration, & L eſt mis à la place de log. $[2mx + \sqrt{(1 + 4m^2x^2)}]$; le terme différenciel diſparoîtra ſi on fait $e = c^2$. L'intégrale complette ordinaire de cette équation eſt, $y = max^2 + bx + a^2 + b^2$, d'où l'on auroit pu tirer l'intégrale particulière ordinaire, en faiſant varier a & b comme ci-deſſus.

Si on avoit l'équation du ſecond ordre non-élevée $x^3(x\partial^2y - \partial y\partial x) = 2y\partial x(x\partial y - 2y\partial x)$, où ∂x eſt conſtant, il ſeroit facile de voir que l'équation $y = cx^2$ la vérifie, c étant quelconque; mais on n'a alors qu'une intégrale incomplette ordinaire, car la propoſée revient à celle-ci, $\partial\left(\frac{\partial y}{x}\right) = \frac{2y\partial x}{x^2}\partial\left(\frac{y}{x^2}\right)$.

Intégrant, on a, $\partial y = \frac{y^2\partial x}{x^3} + ax\partial x$, où a eſt la conſtante. Maintenant il faut faire $x^2 = 2z$ pour rendre l'équation homogène, & $y = uz$ pour ſéparer les indéterminées. Ces ſuppoſitions mèneront à des fractions rationnelles; intégrant donc, & remettant pour u & z leurs valeurs, on aura

$$\left(\frac{bx^2}{2}\right)^{\sqrt{(1-a)}} = \frac{y - x^2[1 + \sqrt{(1-a)}]}{y - x^2[1 - \sqrt{(1-a)}]},$$

b eſt la deuxième conſtante introduite; or ſi on la fait égale à o, ou infinie, on a évidemment:

$y = x^2[1 + \sqrt{(1 - a)}] = cx^2$, en faiſant $2c - c^2 = a$.

Je terminerai ce Mémoire en obſervant qu'Euler, qui a rencontré le premier une ſeconde intégrale complette, comme je l'ai dit plus haut, a remarqué le premier auſſi que les intégrales particulières réſolvoient les problèmes. *Voyez la page 536 du premier volume de ſon Calcul intégral.*

ANALYSE

DE LA PRASE ET DE LA CHRYSOPRASE,

Ou Calcédoine verte, de Coſémitz en Siléſie, dans le Comté de Glatz.

Par M. SAGE.

L'AGATE, à laquelle on a donné le nom de *praſe*, à cauſe de ſa couleur qui eſt ſemblable à celle du poireau, que les Grecs déſignoient par le mot *praſos*, eſt d'un vert tendre, & quelquefois demi-transparente ; cette agate, plus ou moins argileuſe, a beaucoup de rapport avec le pechſtein.

La praſe prend le nom de chryſopraſe, *praſius viridis flaveſcens, ſmaragdopraſius, ſmaragdites, Wall.* lorſqu'il s'y trouve des taches jaunes produites par de l'ocre martial.

Les minéralogiſtes ont été long-temps incertains ſur le genre de pierre auquel ils devoient rapporter la praſe ; les uns l'ont nommée *prime d'émeraude ;* Cronſtedt a cru que c'étoit un *ſchorl en roche*, & l'a déſigné par la phraſe, *baſaltes ſpathoſus colore viridi eminentiori.*

Wallerius a mieux connu la praſe qu'il a rangée dans la claſſe des agates : *achates pellucidus nebuloſus virideſcens.*

Lehman a conſidéré la chryſopraſe comme une eſpèce particuliere de pierre, & l'a déſignée ſous le nom de *chryſoberille.*

Une ſuite de praſe & de chryſopraſe que j'ai reçue de Coſémitz en Siléſie, fait voir comment s'eſt formée cette agate en roche ; elle eſt précédée & accompagnée dans ſa mine par du quartz cellulaire martial & jaunâtre. Le même morceau de praſe offre quelquefois de la gyraſole & du pechſtein, du jaſpe brun & de la calcédoine encroûtée &

pénétrée d'argile blanche, ce qui la conſtitue alors *hydrophane.*

La praſe eſt de la calcédoine colorée en même temps en vert par le cobalt et le nickel ; la calcédoine ſe trouve en plus grande quantité dans la mine de praſe, que la praſe. On la rencontre entre deux lits d'amiante blanc, entremêlée d'aſbeſte griſâtre & de terre argileuſe verte arénacée. Lehman regarde cette eſpèce d'aſbeſte comme la matrice de la chryſopraſe.

La praſe de Siléſie eſt colorée par du cobalt & du nickel, ainſi que la chryſopraſe qui contient en outre de la terre martiale jaune.

Pour extraire le nickel qui colore en partie ces agates, il ne ſuffit pas de les réduire en poudre fine, & de les mettre en digeſtion avec des acides ou de l'alkali volatil, il faut d'abord déſunir ce demi-métal d'avec le quartz & la terre argileuſe : on y parvient par l'intermède du ſel ammoniac; pour cet effet on diſtille enſemble une partie de praſe pulvériſée & ſix parties de ſel ammoniac, dont il ne ſe décompoſe que fort peu, le reſte ſe ſublime dans le cou de la cornue, & n'eſt point coloré. La praſe qui reſte au fond de la cornue, eſt d'un vert foncé; elle attire un peu l'humidité de l'air, parce que le ſel de nickel eſt déliqueſcent.

L'alkali volatil mis en digeſtion ſur ce réſidu, prend une couleur bleue, produite par le nickel; l'alkali évaporé, il reſte une véritable chaux de nickel d'un vert clair.

Un morceau de praſe encroutée d'une effloreſcence de cobalt (*a*), me fit d'abord croire que cette agate devoit uniquement ſa couleur verte à ce demi-métal. L'émail bleu que produit la praſe qui a été fondue avec quatre parties d'alkali fixe, fortifioit encore mon aſſertion; mais cette couleur ne ſe produit plus quand on fond de la praſe avec

---

(*a*) Ce morceau eſt dans le Cabinet de l'École royale des Mines. *Voyez la page 123 de la Deſcription méthodique de ce Cabinet.*

du borax; l'eſpèce d'émail qu'on obtient eſt d'un brun rougeâtre, parce que les chaux métalliques que la praſe contient, ne ſe vitrifient point alors auſſi complétement. Dans la fuſion de la praſe avec l'alkali fixe, la petite portion de nickel que cette pierre contient, n'empêche pas la chaux de cobalt de colorer en bleu.



ANALYSE

Du Spath pesant aéré, transparent & strié, d'Alstonmoor.

Par M. SAGE.

BERGMAN a parlé de la terre pesante aérée (*a*) ; celle-ci est au spath pésant aéré, ce que la craie est au spath calcaire ; le spath pesant aéré est au spath pesant vitriolé, ce que le spath calcaire est à la sélénite.

M.[rs] Claproth & Kirvan ont parlé du spath pesant aéré blanc transparent & strié, sous le nom de *terre pesante aérée ;* mais comme on doit réserver le nom de terre aux matieres pulvérulentes & opaques, j'ai cru devoir désigner sous le nom de *spath pesant aéré*, le sel - pierre strié transparent dont je vais donner l'analyse.

Le spath pesant aéré, sur lequel M. Claproth a travaillé, venoit des mines de charbon de Lancashire, où il a été trouvé en masses arrondies de la grosseur de la tête d'un homme : c'est de ces mêmes morceaux qu'ont eus M.[rs] Withering, Priestley & Walt. M. Black a reçu d'Alstonmoor le spath pesant aéré dont il a parlé ; celui-ci avoit été trouvé dans une mine de plomb.

M. Claproth dit que M. Bergman n'a pu présenter que quelques-unes des propriétés de la terre pesante aérée, parce que celle qu'il a analysée, & qui venoit de Schottland, étoit mêlée de beaucoup de terre calcaire, puisque le chimiste Suédois n'y a trouvé que huit parties de terre pesante, sur quatre-vingt-douze de terre calcaire. Bergman dit que la terre pesante aérée a plusieurs rapports avec la terre calcaire, qu'après avoir été calcinée, & après avoir été mise

(*a*) *Carbonate de barite, natif,* dans la nouvelle nomenclature.

dans l'eau, il ſe forme une pellicule à ſa ſurface : il eſt à préſumer que cette propriété étoit due à une portion de terre calcaire que contenoit la terre peſante aérée de Scotlland, que ce chimiſte a eſſayée ; car le ſpath peſant aéré d'Alſtonmoor, après avoir été calciné & mis dans l'eau diſtillée, ne produit point de pellicule, cette eau ne ſe trouve nullement altérée.

Le ſpath peſant aéré blanchâtre, ſtrié, demi-tranſparent, que j'ai employé pour les expériences dont je vais rendre compte, vient d'Alſtonmoor, & m'a été donné par M. le chevalier de Gréville; ce morceau avoit environ ſix pouces de long, ſes deux extrémités étoient recouvertes d'ocre martiale d'un jaune pâle.

La peſanteur ſpécifique de ce ſpath peſant aéré, a été reconnue par M. Briſſon, de 42919; celle du ſpath peſant vitriolé eſt de 44400.

Le ſpath peſant aéré, expoſé au feu, y perd ſa tranſparence & devient friable, ſans perdre ſenſiblement de ſon poids ; ce ſpath n'a pas été plus altéré après une calcination de quatre heures, après laquelle il n'étoit pas plus ſoluble dans l'eau qu'avant d'avoir été calciné.

Le ſpath peſant aéré ayant été pulvériſé & expoſé à un feu violent, s'eſt aglutiné; les portions de cette pierre, qui étoient en contact avec le creuſet, avoient une couleur verdâtre ; taches que Bergman avoit auſſi obſervées, en expoſant à un feu violent la terre peſante.

J'ai fondu une partie de ſpath peſant aéré, avec deux parties de borax calciné ; j'ai obtenu un verre blanc tranſparent, tandis que le même borax fondu ſans addition, a produit un verre jaunâtre.

Après avoir fondu un mélange d'une partie de ſpath peſant aéré, & de deux parties d'alkali fixe du tartre, je l'ai coulé dans un mortier de fer, enſuite je l'ai pulvériſé & fait diſſoudre dans de l'eau diſtillée ; j'ai filtré cette leſſive, la terre peſante eſt reſtée ſur le papier gris; la leſſive évaporée n'a produit que de l'alkali fixe, & point de tartre vitriolé

vitriolé. On ſait que le ſpath peſant traité de la même maniere, produit du tartre vitriolé.

J'ai formé des rotules avec le ſpath peſant aéré pulvériſé, dont j'ai réuni les molécules avec de la gomme adragante; j'ai calciné ces rotules à travers les charbons ardens: elles ont pris une couleur verdâtre, & n'ont point décelé la préſence d'un foie de ſoufre, comme le phoſphore de Bologne, préparé de la même manière avec le ſpath peſant vitriolé.

L'acide vitriolique concentré (*a*) diſſout avec efferveſcence & chaleur le ſpath peſant aéré: la diſſolution eſt limpide, ſi l'on a employé douze parties d'acide vitriolique, contre une de ce ſpath; ſi l'on n'a verſé deſſus que ſept à huit parties d'acide, on n'obtient qu'une maſſe gélatineuſe demi-tranſparente.

Si l'on verſe de l'eau dans la diſſolution du ſpath peſant aéré, faite par l'acide vitriolique concentré, elle devient auſſitôt laiteuſe, & il ſe précipite du ſpath peſant vitriolé; celui-ci lavé & deſſéché, ſe trouve peſer un dixième de plus que le ſpath peſant aéré qui a été diſſous dans l'acide vitriolique.

J'ai formé des rotules avec ce ſpath peſant vitriolé artificiel; je les ai calcinées à travers les charbons ardens: elles ont produit un phoſphore ſemblable à celui de Bologne; l'eau a diſſous le foie de ſoufre à baſe de terre peſante qu'il contenoit.

L'acide nitreux à trente-deux degrés, fait d'abord une vive efferveſcence avec le ſpath peſant aéré; le nitre qui en réſulte demandant beaucoup d'eau pour ſa diſſolution, ſe précipite auſſitôt qu'il ſe forme, comme l'a obſervé M. Claproth.

J'ai verſé de l'eau diſtillée ſur le nitre à baſe de terre peſante, qui étoit ſous forme d'une poudre blanche: il faut environ ſoixante parties d'eau pour diſſoudre une

(*a*) Cet acide vitriolique marque 67 degrés à l'aréomètre de M. Baumé.

partie de ce ſel dont il faut aider la diſſolution par la chaleur.

Ayant fait évaporer au bain de ſable dans une capſule de verre évaſée, la diſſolution de nitre à baſe de terre peſante, elle a produit par le refroidiſſement, des criſtaux blancs tranſparens qui repréſentent l'octaèdre dans différens états.

J'ai fait évaporer en trois temps la diſſolution de nitre à baſe de terre peſante; la premiere criſtalliſation a produit,

1.° Des octaèdres rectangulaires.

2.° Des octaèdres tronqués aux ſommets.

3.° Des octaèdres tronqués aux ſommets & parallèlement à un des plans d'une pyramide.

4.° Des octaèdres tronqués aux quatre angles de la baſe commune des pyramides.

5.° Des octaèdres tronqués ſur les bords.

6.° Des pyramides à quatre pans, ou moitié d'octaèdres.

La ſeconde évaporation a produit des criſtaux octaèdres, aſſemblés confuſément, parce que la capſule n'étoit pas aſſez évaſée.

La troiſième & dernière évaporation de la diſſolution de nitre à baſe de terre peſante, a auſſi produit des criſtaux octaèdres & en pyramides à quatre pans: on remarquoit au fond & ſur les bords de la capſule, des priſmes octaèdres articulés & croiſés, formés d'octaèdres implantés les uns dans les autres.

Le nitre à baſe de terre peſante ne s'altère point à l'air; mis ſur les charbons ardens, il y éclate & fuſe.

L'acide marin diſſout avec effervescence le ſpath peſant aéré; le ſel qui en réſulte ſe précipite auſſitôt. L'acide marin qui ſurnage, ne tient point en diſſolution de ſel à baſe de terre peſante. Si l'on met ce ſel en digeſtion dans de l'eau diſtillée, ſur un bain de ſable, elle devient laiteuſe, & ne s'éclaircit point après avoir été filtrée à travers

plusieurs papiers; j'ai fait évaporer cette dissolution, & je n'ai point obtenu de cristaux. Le sel à base de terre pesante étoit au fond de la capsule sous forme de poudre blanche qui n'avoit que peu de saveur, ce qui tient à l'acide vitriolique contenu dans l'acide marin du commerce, puisque l'acide marin purifié a la propriété de dissoudre le spath pesant aéré, comme l'a observé M. Fourcroi.

L'expérience suivante fait connoître que l'acide marin très-concentré a la propriété de dissoudre le spath pesant aéré, & de produire un sel soluble dans l'eau.

J'ai distillé une demi-once de spath pesant aéré, avec une once de sel ammoniac; il s'est dégagé de l'alkali volatil concret *(a)*; la portion de sel ammoniac qui n'a point été décomposée, s'est sublimée à la voûte & au commencement du col de la cornue.

Le résidu de cette opération ayant été lessivé avec de l'eau distillée, s'y est dissous en entier; cette lessive a produit par l'évaporation, des cristaux en lames rhomboïdales taillées en biseau sur les bords, & tronquées aux angles plus ou moins profondément. Ce sel à base de terre pesante ne s'altère point à l'air, a une saveur amère un peu piquante; mis sur des charbons ardens, il y perd l'eau de sa cristallisation, y devient blanc & opaque, & ne s'y décompose point.

La gravité spécifique du spath pesant a fait soupçonner à quelques naturalistes, qu'il contenoit du métal; Cronstedt l'a désigné sous le nom de *marmor metallicum.*

Je ne suis point parvenu à extraire de métal du spath pesant aéré blanc & transparent; celui qui est opaque recèle souvent de la blende, de la pyrite, de l'ocre martial jaunâtre, & quelquefois de la chaux de plomb.

(a) Le spath pesant aéré, après avoir été calciné pendant trois heures, a décomposé le sel ammoniac comme celui qui n'avoit point éprouvé l'action du feu.

MÉMOIRE

SUR LE GENRE

DU MUSCADIER, *MYRISTICA.*

Par M. DE LA MARCK.

DANS un siècle où la botanique a fait des progrès si marqués, & où les botanistes ont étendu leurs recherches jusque sur les végétaux exotiques les plus rares, & même les moins importans, on a sans doute lieu d'être étonné que la fructification d'un arbre aussi intéressant que l'est celui qui produit la muscade, soit encore inconnue aux botanistes, ou au moins ne leur soit connue que d'une manière très-incomplette, comme je vais le faire voir.

Le fruit du muscadier étant, comme épicerie, un objet intéressant de commerce, est à la vérité connu depuis long-temps; on le trouve même décrit & figuré dans un assez grand nombre d'ouvrages dont plusieurs sont déjà anciens, comme on le verra par la synonymie que je donnerai dans l'exposition des espèces de ce genre. Mais ce qu'on nous a donné sur les fleurs de cet arbre précieux, est si incomplet, & même si rempli d'erreurs, que Linné père n'a pas voulu insérer le genre que constitue le muscadier, parmi ceux que l'on trouve mentionnés dans les dernières éditions de son système des végétaux.

Quelques auteurs prétendent que Théophraste a connu le fruit du muscadier, & qu'il le nomma *comacum*. Mais ce que Théophraste dit du *comacum*, est si vague, qu'on ne peut rien assurer de positif à cet égard; il en parle comme d'un aromate qui nous vient de l'Inde, en partie directement par la mer, & en partie qu'on apporte de l'Arabie *(a)*,

(a) Cætera autem odorata, quorum in unguento usus, partim ex

aromate qu'on emploie dans les parfums; mais Théophraste n'indique aucun caractère, soit de l'aromate même, soit du végétal qui le produit.

D'ailleurs, le muscadier ne croissant pas naturellement dans l'Inde, il est plus convenable de penser avec G. Bauhin, l'Ecluse & la plupart des botanistes, que le fruit de cet arbre ne fut point connu des anciens Grecs *(b)*. G. Bauhin n'ignoroit pas néanmoins qu'on rapportoit à la muscade le *comacum* de Théophraste, puisqu'il a cité lui-même dans son *Pinax* pour synonyme de son *nux moschata fructu rotundo*, la phrase suivante de Guilandinus : *comacum Theophrasti & cinnamum caryopon Plinii.* Guiland *(c)*.

Les Arabes furent les premiers, à ce qu'il paroît, qui eurent connoissance de la muscade. Avicenne *(liv. II, chap. 503, pag. 348.)* fait mention de ce fruit, & le nomme *jiausiban* ou *jausiband*, ce qui signifie en arabe, *noix de banda.* C'est aussi le jeuzbave ou le jusbague de Sérapion; enfin, c'est le *moschocaryon* des Grecs modernes. *Bauh. pin. 407.*

Mais si, comme je viens de le dire, le fruit du muscadier est connu depuis long-temps, il n'en est pas de même des fleurs de cet arbre.

Pison, qui est un des premiers auteurs qui en ait parlé, leur attribue de la ressemblance avec celles du poirier, ou avec celles du cerisier; ce qui a fait dire par la suite à plusieurs auteurs que ces fleurs avoient cinq pétales; mais on va voir que c'est sans fondement, & que ces mêmes fleurs

---

Indiâ advehuntur, ac indè mittuntur ad mare; partim ex Arabiâ deportantur, ut cinamomum & casia, atque etiam comacum. Theophr. hist. l. 9. p. 1004.

(b) Nux moschata veteribus Græcis cum suâ maci incognita fuit. Bauh. pin. 407. Clus. exot. p. 179.

(c) Selon quelques-uns, ce *comacum* de Théopraste n'est autre chose que le *piper cubeba*, ce poivre qui croît naturellement dans l'Inde, étant en effet fort aromatique.

Cubeba est un mot latin dérivé de *cubab*, nom chinois de ce poivre, lequel fut altéré & transformé en *cubabim, cubabum, cumacum,* & enfin *comacum.*

n'ont avec celles du poirier ou du cerisier, aucune ressemblance, soit par leurs caractères, soit même par leur aspect. D'autres auparavant prenoient le *macis* ou l'enveloppe membraneuse de la coque de la muscade, pour la fleur même, sans doute à cause de la vive couleur & des découpures singulières de cette enveloppe.

Valentini, dans son *Historia simplicium*, qui a paru en latin en 1716, est le premier qui ait remarqué que les fleurs du muscadier étoient trifides, c'est-à-dire, qu'elles avoient un calice à trois découpures.

Rumphe ensuite, dans son *Herbarium Amboinense*, dont Jean Burman fut le traducteur & l'éditeur en 1750, dit la même chose, sans nous apprendre presque rien de plus que ce qu'on trouve dans Valentini; mais il donna des fleurs du muscadier, une figure à peu-près passable, quoique sans détails. Il paroît que Valentini & Rumphe n'ont examiné que les fleurs d'un individu fertile, & par conséquent que des fleurs femelles, comme leur description le prouve en effet. Mais ces auteurs n'ont pas pris garde que les fleurs dont ils parloient étoient constamment d'un seul sexe : ils étoient encore attachés à l'usage de leur temps où l'on nommoit mâles ou femelles certaines productions de la nature, en raison de leur importance, ou de la préférence que les unes méritoient sur les autres. Ainsi la muscade longue étoit alors nommée *mâle*, & la ronde portoit le nom de *muscade femelle*; il en étoit de même des arbres qui les produisoient, quoique ce soit toujours des individus femelles qui produisent des muscades, quelle que soit la forme de ces fruits.

Linné père, dans l'édition de son *Genera plantarum*, publiée en 1742, fit mention du genre du muscadier, sous le nom de *myristica*, & plaça ce genre avec quelques autres dans un *appendix* particulier, & sous le titre de *fragmens divers*.

Dans l'exposition de ce genre, Linné distingue des fleurs mâles & des fleurs femelles, mais sans expliquer si ces

fleurs uniſexuelles ſont, relativement à ſon ſyſtème, dioïques ou monoïques. Il cite le calice, la corolle & les étamines de la fleur mâle, comme lui étant inconnue; enſuite il dit que la fleur femelle a un calice ovale-campanulé & à quatre dents; qu'elle eſt dépourvue de corolle, & que ſon piſtil eſt en maſſue & de la longueur du calice.

On voit par cette deſcription, que Linné père ne connut ni la fleur mâle, ni même la fleur femelle du muſcadier; car le calice de la fleur femelle qu'il décrit, n'eſt point à quatre dents, & s'il en eût vu l'ovaire, il n'eût pas manqué de parler de ſon ſtigmate qui eſt aſſez remarquable.

M. Adanſon, dans ſon livre intitulé *Familles des plantes*, & publié en 1763, a fait mention du genre du muſcadier, ſous le nom de *comacum*, & l'a placé dans ſa famille des piſtachiers, à la *page 345*. M. Adanſon attribue aux plantes de ce genre des fleurs hermaphrodites *(p. 334)*, mais ſtériles ſur certains pieds, & fertiles ſur d'autres. D'ailleurs, M. Adanſon regarde comme inconnue dans les fleurs du muſcadier, la corolle & le nombre des étamines; & il cite au piſtil un ſtyle & un ſeul ſtigmate.

M. Sonnerat parle du muſcadier dans ſon Voyage à la nouvelle Guinée, publié en 1776. Il dit *(p. 195)* que les fleurs de cet arbre naiſſent dans les aiſſelles des branches; qu'elles ont un piſtil entouré d'une infinité d'étamines, & que leurs pétales ſont au nombre de cinq.

En 1781, Linné fils publia dans ſon *Supplementum plantarum*, un caractère générique du muſcadier. Selon ce caractère, les fleurs du muſcadier ſont hermaphrodites; elles ont un calice quinquefide, cinq pétales, & des étamines nombreuſes: ces caractères ſont, comme on le verra, fort différens de ceux que je vais préſenter dans l'inſtant.

Enfin, M. Thunberg, dans les Actes de Stockholm, *année 1782*, traite de deux eſpèces de muſcadiers, parmi leſquelles ſe trouve le muſcadier aromatique. M. Thunberg rapporte ce genre de plante à la monœcie de Linné, & dit que les fleurs mâles n'ont qu'une étamine; or, ces

caractères ne sont point encore conformes à ceux que l'observation nous a fait connoître.

En effet, ayant reconnu par le moyen de quelques branches sèches de muscadier, qui me furent communiquées en 1781 par M. Sonnerat, que ce que Linné fils venoit de publier dans son supplément sur les fleurs du muscadier, présentoit quantité d'erreurs évidentes, je désirai de faire connoître, autant qu'il dépendroit de moi, les véritables caractères de ce genre de plante, & je souhaitai d'avoir assez de succès dans mes recherches, pour pouvoir faire part à l'Académie de leur résultat sur ce beau genre, l'un des plus intéressans qu'offre la botanique.

En conséquence, voulant me procurer les moyens & les éclaircissemens dont j'avois besoin, j'écrivis à M. Céré, directeur du jardin du Roi à l'Isle de France, & le priai de m'envoyer des branches de muscadier, munies de fructification en bon état. Je ne fus point trompé dans mon attente, car M. Céré me fit passer plusieurs branches de cet arbre, les unes en fleurs, & les autres garnies de fruits bien conservés; il joignit à son envoi des mémoires concernant le muscadier & les autres arbres à épicerie que l'on cultive à l'Isle de France.

On verra par les observations de M. Céré, que je rapporterai, que c'est lui qui a observé le premier que le muscadier aromatique, ainsi que les autres espèces qu'il nomme *muscadiers sauvages*, sont à sexe simple, c'est-à-dire, dioïques, comme dans le caractère générique suivant.

Caractère générique.

Les fleurs des muscadiers sont dioïques, c'est-à-dire toutes mâles sur certains pieds, & toutes femelles sur d'autres.

Fleur mâle.

1.° Un calice monophylle, urcéolé ou en grelot, & partagé à son sommet en trois découpures.

2.° Point de corolle.

3.° six

3°. Six à douze étamines non saillantes hors du calice, réunies en un faisceau (distinctes dans une espèce), à filamens très-courts insérés au réceptacle, & à anthères linéaires droites à deux loges.

Fleur femelle.

1°. Un calice monophylle, inférieur, caduc, urcéolé ou en grelot, & divisé à son sommet en trois découpures.

2°. Point de corolle.

3°. Un ovaire supérieur, ovale ou oblong, dépourvu de style, & terminé par deux stigmates.

Le *fruit* est un drupe arrondi ou ovale, monosperme, & dont le péricarpe est composé de trois parties distinctes, qu'on nomme le *brou*, le *macis* & la *coque*.

Le *brou* (ou l'enveloppe extérieure) est ordinairement charnu, quelquefois desséché & coriace, s'ouvre constamment par son sommet en deux valves.

Le *macis* (ou l'enveloppe intermédiaire) est membraneux, coloré, lacinié, comme réticulaire, & recouvre la coque contre laquelle il est fortement appliqué.

La *coque* (ou l'enveloppe immédiate de la semence) est mince, dure, fragile, sillonnée à l'extérieur par les impressions des ramifications du macis.

La *semence* est grosse, charnue, huileuse, quelquefois aromatique, & constamment comme marbrée à l'intérieur par des veines colorées & rameuses, répandues dans sa substance.

Caractère essentiel ou distinctif du genre.

Fleurs dioïques, à calice monophylle & trifide, & à corolle nulle.

Baie drupacée, monosperme, à brou bivalve, & à coque couverte d'une membrane en réseau, ou laciniée.

Observation.

Les muscadiers sont des arbres toujours verts, à feuilles

ſimples & alternes, à rameaux dépourvus de ſtipules, & à fleurs axillaires, petites, portées ſur des pédoncules plus ou moins diviſés, & plus courts que les feuilles.

Le genre que ces arbres conſtituent, eſt bien diſtingué de tous ceux que l'on connoît, par le caractère eſſentiel que je viens d'expoſer. Il me paroît pouvoir ſe rapporter à la famille des lauriers, *n.° 65*, compriſe dans la quatrième claſſe (les fleurs incomplettes) de l'ordre méthodique que j'ai propoſé.

Expoſition & caractères diſtinctifs des eſpèces.

1. Muſcadier aromatique; *myriſtica aromatica. Myriſtica foliis ovato-lanceolatis, nervis lateralibus ſimplicibus, bracteis orbiculatis, fructu glabro.* N.

2. Muſcadier des Philippines; *myriſtica Philippenſis. Myriſtica foliis ovato-oblongis maximis, nervis lateralibus ſimplicibus, fructu rotundo tomentoſo.* N.

3. Muſcadier de Malabar; *myriſtica Malabarica. Myriſtica foliis ovatis, nervis lateralibus ſimplicibus, fructu oblongo tomentoſo.* N.

4. Muſcadier globulaire; *myriſtica globularia. Myriſtica foliis anguſto-lanceolatis, nervis lateralibus ſimplicibus, pedunculis ſubumbellatis tomentoſo-ferrugineis.* N.

5. Muſcadier de Madagaſcar; *myriſtica Madagaſcarienſis. Myriſtica foliis ovatis, nervis lateralibus ramoſis, pedunculis paniculatis tomentoſo-ferrugineis.* N.

6. Muſcadier acuminé; *myriſtica acuminata. Myriſtica foliis ovatis acuminatis infernè albidis, nervis lateralibus ramoſis.* N.

7. Muſcadier porte-ſuif; *myriſtica ſebifera. Myriſtica foliis cordato-oblongis ſubtus tomentoſis, pedunculis paniculatis, drupa cortice ex ſucco.* N.

8. Muſcadier uviforme; *myriſtica uviformis. Myriſtica foliis lanceolatis margine undulatis, fructibus minimis lateralibus & uvæformibus.* N.

Des huit eſpèces de muſcadiers que je viens de déterminer, ſept me ſont connues, à la vérité ſeulement en partie, mais ſuffiſamment pour certifier leur exiſtence. Quant à celle que je nomme *muſcadier de Malabar*, & dont je n'ai pas encore eu occaſion de voir la moindre partie, la deſcription, la figure & les détails que Rhéede en a donnés, ne permettent pas de douter de ſon exiſtence, & ſuffiſent pour l'établiſſement de ſes caractères diſtinctifs.

Deſcription & ſynonimie des eſpèces.

Première eſpèce. Muſcadier aromatique; *myriſtica aromatica*.

Nux moſchata fructu rotundo. Bauh. pin. 407. *Nux aromatica fœmina*. J. Bauh. hiſt. 1, part. 1, p. 264. *Nux aromatites*. Cluſ. exot. p. 179. *Pala & bongo-pala*. Piſ. braſ. mant. aromat. p. 173. *Nux moſchata*. Lob. ic. 2, p. 140. *Nux moſchata fructu rotundo*. Pluk. alm. 265, t. 209, f. 1. Raj, hiſt. p. 1523, & ſuppl. Luz. p. 58. *Nux myriſtica*. Valent. hiſt. ſimplic. p. 452, t. 3. *Nux myriſtica ſ. pala*. Rumph. herb. amb. vol. 2, p. 14, t. 4. *Nux moſchata*. Blackw. t. 353; Garſ. exot. t. 71. Le muſcadier. Sonner. voyage à la nouv. Guinée, p. 195.

C'eſt un arbre de la grandeur d'un beau poirier, & qui s'élève à environ trente pieds de hauteur : cet arbre, l'un des plus beaux & des plus diſtingués que l'on puiſſe voir, dit M. Céré, eſt ſur-tout remarquable par le beau vert de ſon feuillage & par la diſpoſition de ſes branches. Quand il jouit d'une forte végétation, il s'orne alors d'une grande quantité de rameaux grêles qui lui forment une tête arrondie & ſi feuillée, qu'il n'eſt pas poſſible de voir au travers. Dans cet état, il reſſemble beaucoup à nos plus beaux orangers, lorſqu'ils viennent de ſe couvrir de nouvelles feuilles.

Le *tronc* de cet arbre eſt droit, garni circulairement, ſelon M. Céré, de branches diſpoſées quatre & cinq

ensemble par étages ou verticilles écartés les uns des autres de deux ou trois pieds : ces branches s'étendent beaucoup & presqu'horizontalement ; elles ont des ramifications alternes, menues & feuillées.

L'écorce du tronc est d'un brun rougeâtre, assez unie, peu épaisse, blanche, & pleine de suc intérieurement ; celle des jeunes rameaux est d'un beau vert & luisante.

Les *feuilles* sont alternes, pétiolées, lancéolées, ovales-lancéolées, très-entières, fort lisses & d'un beau vert en dessus, d'un vert blanchâtre en dessous, avec des nervures latérales obliques, simples & presque parallèles, qui partent à droite & à gauche de la côte moyenne. Ces feuilles varient sur le même arbre dans leur forme, & sur-tout leur grandeur ; elles ont en général depuis deux pouces & demi jusqu'à six ou sept pouces de longueur, sur une largeur d'un pouce & demi à trois pouces : leur pétiole est long de cinq à sept lignes, glabre, cylindrique ou convexe en dessous, un peu aplati & canaliculé en dessus.

On n'observe aucune stipule.

Les *fleurs* sont petites, jaunâtres, pédonculées, penchées ou pendantes, & disposées dans les aisselles des feuilles, le long des petits rameaux formant de petits corymbes très-peu garnis.

Dans les INDIVIDUS MÂLES *(planche I)*, les pédoncules communs sont longs de trois ou quatre lignes, roides, comme ligneux & raboteux ; ils portent chacun deux à sept fleurs pendantes, & attachées à des pédoncules propres fort grêles, lisses, longs de six ou sept lignes. Chaque pédoncule propre est garni à son sommet d'une petite bractée orbiculaire, concave, amplexicaule, située presqu'à la base de la fleur.

Chaque fleur mâle *(fig. a & b)* offre,

1.° *Un calice (fig. A)* monophylle, un peu campanulé ou en grelot, charnu, coloré, long de deux lignes & demie, & divisé à son sommet en trois découpures ovales-pointues, demi-ouvertes.

2.° Aucune corolle.

3.° *Douze étamines* (rarement neuf) réunies par leurs filamens & leurs anthères *(fig. C)* autour d'un axe qui naît du réceptacle, en forme de colonne, à filamens fort courts, occupant le tiers inférieur de la colonne, & ne paroissant qu'un support commun des anthères à cause de leur réunion; & à anthères linéaires, longues, deux lignes, réunies autour de l'axe auquel elles semblent adnées, un peu plus longues que cet axe, & formant un corps cylindrique, sillonné par vingt quatre lignes longitudinales, chaque anthère étant à deux loges séparées par un sillon.

Dans les INDIVIDUS FEMELLES *(planche II)*, les pédoncules (dont quelques-uns se trouvent simples & uniflores) sont longs de deux ou trois lignes, assez épais, verts, glabres, chargés chacun de deux ou trois fleurs attachées à des pédoncules propres, moins grêles que ceux des fleurs mâles, & qui ont trois à cinq lignes de longueur. Ces pedoncules portent chacun une petite bractée arrondie, concave, amplexicaule, située près de la base du calice. En général, les fleurs femelles sont un peu plus courtes que les fleurs mâles.

Chaque fleur femelle *(fig. a & b)* offre,

1.° *Un calice (fig. a)* monophylle, charnu, urcéolé ou en grelot, & divisé à son sommet, comme celui de la fleur mâle, en trois découpures ovales-pointues, un peu ouvertes.

2.° Aucune corolle.

3.° Un ovaire *(fig. C)* supérieur, ovale, ou ovale-oblong, marqué d'un côté d'une raie longitudinale, dépourvu de style, & couronné par deux stigmates sessiles, courts, épais, séparés par un sillon qui se prolonge un peu plus d'un côté que de l'autre.

Le *fruit (planche II)* est une baie drupacée, presque sphérique ou un peu en forme de poire, glabre, d'un vert blanchâtre dans sa maturité, & ayant environ deux pouces & demi de diamètre. Son péricarpe est composé de trois parties distinctes; savoir, d'une écorce ou enveloppe exté-

rieure qu'on nomme *brou*, d'une enveloppe moyenne qui porte le nom de *macis ;* enfin, de l'enveloppe immédiate de la ſemence, formant la *noix* ou la coque qui contient cette ſemence.

Le *brou* ou l'enveloppe extérieure du fruit *(fig. a, b, c)*, s'ouvre par ſon ſommet en deux valves charnues *(fig. b & c)*, épaiſſes d'environ ſix lignes, ayant la chair blanche, filandreuſe, remplie d'un ſuc fort aſtringent. En s'ouvrant, ce brou laiſſe apercevoir la noix *(fig. d)* revêtue de ſon macis.

Le *macis* ou l'enveloppe moyenne placée entre le brou & la noix, eſt une membrane laciniée *(fig. e)*, comme réticulaire, d'un rouge écarlate fort vif, & qui revêt la noix *(fig. f)* en la comprimant & la ſillonnant par ſes lanières. Cette enveloppe ſingulière a la tranſparence de la corne ou d'un cartilage mince, jaunit en vieilliſſant, & devient caſſante à meſure qu'elle ſe deſsèche.

La *noix* ou l'enveloppe immédiate de la ſemence, eſt une coque mince *(fig. g)*, n'ayant qu'une demi-ligne d'épaiſſeur, dure, brune ou noirâtre à l'extérieur, griſâtre en dedans, & fragile dans l'état de deſſication.

La *ſemence* ou l'amande que l'on connoît vulgairement ſous le nom de muſcade *(fig. h & i)*, eſt groſſe, arrondie ou ovale-oblongue, & recouverte d'une peau qui eſt rouſſâtre vers le bout inférieur, blanchâtre & piquetée de points rouges vers ſon ſommet. La chair de cette ſemence eſt ferme, blanche, huileuſe, très-odorante, parſemée & traverſée de veines rameuſes, irrégulières, jaunes, graſſes, plus huileuſes que la ſubſtance blanche, & qui ſont paroître cette ſubſtance comme marbrée intérieurement.

Selon l'obſervation de M. Céré, le germe ou l'embryon eſt comme caché au gros bout de l'amande, c'eſt-à-dire à celui qui tient au pédoncule : cet embryon eſt fort petit, aplati, blanc & revêtu de ſes deux petites feuilles ſéminales.

Le muſcadier aromatique croît naturellement aux Moluques, & particulièrement dans les îles de Banda, d'où

viennent toutes les muſcades qui ſe débitent dans le monde; & l'on ſait que depuis long-temps les Hollandois ſont ſeuls en poſſeſſion de cette branche de commerce.

Mais le muſcadier eſt maintenant cultivé aux îles de France & de Bourbon avec beaucoup de ſuccès, & y donne depuis quelques années des fruits qui ne le cèdent en rien à ceux des muſcadiers des Moluques.

« Ce riche & précieux arbre, dit M. Céré, a été intro-» duit dans nos îles par M. Poivre *(a)* en 1770 & 1772. » Il ne prévoyoit pas alors qu'il fût à ſexe ſimple, & je n'en » ai fait la découverte que le 25 décembre 1776. En vain » j'ai cherché à diſtinguer par la feuille ou la manière d'être » (le port) de cet arbre, le mâle d'avec la femelle; & avant » qu'il ait fleuri, je crois qu'il ſera toujours impoſſible de le » faire.

» Cet arbre eſt continuellement en fleurs & en fruits de » tout âge, & n'éprouve qu'une effeuillaiſon ſi foible qu'elle » eſt comme inſenſible. En inciſant l'écorce du muſcadier, » en tranchant une branche, ou en détachant une feuille, il » en ſort un ſuc viſqueux, aſſez abondant, d'un rouge pâle, » & qui teint le linge d'une manière à reſter long-temps. » Cette obſervation ſe trouve auſſi conſignée dans les écrits de Valentini & de Rumphe.

Le bois du muſcadier eſt blanc, poreux, filandreux, d'une extrême légéreté. On peut en faire de petits meubles; il n'a aucune odeur.

Les feuilles vertes répandent une légère odeur de muſcade lorſqu'on les froiſſe; mais sèches & écraſées dans le creux de la main, elles ont l'odeur de celles du *ravenſara* à s'y tromper.

(a) M. Céré veut dire ſous l'adminiſtration de M. Poivre, qui, alors Intendant des îles de France & de Bourbon, & voulant procurer à ces deux colonies Françoiſes un genre de culture qui pouvoit devenir très-avantageux, envoya aux Moluques en 1769 & 1771, MM. de Tremignon & de Coëtivi, pour ſe procurer des plants des arbres à épiceries qu'on y cultive.

Le fruit, comme l'obſervent Valentini, Rumphe & M. Céré, ne parvient à l'état de maturité qu'environ neuf mois après l'épanouiſſement de la fleur qui le produit. Il reſſemble alors à une gouïave blanche, ou à une pêche brignon de groſſeur moyenne. Son brou a la chair d'une ſaveur ſi âcre & ſi aſtringente, qu'on ne ſauroit le manger cru & ſans apprêt. On le confit, on en fait des compotes & de la marmelade.

« Il y a des muſcadiers, dit M. Céré, qui donnent des » noix rondes & longues, & d'autres qui les donnent toutes » rondes.

» Les ſix premières noix muſcades aromatiques venues » au jardin du Roi de l'Iſle de France, mûrirent en décembre » 1778 & en janvier 1779. Il ne provint de ces premiers » fruits qu'un ſeul plant, qui leva vers mars 1779. J'avois » nommé cet individu femelle qui nous montra les premières » muſcades, *muſcadier royal.* Dans les premiers rapports de » cet arbre, ſes noix paroiſſoient être mêlées relativement à » leur forme; enſuite il en a montré plus de rondes que de » longues, & dans le temps de l'année où la végétation eſt » moins forte, il en produiſoit d'une forme plus décidément » longue. Il en donne donc, ſuivant mes obſervations, de » longues & de rondes, tandis qu'il exiſte au jardin du Roi » d'autres femelles les donnant conſtamment rondes & » petites.

» Le muſcadier commence à rapporter à l'âge de ſept ou » huit ans. « Il s'en trouve un ici qui, montrant ſes pre- » mières fleurs à ſix ans, donnera vraiſemblablement ſes » premiers fruits avant la ſeptième année révolue, ou plutôt » les nouera, puiſqu'il faut neuf mois à ce fruit pour être » dans ſa maturité.

» Il eſt plus avantageux, continue M. Céré, de planter » la noix muſcade nue ou dépouillée de ſa coque, qu'avec » elle, parce qu'elle germe beaucoup plus vîte, comme en » trente ou quarante jours, & que les vers n'ont pas le temps » de s'y mettre & de la dévorer.

» Lorſque

» Lorſque cette noix germe, il ſort du bout le plus gros, » qui eſt celui où tenoit le pédoncule qui l'attachoit à l'arbre, » la radicule ou le pivot à la manière de celui du gland, & » qui pointe en terre. Quand cet individu naiſſant a ſept ou » huit pouces d'accroiſſement & de longueur, la tige alors » ſort immédiatement au-deſſus de la radicule ; elle ſe montre » d'abord ſous la forme de deux petites feuilles ſéminales, & » ſon ſommet eſt d'un rouge de ſang. Bientôt cette tige a » atteint cinq à ſix pouces de hauteur, & alors elle a l'air » d'une aſperge naiſſante, excepté qu'elle eſt d'un brun foncé » & luiſant : la noix reſte à nourrir l'une & l'autre (la radi- » cule & la jeune tige), quelquefois une année entière. » *Céré, manuſcrit.*

Je ne dirai rien ſur l'emploi & ſur les qualités de la muſcade, ces objets étant ſuffiſamment connus.

Deuxième eſpèce. Muſcadier des Philippines; *myriſtica Philippenſis.*

An nux myriſtica fœmina ſ. Indorum camanza. Camell. ic. manuſ. n°. 172, *&* *nux moſchata ſ. camanza altera.* Raj. ſuppl. luz. p. 58, n°. 3 : *an nux myriſtica mas ſ. pala lacki-lacki.* Rumph. amb. 2, p. 24, t. V.

J'ai vu dans l'herbier de M. de Juſſieu, un rameau de ce muſcadier avec un fruit deſſéché qui n'y étoit plus adhérent. Ce rameau fait partie d'un herbier des Philippines, donné à Commerſon par M. Sonnerat, & paroît appartenir à un muſcadier bien diſtingué de la première eſpèce, par ſes fruits veloutés ou cotonneux à l'extérieur, & de l'eſpèce qui ſuit par la grandeur de ſes feuilles. Le rameau que j'ai examiné eſt épais, roide, cylindrique, légèrement velouté à ſon ſommet; ſes feuilles ſont alternes, grandes, ovales-oblongues, munies d'une pointe courte, entières, glabres, liſſes en deſſus, & très-nerveuſes en deſſous: leurs nervures latérales ſont ſimples, parallèles, & au nombre de dix-huit ou environ de chaque côté. Ces feuilles ont près d'un pied de longueur, ſur une largeur de quatre à cinq pouces, & ſont portées chacune ſur un pétiole épais,

un peu court, canaliculé en deſſus, & convexe en deſſous. Le fruit paroît arrondi ou ovoïde, & a ſon brou rouſſâtre, tomenteux ou velouté, & ridé par l'effet de la deſſiccation. Il eſt attaché latéralement au rameau par un pédoncule ſimple, épais, long d'un pouce ou un peu plus.

Troiſième eſpèce. Muſcadier de Malabar, *myriſtica Malabarica.*

Panam-palca. Rheed. mal. 4, p. 9, t. V: *nux Indica oblonga intreſecus ſimilis nuci moſchatæ.* J. B. hiſt. 1, p. 399: *nux myriſtica major ſpuria Malabarica.* Raj. hiſt. 1524: *nux myriſtica ſpuria.* Pluk alm. 265.

Il ſe pourroit que ce muſcadier ne ſoit que médiocrement diſtingué de celui des Philippines dont je viens de faire mention. Néanmoins, ſi la figure & les détails qu'en donne Rheede, ſont bien exacts, il n'y a point de doute qu'il n'en ſoit très-différent. Ses feuilles paroiſſent moins grandes, & de forme plutôt ovale qu'oblongue; ſes pédoncules ſont paniculés; enfin, ſes fruits ſont oblongs, tomenteux, & ne ſont point du tout aromatiques. Au reſte, ne le connoiſſant pas directement, comme les autres, j'ai trouvé plus convenable d'en faire mention ſéparément, que de le citer comme une variété du muſcadier des Philippines, avec lequel il ſemble avoir des rapports, pouvant en être malgré cela conſtamment diſtinct.

Quatrième eſpèce. Muſcadier globulaire, *myriſtica globularia.* Pl. V.

An palala quinta ſ. globularia. Rumph. amb. 2, p. 28, t. IX. Petit muſcadier ſauvage ou muſcadier globulaire. *Sonnerat, herb.*

J'ai reçu de M. Sonnerat divers exemplaires de ce muſcadier, tous en fleurs ſeulement, & contenus dans un herbier fait dans l'île de Java; c'eſt peut-être le *palala minima*, ou muſcadier ſauvage du catalogue manuſcrit de M. Céré, & dans ce cas, ce muſcadier ſeroit maintenant cultivé au jardin du Roi à l'Iſle de France. Il conſtitue une eſpèce qui me ſemble bien diſtinguée des autres par ſon

feuillage, & qui eſt ſur-tout remarquable par le caractère de ſes fleurs mâles, leurs étamines ayant leurs anthères libres, & ſeulement au nombre de neuf.

Ce muſcadier paroît ne former qu'un arbriſſeau peu élevé, mais fort rameux. Ses rameaux ſont cylindriques, diviſés, abondamment feuillés & veloutés, ou légèrement cotonneux dans leur partie ſupérieure. Ses feuilles ſont alternes, pétiolées, étroites-lancéolées, preſque ſemblables à celles du ſaule, pointues, entières, liſſes, vertes & luiſantes en deſſus, un peu glauques en deſſous, ſur-tout dans leur jeuneſſe; elles ont trois pouces ou trois pouces & demi de longueur, ſur une largeur de ſix à huit lignes.

Les pédoncules ſont axillaires, fort courts, épais, ridés, ou comme écailleux, cotonneux & rouſſâtres, & portent chacun trois à ſept fleurs diſpoſées comme en ombelle. Ces fleurs (*fig. a*) ſont fort petites, pédicellées, globuleuſes, cotonneuſes & rouſſâtres en dehors, & à calice trifide, comme dans les autres eſpèces.

Les mâles conſiſtent, 1.° en un calice monophylle, globuleux, diviſé en trois découpures un peu plus larges que longues, légèrement pointues & peu ouvertes; 2.° en neuf étamines non saillantes hors du calice, & réunies par leurs filamens autour d'un axe aſſez épais, trigone, qui s'élève du réceptacle au centre de la fleur. Les anthères ſont ovales, didymes, libres, & font une légère ſaillie au-deſſus de l'axe qu'elles paroiſſent couronner. Il y a apparence que le fruit de ce muſcadier eſt fort petit, & ſphérique ou globuleux, l'ovaire dans les fleurs femelles ayant cette forme, ſelon un deſſin communiqué par M. Sonnerat.

Cinquième eſpèce. Muſcadier de Madagaſcar; *myriſtica Madagaſcarienſis.* Pl. IV.

Rara-hourak ou grand muſcadier ſauvage de Madagaſcar. *Sonner. herb. & Céré, cat. manuſ.*

C'eſt principalement dans la forme des nervures des feuilles, qu'on trouve la diſtinction la plus remarquable de cette eſpèce. En outre, les ramifications alternes & ſimples

des pédoncules de ses fleurs, paroissent lui être particulières, & la font aisément reconnoître.

Il paroît, d'après le nom qu'on donne à ce muscadier, qu'il constitue un arbre, ou au moins un arbrisseau plus grand que celui qui précède; aussi ses feuilles sont-elles plus grandes & sur-tout beaucoup plus larges. Ses rameaux sont cylindriques, glabres & d'un brun roussâtre; les feuilles sont alternes, pétiolées, ovales, un peu pointues, entières, glabres des deux côtés dans leur entier développement, & remarquables par leurs nervures latérales fort rameuses. Ces feuilles sont lisses & d'un vert foncé en dessus, un peu roussâtres en dessous, & ont quatre à cinq pouces de longueur, sur une largeur de deux pouces ou un peu plus: leurs pétioles sont canaliculés en dessus, & longs d'environ six lignes; les pédoncules sont axillaires, veloutés, roussâtres, & divisés en ramifications alternes & distiques, sur lesquelles naissent de petites fleurs sessiles, cotonneuses & roussâtres comme les pédoncules. Le fruit est ovale, & couvert d'un duvet ferrugineux.

Ce muscadier croît naturellement dans l'île de Madagascar, & est cultivé au jardin du Roi à l'Isle de France. J'en ai reçu de M. Sonnerat, des rameaux garnis de fleurs naissantes; & j'en ai vu chez M. de Jussieu, des rameaux munis de jeunes fruits, qui lui ont été communiqués par M. Poivre.

Sixième espèce. Muscadier acuminé; *myristica acuminata.*

Malao-manguit, espèce de rara. *Poivre, herb. de Madagascar.*

Ses feuilles ont leurs nervures latérales rameuses comme celles du muscadier précédent, mais elles sont plus petites, & acuminées d'une manière remarquable; elles sont vertes & un peu luisantes en dessus, blanchâtres en dessous, sans être cotonneuses, & ressemblent assez à des feuilles de poirier; leur côte moyenne est saillante en dessous, & forme en dessus un canal assez profond: les rameaux sont glabres.

Ce muscadier croît, comme le précédent, dans l'île de

Madagafcar : j'en ai vu chez M. de Juffieu deux petits rameaux communiqués par M. Poivre. Ces rameaux font dépourvus de fructification ; mais on voit dans les aiffelles de leurs feuilles des pédoncules naiffans fort courts, veloutés & ferrugineux.

Septième efpèce. Mufcadier porte-fuif; *myriftica febifera. Virola febifera.* Aubl. Guian. p. 904, t. *CCCXLV*, le *voirouchi* des Caraïbes, & le *jejemadou* des Créoles.

Il n'y a point de doute que l'arbre dont il s'agit ici, ne foit une véritable efpèce de mufcadier, comme l'a penfé Aublet, qui cependant lui a donné un nom générique particulier. Il en a en effet tous les caractères effentiels, foit dans la fleur, foit dans le fruit ; mais les fleurs mâles moins monadelphiques que dans les autres efpèces, n'ont que fix étamines ; différence numérique qui n'eft point effentielle, puifque dans le mufcadier globulaire, *n.° 4*, les fleurs mâles n'ont que neuf étamines qui ne font réunies que par leurs filamens, tandis que dans le mufcadier aromatique elles en ont jufqu'à douze, lefquelles font réunies & par leurs filamens & par leurs anthères. La production en forme de colonne, qui naît du difque de ces mêmes fleurs mâles, & autour de laquelle les étamines font rapprochées ou réunies dans les autres efpèces, fe retrouve encore dans celle-ci, quoique fort petite, comme on le voit dans la figure citée ; mais Aublet ne l'indique pas clairement dans fa defcription.

Les mufcadiers des Indes orientales & des Moluques ont, comme il a été dit, leurs parties pleines d'un fuc propre fort âcre & de couleur rouge ; c'eft auffi ce qu'on obferve dans l'efpèce dont il eft maintenant queftion. Enfin, le duvet court & ferrugineux qu'on trouve fur les jeunes parties des autres mufcadiers, fe remarque encore dans celui-ci, & même en plus grande abondance que dans les autres ; car les rameaux, le deffous des feuilles, les pédoncules & les fruits en font couverts d'une manière remarquable dans les individus de mon herbier.

Je poſsède les fruits de cet arbre, que M. de Juſſieu a bien voulu me communiquer ; & depuis j'ai reçu du même arbre une branche garnie de feuilles & de pluſieurs fruits qui y ſont encore attachés : elle a été recueillie dans l'île de Cayenne par M. Stoupy, récemment arrivé de cette contrée de l'Amérique, d'où il a rapporté un aſſez grand nombre de plantes, la plupart fort rares.

Je ne rapporterai point ici la deſcription qu'Aublet a donnée de ce muſcadier ; elle me paroît exacte, ſur-tout d'après l'examen que j'ai fait des parties de cet arbre que je poſsède, & qui m'ont préſenté les mêmes caractères que ceux dont Aublet a fait mention.

Au reſte, il paroît qu'il exiſte quatre variétés de cette eſpèce, leſquelles ſont peut-être quatre eſpèces diſtinctes ; ſavoir, 1.° une variété à fruits couverts d'un duvet rouſſâtre (c'eſt celle que je poſsède & dont j'ai traité) ; 2.° une variété à gros fruits glabres. *(Aubl. t. CCCXLV. n.os 6 & 7)* ; 3°. une variété à petits fruits glabres (c'eſt celle qu'Aublet a figurée, & dont les fruits ſont repréſentés aux *n.os 4 & 5)* ; 4.° enfin, une variété fort remarquable par le prolongement latéral de chaque valve du brou, prolongement qui donne aux fruits une forme alongée tranſverſalement. *(Aubl. t. CCCXLV, fig. 8 & 9).* Si la forme ſingulière de ces fruits eſt conſtante, le muſcadier qui les produit devra être regardé comme une véritable eſpèce.

On tire des ſemences de cet arbre une réſine d'un blanc jaunâtre, graſſe, en quelque ſorte ſemblable à du ſuif, & avec laquelle on fait des chandelles dans le pays. J'ai vu une de ces chandelles, que M. Stoupy a rapportée de Cayenne.

Huitième eſpèce. Muſcadier uviforme ; *myriſtica uviformis.*

Je ne connois de cette plante que quelques rameaux chargés de fruits, que M. Sonnerat m'a communiqués ſans aucun nom, qu'il a rapportés des Moluques, & que j'ai cru pouvoir rapporter à ce genre, d'après les caractères que m'ont préſentés ſes fruits ; mais la petiteſſe de ces mêmes

fruits qui égalent à peine en grosseur les grains du raisin ordinaire, & en même temps leur grand nombre & leur rapprochement, rendent cette espèce fort remarquable, & peut-être douteuse. Je soupçonne néanmoins que c'est une de celles que Rumphe a mentionnées sous le chapitre intitulé : *palalæ reliquæ minores.* (Herb. amb. 2, p. 27) : peut-être même est-ce son *palala tertia* qu'il appelle encore *palala minima & palala tingens*, & qu'il a figuré *(loc. cit. tab. 7);* mais les fruits étant un peu en pointe aux deux bouts, comme il le dit aussi dans sa description, sont représentés trop obtus dans la figure dont il s'agit.

Les rameaux que je possède sont ligneux, cylindriques, nus dans leur partie inférieure, feuillés & un peu velus vers leur sommet. Les feuilles sont alternes, pétiolées, lancéolées, pointues, ondées sur les bords, glabres en dessus, & un peu velues en dessous, principalement sur leurs nervures; elles sont longues de trois pouces ou trois pouces & demi, sur une largeur d'un pouce & demi ou davantage : leurs pétioles sont légèrement canaliculés en dessus, & ont deux petites callosités près de leur sommet.

Les fruits naissent en assez grand nombre sur des grappes latérales fort courtes, quelquefois axillaires, & plus souvent situées en abondance sur la partie nue des rameaux. Ces fruits sont petits comme des grains de raisin, nombreux & serrés sur les grappes qui les portent; ils sont ovales, un peu en pointe aux deux bouts, sessiles sur les pédoncules communs, glabres, de couleur brune, & conservent à leur sommet le stigmate. Ce stigmate paroît quadrifide, lorsque leur brou, qui est sec & coriace, s'est partagé en deux : ces fruits n'ont que cinq lignes de longueur; sous leur brou est une coque mince, fragile, monosperme, & sur laquelle j'ai cru apercevoir des traces d'un macis desséché, d'un rouge-brun, & comme adhérent à la coque.

Il existe vraisemblablement encore d'autres espèces de ce

beau genre de plante, comme l'indiquent l'ouvrage de Rumphe, & le catalogue du jardin du Roi à l'Isle de France, par M. Céré; mais ne les connoissant point, je ne puis en donner les caractères distinctifs.



RECHERCHES



Fossier del. *J. Le Gouaz sculp.*





Fossier del.

Y. Le Gouaz sc.





Fossier del. Y Le Gouaz sculp



Y. Le Gouaz sculp.


a
b
c
d
e
f
g
h
i



Fossier del *Y. Le Gouaz sculp*



RECHERCHES

Sur l'espèce d'Acier la plus propre à recevoir la vertu magnétique.

Par M. BRISSON.

LES physiciens se sont donné bien des soins, & ont fait beaucoup de recherches pour parvenir à connoître la meilleur méthode de toucher les barreaux d'acier, pour en faire des aimans artificiels; mais je ne sache pas qu'on ait cherché à connoître, comparativement les unes aux autres, l'espèce d'acier la plus propre à cet effet, l'espèce susceptible de recevoir la plus grande vertu magnétique: c'est de cette recherche dont je me suis occupé, & dont je vais rendre compte à l'Académie.

J'ai fait faire par un excellent artiste *(a)*, & qui sait très-bien travailler & tremper l'acier, cinq paires de barreaux de différentes espèces d'acier; tous parfaitement égaux en longueur, en largeur, en épaisseur, & même en poids à quelques grains près; tous également bien dressés & polis autant qu'il a été possible, tous trempés de tout leur dur. Chacun de ces barreaux a 6 pouces $\frac{1}{4}$ de ligne de long, 6 lignes de large & 2 lignes d'épaisseur. Je les ai placés deux à deux à la manière de M. *Knight*, en les séparant par une règle de bois, & les faisant communiquer, à chacune de leurs extrémités, par un contact de fer doux de 9 lignes de largeur.

Pour ne pas les confondre, je les ai tous fait marquer d'un numéro.

Les barreaux, *n.º 1*, sont d'acier fondu d'Angleterre, & pèsent ensemble 5 onces 4 gros 51 grains.

(a) Le sieur Feuillet, arquebusier.

Les barreaux, *n.° 2*, sont d'acier fondu d'Amboise, & pèsent ensemble 5 onces 4 gros 57 $\frac{1}{2}$ grains.

Les barreaux, *n.° 3*, sont d'acier moyen d'Amboise, & pèsent ensemble 5 onces 4 gros 46 $\frac{1}{2}$ grains.

Les barreaux, *n.° 4*, sont d'acier d'Allemagne, connu sous le nom d'*étoffe de Pons*, & pèsent ensemble 5 onces 4 gros 53 grains.

Les barreaux, *n.° 5*, sont d'acier d'Angleterre, & pèsent ensemble 5 onces 4 gros 40 grains.

J'ai deux paires de barreaux de 17 pouces 6 lignes de long, 1 pouce de large & 6 lignes d'épaisseur, très-forts, & dans lesquels je ranime encore la vertu magnétique, en les touchant alternativement les uns par les autres. C'est avec une paire de ces barreaux que j'ai touché les cinq paires ci-dessus. Je me suis toujours servi de la même paire, également bien préparée; c'est-à-dire, retouchée à chaque fois par l'autre grande paire, afin d'avoir, le plus qu'il seroit possible, égalité en tout, & de ne craindre d'autre variation que la différence de disposition, dans les différentes espèces d'acier, à recevoir la vertu magnétique.

J'ai touché tous ces barreaux à la manière de M. *Antheaume*. Je les ai donc placés, paire à paire, réunis par leurs contacts & séparés longitudinalement par une règle de bois, dans la direction du méridien magnétique; & pour les toucher, j'ai mis, bout à bout l'un de l'autre, mes deux grands barreaux, se présentant l'un à l'autre par leurs poles de différens noms, & séparés seulement par une carte pliée en trois; & je les ai fait glisser doucement cinq fois, d'allée & de venue, d'un bout à l'autre de chacun des barreaux, & sur chacune des faces larges, sans sortir au-delà de leurs extrémités, en commençant & finissant par le milieu.

Ces barreaux ayant été ainsi touchés, j'ai cherché à connoître leur force attractive; pour cela, je les ai attachés ensemble par le moyen de deux liens de cuivre, garnis chacun d'une vis de pression, & dont l'un porte une belière

destinée à les accrocher à un support. À la partie supérieure, les deux barreaux étoient réunis par leur contact de fer doux; & à la partie inférieure, au lieu du contact, j'ai placé un portant de fer doux, arrondi de manière à ne toucher les barreaux que par une ligne étroite. À ce portant est adapté un crochet destiné à recevoir la belière d'un seau de fer-blanc qui porte les poids. Tout cela ainsi disposé, j'ai chargé successivement & peu-à-peu chaque paire de barreaux avec des grains de plomb, jusqu'à ce que le portant s'en détachât. J'ai eu soin de ne les charger ainsi qu'après les avoir laissé mordre leur portant pendant 24 heures.

Voici maintenant les résultats de ces expériences.

Les barreaux, *n.° 1*, d'acier fondu d'Angleterre, qui pèsent ensemble 5 onces 4 gros 51 grains, ont porté, y compris le poids du portant, 2 livres 13 onces 5 gros; ce qui est un peu plus de 8 fois leur poids.

Les barreaux, *n.° 2*, d'acier fondu d'Amboise, qui pèsent ensemble 5 onces 4 gros 57 $\frac{1}{2}$ grains, ont porté, y compris le poids du portant, 1 livre 12 onces 2 gros 36 grains; ce qui est un peu plus de 5 fois leur poids.

Les barreaux, *n.° 3*, d'acier moyen d'Amboise, qui pèsent ensemble 5 onces 4 gros 46 $\frac{1}{2}$ grains, ont porté, y compris le poids du portant, 5 onces 7 gros 57 grains; ce qui n'est, comme l'on voit, qu'un peu plus de une fois leur poids.

Les barreaux, *n.° 4*, d'acier d'Allemagne, connu sous le nom *d'étoffe de Pons*, qui pèsent ensemble 5 onces 4 gros 53 grains, ont porté, y compris le poids du portant, 4 livres 3 onces 3 gros 3 grains; ce qui est un peu plus de 12 fois leur poids.

Les barreaux, *n.° 5*, d'acier d'Angleterre, qui pèsent ensemble 5 onces 4 gros 40 grains, ont porté, y compris le poids du portant, 4 livres 15 onces 1 gros 36 grains; ce qui est plus de quatorze fois leur poids.

Il suit de-là, 1.° que l'acier d'Angleterre est le plus propre

à recevoir la vertu magnétique, & qu'il doit être préféré à toutes les autres eſpèces.

2.° Que l'acier d'Allemagne, connu ſous le nom *d'étoffe de Pons*, eſt le meilleur après l'acier d'Angleterre, puiſque ſa vertu attractive ne diffère que de $\frac{1}{7}$ de celle de ce dernier.

3.° Que les aciers fondus ne doivent point être employés à faire des aimans artificiels; car ils ne reçoivent que peu de vertu magnétique.



CONJONCTION INFÉRIEURE DE VÉNUS,

Le 7 Août 1788;

Avec une nouvelle détermination de l'aphélie de Vénus & de son moyen mouvement.

Par M. DE LA LANDE.

CETTE conjonction est une des plus importantes de toutes celles de Vénus, parce qu'elle arrive près de l'aphélie, & cependant elle n'avoit jamais été bien observée qu'une fois; savoir, en 1780 (*Mémoires de l'Académie, 1785, page 259*). J'étois donc très-impatient d'avoir celle de 1788, pour vérifier mes nouvelles Tables de Vénus, qui sont dans la Connoissance des Temps de 1789. Ce sont les seules qui représentent bien les conjonctions inférieures observées jusqu'ici avec le plus de soin; & comme ces observations sont les plus concluantes, & les plus propres à faire juger de l'exactitude des Tables, j'ai lieu de croire les miennes aussi exactes qu'il est possible de les avoir jusqu'à présent.

Cette conjonction de 1788 est arrivée dans le temps que je visitois les grands observatoires d'Angleterre; j'ai eu la satisfaction de l'observer le 3 Août, avec Milord Duc de Marlborough, le plus illustre amateur de l'astronomie, dans le bel observatoire qu'il a consacré à l'astronomie, dans son superbe château de Blenheim. Le lendemain 4, j'observai Vénus avec M. Hornsby, qui possède les plus grands & les plus beaux instrumens, dans le nouvel observatoire d'Oxford, bâti avec autant de magnificence que de commodité. Le 8, j'allai à l'observatoire royal de

Greenwich, pour obſerver Vénus avec M. Maskelyne, aſtronome royal d'Angleterre, mais le ciel fut couvert. Au reſte, ils ont bien voulu m'envoyer tous les trois les obſervations des jours qui ont précédé ou ſuivi la conjonction, & je les rapporterai ci-après.

J'ai reçu auſſi des obſervations de M. Cagnoli, faites à Vérone, de M. de Ceſaris à Milan, de M. Mateucci à Bologne, de M. Chiminello à Padoue. Je les avois priés tous de s'y rendre attentiſs, de peur que le mauvais temps ne nous privât en France & en Angleterre de cette importante obſervation ; mais elle a réuſſi par-tout, & ce ſera pour l'avenir une baſe de la théorie de Vénus, & de toutes les recherches qu'on pourra faire pour l'orbite de cette planète.

Je me ſuis ſervi des nouvelles Tables du Soleil que M. de Lambre vient de calculer avec un ſoin & une exactitude inconnus juſqu'à préſent, les obſervations même que je rapporte en prouvent l'exactitude.

Voici l'erreur de ces Tables par le moyen des paſſages du Soleil & de pluſieurs étoiles obſervés à Greenwich & à Oxford. Les longitudes obſervées ſont pour le midi vrai du lieu où l'obſervation a été faite.

1788.	LONGITUDE obſervée à midi.				EXCÈS du calcul.		
	S.	*D.*	*M.*	*S.*	*S.*		
3 Août.	4	11	41	2,2	− 0,2	Greenwich.	Procyon, Pollux, l'Épi.
4	4	12	38	38,4	+ 6,9	Oxford.	*Arcturus.*
12	4	20	19	15,0	+ 2,4	Greenwich.	Procyon, Pollux.
12	4	20	19	28,5	+ 0,8	Oxford.	β Taureau, α Orion, Procyon.

Au reſte, l'erreur de ces Tables, vérifiée ſur plus de trois cents obſervations de M. Maskelyne, ne va jamais à 10″.

Observations faites au château de Blenheim, par Milord Duc de Marlborough.

		PASSAGE au méridien en temps de la pendule.	DISTANCE au zénith du bord supérieur de Vénus.	Baromèt.	Therm intér.	Therm extér.
1.er Août.	α d'Orion....	5h 44′ 2″,5				
2	Vénus, 1.er bord.	9. 18. 46,98	43d 9′ 14″,9	30p 15	65d 2/3	66d 1/3
	α de la Couronne.	15. 26. 3,50				
	α du Serpent...	15. 34. 11,22				
	La Chèvre....	5. 1. 23,90				
	Rigel........	5. 4. 40,76				
	β du Taureau...	5. 13. 14,40				
	α d'Orion.....	5. 44. 1,60				
	Pollux.......	7. 32. 38,60				
3 Août.	Vénus, 1.er bord.	9. 16. 23,04	43. 8. 50,7	30. 14	69 1/2	73.
	α de la Cour. B.	15. 26. 2,54				
	La Chèvre....	5. 1. 23,10				
	Rigel........	5. 4. 39,90				
	β du Taureau...	5. 13. 13,50				
	Castor.......	7. 21. 21,50				
	Pollux.......	7. 32. 37,80				
4 Août.	♀ premier bord.	9. 13. 55,65	43. 7. 52,4	30. 10	72.	78.
	α de la Cour. B.	15. 26. 1,60				
6	Vénus, 1.er bord.	9. 8. 55,00	43. 3. 19,3	29. 89	62.	61 1/2
	α de la Cour. B.	15. 26. 00,40				

La différence des méridiens entre Paris & Blenheim est de 14′ 45″ qu'il faut ajouter au temps de Blenheim pour avoir celui de Paris.

L'erreur du mural est de 8″,2 qu'il faut ôter des distances au zénith.

La latitude de Blenheim est de 51d 50′ 26″,0 nord.

Nous parlerons ci-après du baromètre & du thermomètre.

Observations faites à Oxford, par M. Hornsby.

	TEMPS de la pendule.		DISTANCES au zénith.	Baromèt.	Therm.	Therm.
1.er Août	4h 23' 53",55	Aldebaran.	35d 41' 7",8	30p 32.	57d	64d
	5. 4. 27,64	Rigel.				
	5. 13. 1,11	β du Taureau. . .				
	5. 43. 48,47	α d'Orion.	44. 23. 52 Bord inférieur.	30. 32.	60.	64 1/4
2 Août	8. 52. 49,32	Centre du Soleil.	34. 27. 24,4 Bord supérieur.	30. 33.	65 1/4	67
	9. 18. 33,33	Vénus, 1.er bord.	43. 4. 43,1	30. 33.	65 3/4	67 1/2
	13. 14. 9,49	L'Épi.				
	14. 6. 6,29	*Arcturus*.				
	4. 23. 52,58	Aldebaran.	35. 41. 9,9	30. 29.	58.	64
	5. 4. 26,77	Rigel.				
	5. 43. 47,42	α d'Orion.				

La pendule retarde de 0",92 par jour.

3 Août	14h 6' 5",65	*Arcturus*.				
	4. 23. 50,90	Aldebaran.	35d 41' 10",9	30. 27.	61.	65 3/4
	5. 4. 25,13	Rigel.				
	5. 12. 58,43	β du Taureau. . .				
	5. 43. 45,64	α d'Orion.	44. 23. 55,	30. 27.	65.	67 1/4
4	9. 0. 29,42	Centre du Sol. .	Bord supérieur.			
	9. 13. 40,89	Vénus, 1.er bord.	43. 3. 26,9	30. 25 1/2	75 1/4	71.
	14. 6. 3,43	*Arcturus*.				

La pendule retarde de 1",62 par jour; on l'a changée après cette observation.

11 Août	5h 12' 42",21	β du Taureau. . .				
	5. 43. 29,30	α d'Orion.				
	7. 27. 58,70	Procyon.				
	8. 53. 44,42	Vénus, 2.d bord.	42d 29' 11",2	29. 72.	68.	64 3/4
12 Août	9. 30. 41,25	Centre du Sol. .				
	4. 23. 36,30	Aldebaran.	35. 41. 7,0	29. 41.	59	63 1/4

12 Août.

	TEMPS de la pendule.		DISTANCES au zénith.	Baromètr.	[illegible]	[illegible]
12 Août	5h 4' 10",39	Rigel.				
	5. 12. 44,12	β du Taureau. . .				
	5. 43. 31,43	α d'Orion.	44d 23' 52",0	29p 40.	61d $\frac{1}{4}$	64d
	7. 28. 0,60	Procyon.				
	8. 51. 30,42	Vénus, 2.d bord.	42. 22. 19,1 b. sup.	29. 38.	66 $\frac{3}{4}$	66 $\frac{1}{3}$
13	8. 49. 21,48	Vénus, 2.d bord.	42. 15. 8,3	29. 19.	61 $\frac{1}{4}$	62 $\frac{2}{3}$
	La pendule avance de 1",98 par jour.					
14 Août.	14. 5. 51,40	*Arcturus*.				
	4. 23. 38,84	Aldebaran.	35. 41. 6,8	29. 43.	54 $\frac{2}{3}$	59 $\frac{1}{2}$
	5. 12. 46,74	β du Taureau. . .				
	5. 43. 33,53	α d'Orion.	44. 23. 53,1 Bord supérieur.	29. 48.	57 $\frac{2}{3}$	60 $\frac{1}{3}$
	8. 47. 16,99	Vénus, 2.d bord.	42. 7. 35,9 Bord inférieur.	29. 44.	62.	62 $\frac{3}{4}$
15	9. 42. 1,34	Centre du Soleil.	38. 13. 19,0	29. 44 $\frac{1}{2}$	62 $\frac{3}{4}$	64.
	14. 5. 51,17	*Arcturus*.				
	4. 23. 38,28	Aldebaran.	35. 41. 5,8	29. 56.	54 $\frac{3}{4}$	59 $\frac{1}{3}$
	5. 4. 12,52	Rigel.				
	5. 12. 46,05	β du Taureau. . .				
	La pendule retarde de 0",60 par jour. Les observations suivantes ont été faites avec une autre pendule.					
18 Août.	5. 4. 10,34	Rigel.				
	5. 12. 43,86	β du Taureau. . .				
		α d'Orion.	44. 23. 51,2.	29. 52.	57.	61.
	6. 35. 36,67	*Sirius*.				
	7. 28. 0,15	Procyon				
19	9. 56. 52,34	Centre du Soleil.	39. 30. 51,0 b inf.	29. 50.	65 $\frac{1}{4}$	64 $\frac{2}{3}$
	5. 43. 31,31	α d'Orion.				
	6, 35. 35,98	*Sirius*. . . . . . .//				
	8. 38. 43,13	Vénus, 2.d bord.	41. 26. 44,1 b. sup.	29. 69.	61 $\frac{3}{4}$	64 $\frac{1}{2}$
20	10. 0. 34,01	Centre du Soleil.	39. 19. 0,3 b. sup.	29. 69.	69 $\frac{1}{2}$	65 $\frac{1}{4}$
	La pendule retarde de 0",75 par jour.					

Les centièmes de secondes que l'on voit dans les temps des passages, sont donnés par le milieu, que M. Hornsby prend toujours entre cinq fils, dont les deux qui précèdent le méridien & les deux qui le suivent sont réduits au milieu. Les distances au zénith sont affectées de l'erreur du mural; mais les distances des étoiles au zénith suffisent pour la trouver. La hauteur du baromètre est en pouces Anglois & centièmes de pouces; 29 pouces font 27 p. 2 lignes 56 de France, & les 30 pouces font 28 p. 1 li. 79. Les degrés du thermomètre Anglois sont tels, que 60 répondent à 12 $\frac{1}{2}$ du thermomètre François, & 75 à 19 du nôtre. La latitude d'Oxford est $51^{d} 45' 40''$; & il est $0^{h} 14' 22''$ à l'occident du méridien de Paris.

Observations faites à Greenwich, par M. Maskelyne, Astronome Royal d'Angleterre.

	PASSAGE en temps de la pendule.				DISTANCES au zénith, observées.			
	H.	*M.*	*S.*		*D.*	*M.*	*S.*	
Le 2 Août.	7.	28.	19,24	Procyon......				
	7.	32.	27,10	Pollux.......				
3	8.	56.	41,97	Centre du Soleil.				
	9.	16.	12,60	Vénus, 1.er bord.	42.	46.	53,2.	b. supér.
	13.	14.	11,18	L'Épi de la V...	Réfract.	51,9.		
	14.	6.	8,20	*Arcturus*......				
	La pendule avance de 0",32 par jour.							
Le 10 Août.	8.	56.	29,98	Vénus, 2.d bord	42.	17.	55,9	b. supér.
11	9.	27.	18,16	Centre du Soleil	Réfract.	51,1.		
	17.	25.	19,00	α d'*Ophiucus*...				
	4.	23.	58,99	Aldebaran.....				
	6.	36.	59,48	*Sirius*........				
	7.	21.	14,82	Castor........				
	7.	28.	23,32	Procyon......				
	7.	37.	31,16	Pollux.......				
	8.	54.	9,16	Vénus, 2.d bord.	42.	11.	45.	b. supér.
Le 12	9.	31.	4,98	Centre du Soleil.	Réfract.	50,3.		
	La pendule avance de 0",37 par jour.							

Il faut ajouter 4″,2 à toutes les diſtances au zénith que donne le mural.

La latitude eſt de 51ᵈ 28′ 40″, la différence des méridiens, 9′ 21″ par le réſultat des triangles que M. le général Roy venoit de terminer, & qu'il m'a communiqué en Angleterre.

J'ai calculé une partie des obſervations précédentes, & je les ai comparées avec le calcul fait ſur mes Tables; on en voit ici l'erreur, c'eſt-à-dire, ce qu'il faut ôter du calcul ou y ajouter pour avoir le lieu obſervé.

1788.	TEMPS MOYEN, à Paris.	LONGITUDE GÉOCENTRIQUE, obſervée.	LATITUDE GÉOCENTR. obſervée.	ERREURS DES TABLES, en long.	en latit.	LIEUX des Obſervations.
	H. M. S.	*S. D. M. S.*	*D. M. S.*	*S.*	*S.*	
2 Août.	0. 46. 11	4. 19. 18. 57 ½	6. 42. 05 ½ A	— 14	+ 22	à Blenheim.
3	0. 34. 30	4. 18. 45. 6 ½	6. 52. 21	14	+ 9 ½	à Greenwich.
4	0. 33. 8	4. 18. 9. 52	7. 2. 34	19	+ 31	à Oxford.
6	0. 20. 43	4. 16. 57. 18 ½	7. 20. 5	23	+ 25	à Blenheim.
10	23. 43. 20	4. 13. 53. 7 ½	7. 50. 17 ½	35	+ 16	à Greenwich.
11	23. 42. 3	4. 13. 17. 34 ½	7. 54. 7	31 ½	+ 25 ½	à Oxford.
12	23. 35. 52	4. 12. 43. 6 ½	7. 56. 43 ½	24	+ 31	à Oxford.
14	23. 23. 45	4. 11. 37. 51 ½	7. 59. 46	31	+ 29	à Oxford.

Pour déduire de ces obſervations le temps de la conjonction, j'ai ſuppoſé l'erreur moyenne 24″ en longitude, que j'ai ôtées des lieux calculés les 6 & 10 ſans aberration, & comptés de l'équinoxe moyen; je les ai comparés aux lieux du Soleil corrigés par l'aberration, & comptés auſſi de l'équinoxe moyen, & j'ai trouvé la conjonction vraie le 7, à 12ʰ 34′ 4″ temps moyen à Paris, la longitude 10ſ 16ᵈ 0′ 51″.

M. de Ceſaris, dans les Éphémérides de Milan pour 1790, rapporte les obſervations de cette conjonction avec le calcul qu'il en a fait, & il trouve la conjonction, le 7 à 13ʰ 3′42″,

temps moyen à Milan ; la longitude héliocentrique vraie étant 10^s 16^d 0′ 51″ *(page 80)*. Il a eu égard à l'aberration & à la nutation pour le Soleil & pour Vénus.

La latitude de Vénus calculée par les Tables, suppose l'inclinaison, 3^d 23′ 20″ comme elle étoit dans mes Tables de 1771 ; mais elle m'a paru de 3^d 23′ 35″ par plusieurs observations *(Mémoires 1785, p. 266)*; ainsi il y auroit 14″ de plus pour la latitude héliocentrique, 36″ de plus pour la latitude géocentrique. En calculant cette latitude par les Tables, je trouve pour l'heure de la conjonction, 7^d 31′ 2″; & supposant l'erreur de 21″, j'ai pour la latitude observée, 7^d 31′23″. Suivant cette observation, il y auroit 5″ à ôter de l'inclinaison 3^d 23′ 35″ que j'avois trouvée par les observations des dernières conjonctions de Vénus, & l'inclinaison seroit de 3^d 23′ 30″. M. Bugge trouve l'inclinaison par les observations, de 1781, 3^d 23′ 39″; par celles de 1783, 41″; par celles de 1786, 36″; par le milieu de trente observations faites en différentes années, 3^d 23′ 39″. Elle est dans mes Tables, 3^d 23′ 35″.

Le mouvement de Vénus n'étant pas uniforme dans un intervalle de cinq jours, il ne suffisoit pas d'une simple proportion pour trouver la conjonction ; & lorsque je l'ai eu trouvée de cette manière j'ai recalculé le lieu du Soleil & de Vénus, pour tenir compte de l'inégalité du mouvement de Vénus d'un jour à l'autre aux environs de la conjonction.

Pour la bien connoître j'ai pris les passages au méridien observés à Greenwich le 3 & le 10, j'en ai conclu les intermédiaires par les observations de M. Cagnoli, & j'ai calculé par les Tables le lieu de Vénus pour chaque jour à l'heure du passage au méridien de Greenwich, & la latitude géocentrique aussi par les Tables, qui supposent l'inclinaison de 3^d 23′ 20″. Ces latitudes devroient être augmentées d'environ 30″, ou l'inclinaison de 15″.

TEMPS MOYEN, à Paris.		DIFF.	LONGITUDE géoc. observée.	Mouvem.t	II.de différ.	LATITUDE géocentriq.	Mouvem latit.
	H. M. S.	M. S.	S. D. M. S.	M. S.	S.	D. M. S.	M. S.
3 Août,	0. 34. 34	6. 21	4. 18. 45. 20	35. 2		6. 52. 12	9. 51
4	0. 28. 13	6. 24	4. 18. 10. 18	35. 56	54	7. 2. 3	9. 7
5	0. 21. 49	6. 26	4. 17. 34. 22	36. 33	47	7. 11. 10	8. 30
6	0. 15. 23	6. 26	4. 16. 57. 49	36. 57	14	7. 19. 40	7. 39
7	0. 8. 57	6. 26	4. 16. 20. 52	37. 10	14	7. 27. 19	6. 59
8	0. 2. 31	6. 25	4. 15. 43. 42	36. 59	11	7. 34. 18	6. 2
8	23. 56. 6	6. 24	4. 15. 6. 43	36. 40	19	7. 40. 20	5. 18
9	23. 49. 42	6. 22	4. 14. 30. 3	36. 14	36	7. 45. 38	4. 24
10	23. 43. 20	6. 17	4. 13. 53. 49	35. 36	38	7. 50. 2	3. 33
11	23. 37. 3	6. 11	4. 13. 18. 13	34. 30	66	7. 53. 35	2. 43
12	23. 30. 52		4. 12. 43. 43			7. 56. 18	

Cette Table suffit pour faire voir qu'on ne peut déduire exactement une conjonction de Vénus par des observations éloignées de plusieurs jours, sans avoir égard à l'inégalité du mouvement ; elle servira aussi dans d'autres conjonctions semblables.

L'erreur des Tables étant — 24″ en longitude, elle est + 9″ sur le lieu vu du Soleil aux environs de l'aphélie ; elle étoit + 22″ en 1787 aux environs du périhélie, ou — 8″ sur la longitude héliocentrique ; cela sembleroit indiquer une augmentation de 11′ à 12′ à faire dans le lieu de l'aphélie de Vénus, que j'avois employé dans mes Tables *(Connoissance des Temps 1789)*, où j'ai supposé pour 1788, $10^s\,24^d\,26'\,47''$. En effet, en diminuant l'excentricité & l'époque, on produiroit le même effet dans les deux conjonctions, tandis que l'erreur s'est trouvée en sens contraire. Ainsi la correction me paroît devoir tomber uniquement sur le lieu de l'aphélie ; & comme ces deux conjonctions ont été observées & calculées avec un soin qu'on n'y avoit jamais mis, je crois qu'elles suffisent pour établir très-bien le lieu de l'aphélie de Vénus.

Mais voyant que ces observations s'accordoient aussi-bien; j'ai voulu y mettre un dernier degré de précision, en employant les perturbations que Jupiter a produites sur Vénus, dont j'avois donné le calcul (*Mém. de l'Académie 1760*). J'ai trouvé qu'il falloit appliquer au calcul — 1″,6 dans la première, & + 3″,1 dans la seconde. Par-là les erreurs se réduisent à 6″, qui font 8′ sur le lieu de l'aphélie, & il devient pour 1788, $10^s\ 8^d\ 26'\frac{1}{2}$; c'est ainsi que je l'emploie dans les Tables de la troisième édition de mon Astronomie.

Je finirai en rapportant quelques observations qui m'ont été envoyées par M. Bugge, habile astronome de Copenhague, & qui servent à constater l'exactitude de mes Tables, même avant les dernières corrections.

TEMPS MOYEN, à Copenhague.		LONGITUDE observée.	LATITUDE observée.	ERREURS des Tables. Long.	Latit.
	H. M. S.	S. D. M. S.	D. M. S.	S.	S.
1788. 5 Mai	3. 0. 31	3. 29. 18. 36	2. 42. 0	+ 31	+ 25
6	3. 1. 24	3. 0. 23. 39	2. 43. 15	20	22
7	3. 2. 17	3. 1. 28. 43	2. 42. 22	27	17
9	3. 4. 4	3. 3. 38. 2	2. 46. 26	33	14



SUR LA PARALLAXE DE LA LUNE.

QUATRIEME MÉMOIRE *.

Par M. DE LA LANDE.

LES obſervations de la Lune faites par M. de la Caille au cap de Bonne-Eſpérance, & par moi à Berlin, en 1751 & 1752, me ſervirent alors à déterminer la parallaxe de la Lune, & ce fut la première détermination exacte que l'on eût de cet élément aſtronomique ; j'en conclus la conſtante pour Paris, 57′ 3″,3 (*Mémoires de l'Académie 1756, page 378*) ; mais la figure de la terre influe un peu ſur ces réſultats, & il eſt néceſſaire d'y revenir, actuellement que l'on connoît mieux les dimenſions du ſphéroïde terreſtre.

Je ſuppoſois en 1756, avec M. Bouguer, que l'aplatiſſement de la terre étoit $\frac{1}{179}$, & que la courbe du méridien étoit déterminée par les trois degrés meſurés au Pérou, en France & au cercle polaire, avec des accroiſſemens proportionnels aux quatrièmes puiſſances des ſinus des latitudes. J'avois parcouru auſſi d'autres hypothèſes ſur les dimenſions du ſphéroïde ; mais la conſtante 57′ 3″,0 étoit fondée ſur cette hypothèſe, & c'eſt celle dont Mayer, Clairaut & la Caille firent uſage.

Un plus grand nombre de degrés meſurés depuis ce temps-là, des expériences ſur la peſanteur ou ſur le pendule ſimple, faites en divers climats, des recherches ſur la théorie hydroſtatique de la figure de la terre, nous ont appris que l'aplatiſſement de la terre étoit beaucoup moindre ; & j'ai trouvé moi-même qu'on devoit tout au plus le ſuppoſer de $\frac{1}{300}$ (*Mémoires de l'Académie 1785*).

* Les trois premiers ſont dans les volumes de 1752, 1753 & 1756.

Or, les mêmes obſervations qui me donnoient 57′ 3″,3 pour la parallaxe moyenne, ne me donnent plus que 56′ 57″ quand je les calcule dans cette nouvelle hypothèſe. C'eſt ce que je vais prouver par un exemple tiré de mes anciens calculs, & refait avec les nouveaux élémens.

Le degré de l'équateur & celui de Paris s'accordant aſſez bien avec cet aplatiſſement de $\frac{1}{300}$, je me ſervirai de ces degrés pour en déduire les dimenſions du nouveau ſphéroïde; il ſuffit de les changer de 7 toiſes, & de ſuppoſer 56746 vers l'équateur, & 57 076 toiſes à 49^d 23′ de latitude. Suppoſant que les accroiſſemens des degrés ſont comme les carrés des ſinus des latitudes, on aura le dernier degré 57 319. Les rayons de ces deux degrés étant 3 251 307 toiſes, & 3 284 136, le tiers de la différence 10 943, ſera la différence des rayons, & l'on aura pour le rayon de l'équateur 3 273 193, & pour le demi-axe 3 262 250 toiſes.

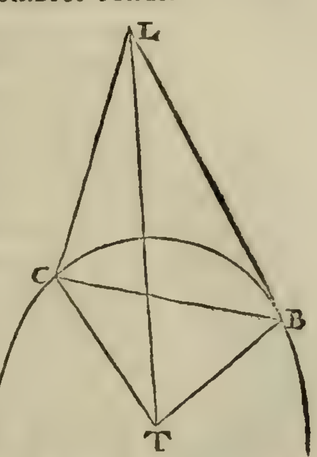
Les latitudes de Berlin & du cap de Bonne-Eſpérance; 52^d 31′ 13″, & 33^d 55′ 12″, donnent pour les rayons des ſphéroïdes 3 266 302 & 3 269785; les angles des verticales étant comme les ſinus des latitudes doubles ſeront 11′ 4″ & 10′ 37″. Tout ceci n'eſt qu'une approximation, mais elle eſt facile & ſuffiſante dans cette matière; il n'y a que 5 toiſes d'erreur ſur le dernier degré & 15 ſur le rayon, & il faudroit environ 955 toiſes pour faire 1″ de parallaxe.

Cependant j'ai voulu voir ce que donneroit un calcul rigoureux de l'ellipſe qui a $\frac{1}{300}$ pour aplatiſſement, en partant du 1.er degré qui eſt coupé par l'équateur, & de celui de 49^d 23′; il faut, pour avoir l'excès d'un autre degré, employer l'expreſſion $3\,a\,d$ ſin.^{2} $L + \frac{15}{2}\,a^2\,d$ ſin.^{4} L, dans laquelle a eſt l'aplatiſſement, d le degré de l'équateur, L la latitude du lieu pour lequel on cherche le degré (*M. Cagnoli, Trigonom. p. 408*). Le dernier terme que l'on néglige dans la première approximation, n'eſt que 5 toiſes pour le pole.

Si l'on

Si l'on nomme D la longueur du degré de Paris, on a $a\left(1 - \frac{1}{2}a\right) = \frac{1 - \left(\frac{d}{D}\right)^{\frac{2}{3}}}{2 \text{ sin.}^2 L}$; j'en ai conclu qu'en supposant les degrés 56747,0 & 57075,1, c'est-à-dire avec un changement de 6 toises, on avoit l'aplatissemen de $\frac{1}{300}$, tel que je le suppose en nombres ronds.

Le rayon de courbure dans une ellipse au sommet du grand axe, est égal au carré du petit axe, quand on prend pour unité le demi-grand axe; or, le carré du petit axe est donné par l'aplatissement de la terre en fraction du grand axe; & puisqu'il est connu en toises par la mesure du premier degré, on aura le petit demi-axe en toises 3262237, l'aplatissement 10911, le rayon de l'équateur 3273148.



Pour avoir les rayons de la terre au Cap, à Berlin & à Paris, b étant le demi-petit axe, & e l'excentricité de l'ellipse, en sorte que $b^2 = 1 - e^2$, on a le rayon $1 - \frac{1}{2}e^2 b^2 \text{ sin.}^2 L - \frac{5}{8} e^4 \text{ sin.}^4 L$ (*M. Cagnoli, page 412*). Ainsi le rayon au Cap sera 3269770, à Berlin 3266298, & à Paris, 3266986; les angles de la verticale 10′ 37″, & 11′ 5″,7.

Soit T le centre de la Terre, L la Lune, C le Cap; B la place de Berlin, l'angle BCT sera de 46^d 55′ 41″,5 l'angle CBT 46^d 59′ 36″,1, la distance BC a pour logarithme 66494177.

Supposons la distance du centre de la Lune au zénith du Cap, le 24 Août 1752, 28^d 9′ 6″, corrigée de la réfraction, & l'angle BLC déduit de l'observation du Cap comparée à celle de Berlin 1^d 13′ 28″,5 (*Mém. de l'Acad. 1753,*

page 104); cela suffit pour en conclure la distance *T L* de la Lune ; & le rayon de la Terre pour Paris étant de 3266986, il s'ensuit que la parallaxe horizontale est de 55′ 16″,2 pour ce jour-là.

Dans l'hypothèse de Bouguer, nous avons le rayon de l'équateur 3281013 toises, le demi-axe 3262688, *T C* 3276130, *B T* 3270385, la distance *B C* 4458025, les angles des verticales 19′ 33″,5 & 16′ 27″,5; l'angle *C* 47^{d}. 1′. 33″. $\frac{1}{3}$, & l'angle *B* 47^{d} 8′ 2″ $\frac{2}{3}$. Le rayon pour Paris étant de 3271581 *(Mém. de l'Acad. 1752, page 106)*, je trouve la parallaxe 55′ 22″,4 plus grande de 6″,2 que dans ma nouvelle hypothèse.

J'ai calculé de même l'observation du 3 Décembre 1751 *(Mémoires de l'Académie 1752, page 91)*, où la distance de la Lune au zénith du Cap fut observée de 31^{d} 44′ 35″,7, & l'angle *L* de 1^{d} 22′ 43″,2; cela donne pour Paris 61′ 19″,1 & 61′ 12″,1 : la différence des deux hypothèses est 7″,0.

Ces deux différences donnent pour la parallaxe moyenne 6″,4 & 6″,5, ainsi la moyenne est 56′ 56″ & 8 ou 9 dixièmes. On peut donc supposer la constante pour Paris, 56′ 57″ pour l'équateur, 57′ 3″,7; & pour le pôle, 56′ 51″,9.

Cela suppose le résultat moyen que j'avois tiré de toutes mes comparaisons d'observations, & qui étoit de 57′ 3″,3 dans l'hypothèse de Bouguer: il est d'accord, à une $\frac{1}{2}$ seconde près, avec celui que la Caille avoit tiré des comparaisons semblables *(Mémoires de l'Académie 1761)*; car son résultat revient à 56′ 57″,4, en le réduisant à la même hypothèse. M. du Séjour trouve 57′ 0″, c'est-à-dire, 3″. de plus *(Mémoires de l'Académie 1782, p. 343, Traité analytique, page 547)*; & c'est à cela que revient aussi la Table de Mayer. Telle est l'incertitude que laissent des observations qui n'étoient pas faites avec d'aussi bons instrumens que

ceux qu'on pourroit y employer aujourd'hui; mais comme l'on n'a point fait depuis 1752 d'obſervations qui puiſſent tenir lieu de celles que je viens de rapporter, nous ne pouvons que faire uſage de celles que nous avons, & il me paroît que la conſtante 56′ 57″, pour Paris, eſt celle qui les repréſente le mieux.

Cependant pour prendre un milieu entre les réſultats de la Caille, ceux de M. du Séjour & les miens, j'ajouterai 1″,3, & je ſuppoſerai 56′ 58″,3 pour Paris, 56′ 53″,2 ſous le pôle, & 57′ 5″,0 pour l'équateur.

La parallaxe qui répond au rayon moyen de la terre eſt plus grande de 2″,6 que celle de Paris; elle eſt de 57′. 0″9, je l'emploîrai de 57′. 1″.

M. de la Place eſt perſuadé qu'on pourroit diminuer encore cet aplatiſſement de la terre, & le réduire à $\frac{1}{321}$; cela produiroit encore une diminution de $\frac{4}{10}$ de ſeconde dans la parallaxe (*Mémoires de l'Académie 1783, page 23*), mais je m'en tiens au réſultat que j'ai trouvé par les dernières expériences du pendule, & la comparaiſon de tous les degrés faite par M. Boſcovich. D'ailleurs, nous ſuppoſons toujours ici que la figure de la terre eſt elliptique & régulière, ſuppoſition qui ne ſauroit être bien rigoureuſe, & qui laiſſera toujours une petite incertitude dans la parallaxe.

Mais la diminution de 6″ que je viens de faire à la parallaxe, étoit aſſez importante pour mériter d'être expliquée ici, & pour entrer dans les Tables de Mayer, que je fais réimprimer dans la troiſième édition de mon Aſtronomie. La Table de Mayer a été auſſi calculée par M. de Lambre, parce qu'elle n'étoit pas tout-à-fait conforme à l'excentricité qui réſulte de l'équation de la Lune employée dans les mêmes Tables, & qui eſt de 6^d 18′ 31″,6. Cette équation ſuppoſe l'excentricité 0,05503568, & il paroît que Mayer avoit ſuppoſé 0,05454, en calculant la Table des parallaxes, ce qui donne pour l'apogée 54′ 13″,5 au lieu de 54′ 13″,0 que l'on trouve dans la Table. Au reſte,

il eſt poſſible qu'il ait calculé ſa Table par une méthode peu exacte, & ſe ſoit trompé d'une demi-ſeconde ſur la parallaxe apogée; mais la nouvelle Table ſera plus conforme & à l'excentricité que l'on admet actuellement, & à la parallaxe dont j'ai donné la valeur dans ce Mémoire.



MÉMOIRE
SUR LE DIAMÈTRE DE LA LUNE.

Par M. DE LA LANDE.

QUOIQUE tous les élémens de la Lune aient été discutés plusieurs fois, on n'a point encore publié d'observations calculées & de résultats détaillés sur la quantité du diamètre apparent de la Lune, & sur ses variations observées avec de grandes lunettes. Cette matière m'a paru digne d'être examinée en détail, & je vais rapporter ici plusieurs observations avec les conséquences qui en résultent.

Lorsque j'eus déterminé, en 1752, la parallaxe de la Lune, par la comparaison de mes observations avec celles que M. de la Caille avoit faites au cap de Bonne-Espérance, je donnai le rapport entre la parallaxe & le diamètre de la Lune, & j'annonçai en 1762 dans la Connoissance des Temps pour l'année 1764, *page 201*, & dans la première édition de mon Astronomie, *page 663*, que j'avois reconnu en même temps que le diamètre horizontal de la Lune étoit à sa parallaxe pour Paris, comme 30′ est à 54′ 56″, en comparant avec ces parallaxes les diamètres de la Lune que j'avois observés avec un héliomètre de 18 pieds.

Depuis que j'ai diminué l'aplatissement de la terre, & par conséquent les parallaxes qui résultoient de nos observations, il a fallu changer le rapport dont il s'agit; cela m'a fait voir qu'il falloit pour le diamètre de la Lune des quantités absolues & des valeurs observées que chacun pût appliquer aux parallaxes qu'il croiroit devoir adopter: j'ai donc recherché mes anciennes observations des diamètres de la Lune, je les ai recalculées de nouveau, & comparées

avec les parallaxes des Tables de Mayer, & l'on en trouvera le résultat ci-après.

L'héliomètre de 18 pieds dont je me suis servi pour ces observations, fut le premier instrument que M. le Monnier demanda pour moi à l'Académie, peu de temps après ma réception en 1753; & c'est par ce célèbre astronome que je fus dirigé vers l'objet dont je vais rendre compte. L'instrument fut construit avec soin sous sa direction. Nous mesurâmes ensemble, le 19 Juillet 1753, la distance de 804 toises, depuis le dernier arbre de la terrasse des Tuileries, jusqu'aux piliers de la porte de la Conférence, au bas de Chaillot (qui ont été démolis en 1789). Je trouvai que quand les verres étoient à la distance marquée zéro, l'angle étoit 39′ 37″5, & à trente, plus petit de 11′ 9″,4 ou 28′ 28″,1. En 1757, je changeai l'oculaire, & je trouvai pour zéro, 40′ 3″, & pour 30, 28′ 46″,4; les 30 tours valoient 11′ 16″,6, tous les angles étoient augmentés proportionnellement. Je fis alors une Table très-étendue dont je me sers encore, en y faisant la correction nécessaire, comme je le dirai ci-après.

Je m'aperçus ensuite qu'une aussi grande machine transportée du lieu de la base jusqu'à l'Observatoire, pouvoit être sujette à quelques variations; & lorsque M. de la Condamine m'eut cédé son observatoire au Luxembourg, au-dessus de la porte royale qui donne sur la rue de Tournon, je plaçai des mires à l'autre extrémité de cette longue rue. J'en mesurai la longueur, qui est de 900 pieds, & je m'en servis pour déterminer, au mois de Juillet 1760, le diamètre du Soleil, apogée, 31′ 30″,5 (*Mémoires de l'Académie 1760, p. 48*). Cette base avoit été mesurée avec un soin extrême, & la lunette dirigée vers le Soleil aussitôt après que j'avois pris l'angle des mires, ne laissoit aucun soupçon sur le rapport des deux mesures, qui d'ailleurs étoient égales à quelques secondes près; en sorte que les inégalités de la vis ne pouvoient y influer. Enfin je crois encore, même au bout de 30 ans, que l'on n'a pas fait de mesure plus exacte du

diamètre du Soleil, ainsi je me servirai toujours de la mienne.

Je prendrai cette mesure pour terme de comparaison, & j'y rapporterai celles du diamètre de la Lune faites avec le même instrument; mais il y aura quelques incertitudes de plus, à cause des inégalités de la vis, & de la dilatation d'un tuyau de fer-blanc de 18 pieds de long. Il me parut le 9 Juin 1760, que quand le thermomètre étoit à la température, il falloit ajouter 3″ aux diamètres mesurés à la chaleur de 20ᵈ, qui étoit souvent celle que j'éprouvois en mesurant le diamètre du Soleil. Cependant je n'ai pas assez examiné cette équation pour la faire entrer dans mes calculs, & j'ai tâché d'en éviter les inconvéniens, en ne mesurant pas le diamètre du Soleil par un temps trop chaud. Si l'on employoit trois secondes, les diamètres suivans s'accorderoit mieux avec ceux du P. la Grange, & avec mon ancienne détermination.

Quoique je regarde ces observations comme n'ayant pas chacune plus d'une seconde d'incertitude, on verra cependant des différences de 2 à 3″ dans mes résultats, parce que outre les sources d'erreurs dont je viens de parler, il y a l'erreur sur la mesure du diamètre solaire, qui servoit toujours de terme de comparaison, & que je mesurois de temps à autre. Il y entre aussi une petite erreur sur le temps & la hauteur de la Lune, que je ne marquois pas toujours rigoureusement; enfin une partie de ces différences pourroit bien venir de ce que la variation des parallaxes ne seroit pas représentée par les équations de Mayer, pour toutes les situations de la Lune avec la précession de 2 à 3″.

Quoi qu'il en soit, je ne crois pas même actuellement que l'on ait fait de meilleures observations sur les diamètres de la Lune; les micromètres ordinaires ne comportant pas la même précision, & étant sujets aux mêmes inconvéniens. M. de la Caille en publia quelques-unes dans les Mémoires de 1761, mais elles n'étoient faites qu'avec la lunette de 6 pieds de son sextant, & ils me paroissent trop grands;

ainsi je rapporterai ici toutes mes observations, que l'on pourra calculer à loisir si l'on n'en fait pas de meilleures. En attendant, je donnerai le résultat de celles que j'ai calculées. L'ouverture de mes objectifs étoit réduite à 18 lignes pour diminuer l'aberration des verres; les objets y étoient toujours bien terminés.

Pour faire ces évaluations, je prendrai toujours le diamètre du Soleil mesuré le plus près du temps dont il s'agit pour la Lune; ainsi, pour avoir le diamètre de la Lune le 8 Juillet 1761, ou la valeur de 23,50 sur mon héliomètre, je prends le diamètre du Soleil mesuré le 6 de Juin, de 22,30, qui, suivant la Table de 1757, donne 31' 40" 1; & comme par les diamètres du Soleil que j'ai déterminés en 1760, il ne devoit être que de 31' 33",3, il s'ensuit qu'il faut ôter 6",8 des valeurs trouvées par cette Table. Elle donne pour 23,50, une valeur de 31' 13",0, ce qui exige à proportion, qu'on ôte 6",7, & l'on aura 31' 6",3 pour le diamètre observé. Il en faut ôter 12",9, à cause de la hauteur de la Lune, & y ajouter 3",0, à cause de la réfraction; il reste 30' 56",4 pour le diamètre horizontal de la Lune à l'heure de l'observation.

J'ai toujours mesuré le diamètre du Soleil horizontalement, pour éviter l'effet de la réfraction, & l'effet opposé par lequel il paroît que le diamètre vertical est plus grand de 2" que le diamètre mesuré horizontalement (Bouguer, *Mémoires de l'Académie 1748, page 30)*. On verra ci-après que j'ai trouvé le même résultat.

Pour la Lune, on est obligé de mesurer le diamètre entre les pointes du croissant ou sur la ligne des cornes : il faut calculer l'effet de la réfraction sur le diamètre incliné, & pour cela il faut connoître non-seulement la hauteur de la Lune, mais l'angle de la ligne des cornes avec le vertical; quelquefois je l'ai estimé à la vue. Lorsque l'on n'a pas eu cette attention, il suffit d'examiner sur le globe quel angle faisoit le vertical de la Lune avec l'écliptique, ou plutôt avec le grand cercle mené de la Lune au Soleil. Cet angle n'exige

n'exige pas une plus grande précision, à moins que la Lune ne fût très-basse, & il faut éviter d'employer de pareilles observations.

OBSERVATIONS des Diamètres de la Lune, faites avec un héliomètre de 18 pieds, depuis 1755 jusqu'en 1764.

17 Juin 1755.	10^h 35′ T.V. Diam. de la ☾	20″,19. Haut. de la ☾	17^d 0′.
	43................	20,45............	15. 40.
	51................	44............	14. 20.
18.........	11. 0.................	19,66.	
		71.	
	8................	19,76 $\frac{1}{2}$..........	16.
19.........	....	19,06 $\frac{2}{3}$..........	24.
	10. 27................	5............	23 $\frac{1}{2}$.
	33................	18,98............	23.
25.........	10. 52................	22,18............	13 $\frac{1}{4}$.
26.........	10. 52................	23,97............	9.
	58................	75.	
	11. 0................	82.	
	5................	71............	10 $\frac{1}{2}$.
		mil. 81.	
27.........	11. 25................	24,89............	9.
	28................	91............	9 $\frac{2}{3}$.
	34................	96............	10 $\frac{1}{3}$.
28.........	11. 46................	26,18............	8 $\frac{1}{2}$.
	50	10.	
	51................	25,85............	9 $\frac{1}{4}$.
	55................	91.	
	57................	91.	
4 Juillet....	4 $\frac{1}{2}$ diamètre horiz. du Soleil.	22,80.	
10.........	6 $\frac{3}{4}$ diamètre de la Lune....	22,78.	
		80.	
		80.	

L'oculaire qui étoit de trois pouces s'est cassé, j'en ai pris un de deux pouces, ce qui donne 20 parties de plus.

15 Juillet 1755.	9h 40′ T. V. Diam. de la ☾	21″,08.	Haut.
16	8. 45	20,03.	22d. diam. vertic.
17	9 ½	19,78.	21. de haut.
		79.	
18	10. 10	91.	18.
20	9 ¾	20,04.	21 ⅔.
		9	
		10.	
22	9 ¾	21,44.	18 ¾.
		42 ½.	
25	10. 10	24,54.	12 ½.
		44.	
		53.	
		mil. 50.	
15 Août. . . .	8 ¼	20,51.	
		42.	
		38.	
		43.	
16	10.	20,98.	
		21,14.	
		4.	
		9	
17	10. 10	21,49 ½.	
	20	56.	
		57.	
20	8 ¾	23,32.	
		28 ½.	
		31.	
21	9 ¼	24,13 } 21 }	verticalement.
		24,15 } 2 }	horizontalement.
	10 ¼	23,97	verticalement.
		24,02	horizontalement.
22	10. 5	92	verticalement.

22 Août 1755.	10^h	5′. T. V. Diam. de la ☾	24,92.	verticalement.
			95.	
			25,0.	
23	9	20	26,03.	
			06.	
24	10.	0	26,46.	
			48 ½.	
25	10.	15	27,25.	
			14.	
			23.	
			18.	
			2.	
			mil. 15.	
15 Sept.	9.	45	22,90	deux fois.
16	9.	35	23,56	deux fois.
17	10.	5	24,42	presque dans le méridien.
22	10.	30	26,88 ½	la Lune étoit trop haute.
25	10.	9	27,67.	
			64 ½.	
	10.	12	65 ½.	
26	7.	0 matin	26,75	41^d de hauteur.

Diamètre du Soleil 3 fois 21,20. Il servira à trouver les valeurs du micromètre pour les observations qui précèdent.

11 Octob.	7.	50	21,53.	
		52	50.	
		55	56.	
15	11 ¼		25,19.	
18	9.	56	26,51.	
19	9 ¼	environ	26,83	35 ½ de haut.
20	9 ¼		27,22	36.
31 Mai 1756.	8.	0 matin, diam. du Soleil.	22,25	horizontal. Toujours avec l'oculaire de 2 pouces.
19 Oct. 1757.	3. ½	après avoir changé l'oculaire. diamètre du Soleil	20,75.	
	7 ½	diam. de la Lune égal à celui du Soleil.		
			20,75	16 ½ haut.

20 Oct. 1757.		diamètre du Soleil. . . .	20",85 ou 2" moins que le 19, mais je préfère celui du 20.
	$6^h\frac{1}{4}$.	diamètre de la Lune. .	20,05. . . . . . $21^d\frac{1}{4}$. haut.
21.	$7\frac{1}{2}$.		19,60. . . . . . 24 $\frac{1}{2}$.
22.	7. 50.		19,60 comme le 21.
			27 $\frac{1}{3}$.
23.	9. 42.		19,65 hauteur. 32 $\frac{1}{2}$.
24.	10. 30.		20,00. . . . . . 37 $\frac{1}{2}$.
21 Novemb. .	9. 45.		21,10. . . . . . 40.
25.		diamètre du Soleil. . .	19,95.
17 Mars 1758	$2\frac{1}{4}$	. . . .	20,80.
11 Avril. . . .	$8\frac{1}{4}$	diamètre de la Lune. .	23,15. . . . . . 24 $\frac{1}{2}$.
13 Mai.	$7\frac{1}{4}$	. . . .	26,20. . . . . . 47 $\frac{1}{2}$.
	8.	. . . .	26,35. . . . . . 46.
17.	$5\frac{1}{4}$	. . . .	26,60. . . . . . 36.
18.	$7\frac{1}{4}$	. . . .	25,75. . . . . . 39 $\frac{1}{2}$ incl. de 45^d.
19.	8. 40.		25,10. . . . . . 35 $\frac{1}{4}$ incl. de 35^d. à la vertic.
20.	9.	. . . .	24,34. . . . . . 29 $\frac{1}{2}$. 45 incl.
21.		. . . .	23,57. . . . . . 19 . . . 45.
23.	6. o	diamètre du Soleil. .	22,15.
13 Juin.	$10\frac{1}{2}$	diamètre de la Lune. .	27,15. . . . . . 21 . . . 15.
19.	$10\frac{1}{2}$	. . . .	21,61. . . . . . 22 . . . 25.
22.	11.	. . . .	19,96. . . . . . 10 $\frac{1}{2}$. 25.
			92. . . . . . 11 $\frac{1}{3}$.
9 Juin 1760.		diamètre du Soleil. . .	22,35. le Soleil étoit fort chaud.
17.		. . . .	45.
24 & 27. . . .		. . . .	22,40. thermomètre à 14 ou 15^d.
18 Juillet. . .	8. 25.	diamètre de la Lune.	25,81. . . . . . 22 . . 20. incl.
22.	8. 30.	. . . .	27,29. . . . . . 20 $\frac{1}{2}$. 10.
3 Mai 1761.		diamètre du Soleil. . .	20,00. . . . . . mais le 7 Mai on a échancré les verres de l'héliomètre pour observer le passage de Vénus sur le Soleil, & pouvoir mesurer sa plus courte distance.
5 Juin.	6. o du soir,	Soleil. . . .	22,35. diam. horizontalement.
			60. diam. vertical.
6.		diam. horiz. du Soleil.	22,30. celui-ci vaut mieux.

12 Juin 1761.	11h 0' diamètre de la Lune..	25"50.....		incl. 5 à 6d.
17.........	11. 7................	27,82.	haut. 16d ½ envir.	45.
8 Juillet...	8. 53................	23,50.....	24.....	7 à 8.
	Cette observation est marquée comme bien sûre.			
9........	8. 15...............	24,50.....	28 ...	0.
10.........	7. 50................	25,55.....	26 ½...	12 env.
11.........	8. 45................	26,45.....	21d 50'..	15.
22.........	11. 45................	24,72.....	12. 20..	30.
	12. 23................	24,33.....	18. ..	24.
27 Mai 1762.	diamètre du Soleil..	22,54.		
	9. 0. diamètre de la Lune.	19,20.....	28. ..	35.
28.........	8. 38................	19,10.....	37 ½. ..	30.
2 Juin.....	9. 30................	22,12...............		20.
3.........	10. 43................	23,00..............		0.
4.........	8. 30................	24,05.....	16. ..	45.
1.er Juillet..	6 ¾ diamètre du Soleil...	22,83. plus sûr que le 27 Mai.		
15 Mars 1764.	diam. du Soleil à midi.	20,75.		
	Le diamètre vertical étoit plus grand de deux secondes environ.			
	6. 13. diamètre de la Lune.	19,20.....	31. 45..	60.
16.........	6. 13................	18,35.....	19. 5.	
17.........	10. 0................	17,20.....	37. 5..	60.
30.........	diamètre du Soleil..	21. 07.		horizontalement.

Vers ce temps-là je quittai l'obſervatoire du Luxembourg pour occuper celui du collége Mazarin, qui étoit malheureuſement vacant par le décès de M. de la Caille ; & comme il n'étoit pas aſſez élevé pour y placer mon héliomètre de 18 pieds, je n'ai pas continué ce genre d'obſervation ; l'obſervatoire que je fis conſtruire enſuite ſur la place du Palais Royal & celui que j'ai eu au Collége Royal ont le même inconvénient.

J'y ſuppléerai par des obſervations qui me furent envoyées par le P. la Grange, Jéſuite de Mâcon, habile aſtronome; il travailloit alors avec le P. Pézénas à l'obſervatoire de Marſeille. Il fut appelé enſuite à Milan, où il

a dirigé l'obſervatoire pendant pluſieurs années, il eſt mort à Mâcon le 25 Août 1783. On voit dans ces obſervations, non-ſeulement les parties du micromètre, mais encore la hauteur apparente du centre de la Lune, & l'angle que faiſoit le diamètre meſuré, ou la ligne des cornes, avec la verticale, ce qui eſt néceſſaire pour réduire les obſervations. L'inſtrument marquoit ces inclinaiſons.

DIAMÈTRES obſervés à Marſeille, avec le micromètre objectif de SHORT, *appliqué à un téleſcope de deux pieds de foyer, par le P.* LA GRANGE.

1759.	DIAMÈTRES du Soleil.	DIAMÈTRES DE LA LUNE. 1758.	TEMPS vrai à Marſ.	PARTIES du micromètre.	Hauteur du centre.	Ang. de la vertic. & du diam. ſur la lig. des cornes.
	P. Dix. 500.		H. M.		D.	D.
Janvier 18	4. 4. 17 $\frac{1}{2}$	Déc. 12	ſoir. 6. 57	4. 4. 4	48 $\frac{1}{3}$	32
19 & 20	4. 4. 17	14	6. 34	4. 3. 10	36 $\frac{1}{3}$	90
23	4. 4. 16	15	9. 25	4. 2. 42	40 $\frac{1}{2}$	75
27	4. 4. 14	1759.				
28	4. 4. 13 $\frac{1}{2}$	Janvier 2	6. 4	4. 4. 24 $\frac{1}{2}$	17	55
30	4. 4. 14	3	6. 29	4. 4. 37	25	50
31	4. 4. 13	5	6. 7	4. 4. 33	44	28
Février 3	4. 4. 13	6	5. 56	4. 4. 24	50	12
6	4. 4. 11	7	9. 34	4. 4. 6	45 $\frac{1}{2}$	53
7	4. 4. 11	8	5. 48	4. 3. 43	48	27
10	4. 4. 10	9	5. 20	4. 3. 20	38	35
12	4. 4. 10	10	5. 17	4. 3. 2 $\frac{1}{2}$	24 $\frac{5}{6}$	40
Mars 2	4. 4. 0 $\frac{1}{2}$	11	5. 36	4. 2. 31 $\frac{1}{2}$	23 $\frac{1}{3}$	48
4	4. 4. 0	12	5. 34	4. 2. 1 $\frac{1}{2}$	14 $\frac{1}{4}$	80
10	4. 3. 46		matin.			
12	4. 3. 44	13	6. 30	4. 1. 40	11 $\frac{2}{3}$	90

1759.		DIAMÈTRES du Soleil.
		P. Div." 500."
Mars	18	4. 3. 39
Avril	19	4. 3. 24
	20	4. 3. 21
Mai	19	4. 3. 5 ½
	20	4. 3. 5 ½
Juin	26	4. 2. 47
	27	4. 2. 47
	29	4. 2. 46
Juillet	6	4. 2. 48
	8	4. 2. 48
	14	4. 2. 47
	20	4. 3. 0
Août	10	4. 3. 3
	11	4. 3. 4
	23	4. 3. 9
	31	4. 3. 12
Sept.	2	4. 3. 13
	8	4. 3. 18
	16	4. 3. 24 ½

DIAMÈTRES DE LA LUNE.

1759.		TEMPS vrai à Marſ.	PARTIES du micromètre.	Hauteur du centre.	Ang. de la vertic. & du diam. ſur la lig. des cornes.
		H. M.		D.	D.
		ſoir.			
Janvier	13	7. 36	4. 1. 39	25 ⅓	80
	14	8. 34	4. 1. 21	25 ½	55
	15	9. 5	4. 1. 0 ½	20	25
	16	10. 0	4. 0. 33	19 ⅓	34
		matin.			
	17	6. 5	4. 0. 37	37	25
	18	5. 55	4. 0. 35	43	11
	19	5. 56	4. 0. 31 ½	44	0
	20	5. 55	4. 0. 38	43	12
	22	6. 0	4. 1. 18	33	26
	23	6. 0	4. 1. 39	29	31
	25	6. 16	4. 2. 29	17	34
	26	6. 17	4. 2. 47	9	35
		ſoir.			
	30	6. 11	4. 4. 33[d]	7	58
	31	6. 0	4. 4. 47[d]	20	56
Février	1	6. 5	4. 5. 8	31	52
	2	6. 2	4. 4. 48	43	47
	3	6. 33	4. 4. 29	50	42
	4	6. 23	4. 4. 9	59	22
	5	6. 34	4. 3. 30	63	0
		ſoir.			
	6	6. 24	4. 3. 7	61	23
	7	6. 12	4. 2. 36	53	46
	8	6. 30	4. 2. 15	48	55
	9	5. 36	4. 1. 38	27 ¾	67
	10	6. 16	4. 1. 22	25	77
	11	7. 21	4. 1. 3	26 ½	90
	12	9. 7	4. 0. 48	37	39

DIAMÈTRES DE LA LUNE.					
1759.		TEMPS vrai à Marſ.	PARTIES du micromètre.	HAUTEUR du centre.	Angles de la vertic. & du diamètre ſur la ligne des cornes.
		H. M.		D.	D.
		ſoir.			
Février	13	8. 48	4. 0. 32	15 $\frac{3}{4}$ . . .	60
Mars	2	7. 30	4. 4. 46	22.	64
	3	7. 15	4. 4. 40 $\frac{1}{2}$	37.	60
	4	8. 39	4. 4. 30	33.	60
	6	9. 1	4. 2. 48	53.	54
	8	6. 30	4. 2. 0 $\frac{1}{2}$	59.	57
	9	6. 29	4. 1. 27	50.	68
	10	8. 34	4. 1. 14	59.	60
	11	9. 3	4. 1. 0 $\frac{1}{2}$	54.	64
	12	9. 31	4. 0. 41	48.	90
	13	9. 11	4. 0. 26	36.	5
	14	9. 0	4. 0. 22	24.	39
	16	9. 40d.	4. 0. 16	10.	57
		matin.			
	19	5. 58	4. 0. 47	23.	15
		ſoir.			
	31	9. 22	4. 4. 13d	. . . .	60
Avril	3	9. 35	4. 2. 47	40 $\frac{1}{4}$ . . .	50
	4	9. 28	4. 2. 20	50 $\frac{2}{3}$ . . .	45
	5	8. 55	4. 1. 44	62 $\frac{1}{2}$ . . .	20
	6	8. 56	4. 1. 21	63 $\frac{1}{2}$ . . .	3
	7	7. 5	4. 1. 5	54.	55
	8	7. 17	4. 0. 40	46 $\frac{1}{2}$ . . .	65
	9	7. 7	4. 0. 29	35.	75
	10	8. 40	4. 0. 31	39.	70
	11	8. 35	4. 0. 23	29.	87
	12	9. 9	4. 0. 23	14.	40
		matin.			
	15	4. 49	4. 0. 36	18.	30

DIAMÈTRE

DIAMÈTRES DE LA LUNE.

1759.		TEMPS vrai à Marſ.		PARTIES du micromètre.			HAUTEUR du centre.	Angles de la vertic. & du diamètre ſur la ligne des cornes.
		H.	M.				D.	D.
		matin.						
Avril	16	4.	51	4.	1.	4	20 ½ ...	24
	17	4.	44	4.	1.	24	22 ½ ...	14
	18	4.	41	4.	2.	3	23.....	5
	20	4.	38	4.	3.	6	20 ½ ...	5
	21	4.	31	4.	3.	35	17.....	11
		ſoir.						
Mai	2	8.	34	4.	2.	27	46 ½ ...	41
	5	8.	39	4.	1.	3	58.....	9
	6	8.	38	4.	0.	40	55 ½ ...	25
	7	8.	51	4.	0.	36	51.....	32
	8	9.	6	4.	0.	34	45 ½ ...	41
	10	8.	20	4.	0.	37	25.....	68
	11	8.	57	4.	0.	49	20 ½ ...	90
	12	9.	23	4.	0.	46	14 ½ ...	10
Juin	9	7.	43	4.	1.	27 ½	17 ½ ...	58
	10	8.	17	4.	1.	33 ½	6.....	90
Juillet	1	9.	2	4.	0.	39	29 ½ ...	18
	5	8.	33	4.	1.	7 ½	31 ½ ...	16
	8	8.	29	4.	2.	14	16.....	33
	9	8.	46	4.	2.	32	11 ½ ...	40

Le téleſcope avec lequel ces obſervations ont été faites, a été décrit dans les *Mémoires rédigés à l'Obſervatoire de Marſeille*, année 1755, ſeconde partie, *page 96-136*. L'objectif qu'on y plaçoit avoit 38 pieds de foyer, & il groſſiſſoit 87 fois. Quoique la grandeur de cet inſtrument ſemblât annoncer la préciſion des ſecondes, & qu'elles fuſſent marquées une à une par les diviſions, on voit des

différences de 3 à 4″ Il y a deux difficultés dans l'uſage de cet inſtrument; 1.° il eſt des temps où les images paroiſſent continuellement oſciller; tantôt elles ſe mordent, & tantôt ſe ſéparent. Alors prenant le milieu, & recommençant pluſieurs fois, on trouve juſqu'à trois parties du vernier, ou 3″ de différence; il y a des temps où l'on ne remarque point ces oſcillations.

2.° En écartant l'œil à droite & à gauche, on voit auſſitôt mordre l'une ſur l'autre les images qui ſe touchoient; juſque-là qu'en regardant fort obliquement on ne voit plus qu'une ſeule image; mais en tenant l'œil un peu éloigné de l'ouverture, & voyant alors les deux demi-objectifs, ſi l'on a ſoin de faire en ſorte que le rayon viſuel dirigé au point de contact ſoit ſur la ligne que parcourent les deux moitiés de verre, on n'aperçoit pas cette variation, ſoit que ce point de contact ſoit au milieu du champ ou ailleurs. Si on dirige ſon rayon viſuel par une des deux lunettes, alors les images ſe mordront dans une partie du champ, & elles ſe ſépareront dans un autre, & tout variera. On trouvoit quelquefois des différences de 10″; mais on les évitoit en mettant l'œil à la même place & les images au milieu du champ. L'unité d'image d'une étoile ſe prend quand les deux points rayonnans d'un côté viennent former un ſeul point rayonnant de tous côtés.

Lorſqu'on a eu à détacher le micromètre du téleſcope, on a toujours trouvé quelque différence, quoique la diviſion qui eſt près du petit miroir marquât la même choſe; cette différence alloit à 2″ ſur le diamètre du Soleil.

Le P. la Grange obſervoit qu'après avoir regardé long-temps dans ce téleſcope, les diamètres paroiſſoient plus grands. Quand on meſuroit pluſieurs fois les diamètres, on trouvoit ſouvent les derniers plus grands; mais cela n'alloit guères au-delà de 3 à 4″; probablement cela venoit du changement dans le foyer de l'œil, dont M. l'Abbé Rochon a parlé dans ſes Mémoires *(1783, p. 77 & 85)*. Les nombres que marque ce téleſcope ſont des pouces

Anglois, des dixièmes de pouces & des 50.es de dixièmes ou 500es de pouces; ainsi 4, 4, 18 $\frac{1}{2}$ valent 2218 $\frac{1}{2}$ parties du vernier: le P. la Grange les supposoit égales à 32′ 40″. Short avoit gradué l'un des deux anneaux dans lesquels tourne le télescope, en sorte qu'on avoit à 2 ou 3^{d} près l'angle de la verticale avec la ligne des cornes ; & c'est un avantage pour évaluer l'accourcissement des réfractions sur les diamètres inclinés : j'en ai donné une Table dans mon Astronomie.

Pour évaluer les diamètres de la Lune, j'ai pris pour le mois de Janvier 1759, le diamètre du Soleil 2217,2 = 32′ 33″,7; & pour le mois de Mai, le diamètre 2147 = 31′ 30″,5 : il y a une différence d'une seconde & demie.

Calcul des Observations précédentes.

Pour déterminer le diamètre horizontal de la Lune par mes observations, j'en ai choisi une douzaine parmi celles qui me paroissoient les plus exactes, & partant toujours du diamètre du Soleil supposé connu, j'ai réduit les parties du micromètre. Ainsi, le 28 Juin 1755, je prends le diamètre du Soleil observé le 4 Juillet, de 22,80, ce qui fait par la Table étendue, 3′ 28″,9; mais il ne devoit être que de 31′ 30″,5 : je vois qu'il faut ajouter 1″,6 à la Table. Or, le diamètre de la Lune 25,91, donneroit par la Table 30′ 18″,9, ainsi j'ai 30′ 20″,5 : j'y ajoute 13″,0 pour l'accourcissement de la réfraction, & j'en ôte 5″,9 pour l'augmentation qui vient de la hauteur; & j'ai 30′ 27″,6 pour le diamètre horizontal.

J'ai calculé la parallaxe horizontale de la Lune pour Paris, en employant les équations de Mayer, mais en supposant la constante 56′ 57″. On verra dans la Table suivante le diamètre horizontal qui répond à chaque parallaxe, & celui qui en résulte pour une parallaxe de 60′, avec la quantité dont chaque observation s'écarte du terme moyen, qui est 32′ 47″,3.

OBSERVATIONS de Paris.

	T. moy. à Paris.	Diamètre horiz.	Parallaxe horiz.	Diamètre pour 60'.	Differ. à 47",3.
	H. M.	M. S.	M. S.	M. S.	S.
1755 Juin 28	12. 0	30. 27,6	55. 44,0	32. 47,5	+ 0,2
1755 Sept. 16	9. 30	30. 55,1	56. 36,3	46,4	— 0,9
1755 Sept. 25	10. 2	29. 35,7	54. 5,7	49,5	+ 2,2
1757 Oct. 20	6. 0	32. 22,5	59. 11,2	49,2	+ 2,0
1760 Juil. 18	8. 39	30. 5,8	55. 8,9	44,7	— 2,6
1760 Juil. 22	8. 46	29. 34,1	54. 5,9	47,6	+ 0,3
1761 Juin 17	11. 7	29. 24,2	53. 52,9	44,5	— 2,8
1761 Juil. 8	8. 58	30. 56,4	56. 39,1	46,1	— 1,2
1761 Juil. 9	8. 20	30. 31,7	55. 53,4	46,4	— 1,9
1762 Juin 4	8. 28	30. 57,4	56, 36,4	48,7	+ 1,4
1764 Mars 15	6. 22	32. 27,0	59, 21,7	48,0	+ 0,7
1264 Mars 16	6. 22	32. 53,0	60. 8,2	48,5	+ 1,2

Ainſi par un milieu, le diamètre qui répond à 60′ de parallaxe pour Paris, eſt 32′ 47″,3, ou 32′ 46″,6, ſi l'on prend pour conſtante la parallaxe 56′ 58″,3 par un milieu entre les réſultats de la Caille, de M. du Séjour, & les miens.

Dans les douze obſervations précédentes on trouve le diamètre 29′ 24″, le plus petit qu'il ſoit poſſible d'obſerver dans aucune poſition de la Lune, & celui de 32′ 53″, qui ne diffère que de 44″ du plus grand de tous les diamètres lunaires; ainſi elles ſuffiſent déjà pour juſtifier, du moins à 2 ou 3″ près, les variations que donne la théorie.

Je vais faire actuellement une ſemblable comparaiſon ſur dix obſervations du P. la Grange, que j'ai calculées avec le même ſoin.

Observations de Marſeille.

	T. moy. à Paris.	Diamètre horiz.	Parallaxe.	Diamètre pour 60'.	Differ. à 50",7.
	H. M.	M. S.	M. S.	M. S.	S.
1759 Janv. 3	6. 22	32. 37,3	59. 28,2	32. 49,6	— 1,1
5	6. 1	32. 24,8	59. 12,0	45,6	— 5,1
6	5. 50	32. 14,7	58. 56,3	53,6	+ 2,9
7	9. 29	32. 0,3	58. 33,7	51,8	+ 1,1
Mai 7	8. 35	29. 31,4	53. 59,5	50,7	0,0
8	8. 50	29. 31,4	53. 56,0	48,5	— 2,2
16	8. 4	29. 41,7	54. 12,9	47,5	— 3,2
Juin 9	7. 20	30. 21,6	55. 22,7	49,5	— 1,2
10	8. 4	30. 31,1	55. 53,2	51,1	+ 0,4
Juil. 8	8. 21	30. 56,7	56. 33,7	54,8	+ 4,1

Ainſi par un milieu, le diamètre qui répond à 60′ de parallaxe, eſt 32′ 50″,7, en rejetant la ſeconde obſervation qui s'écarte le plus des autres, ou 32′ 50″,0, en prenant pour conſtante 56′ 58″,3. J'ai été ſurpris de voir 3″ ½ de différence entre ce réſultat & le mien, & peut-être cela vient-il des inconvéniens que j'ai racontés ci-deſſus en parlant du téleſcope. Peut-être éclairciroit-on cette difficulté en calculant plus d'obſervations. On pourroit croire que le téleſcope terminant moins bien que ma lunette, faiſoit paroître le diamètre plus grand; mais comme je me ſuis ſervi du même diamètre ſolaire pour évaluer les parties du micromètre Anglois, cette différence devroit diſparoître.

Quoi qu'il en ſoit, je m'en tiendrai au réſultat de mes obſervations, & je ſuppoſerai que le diamètre de la Lune eſt 32′ 47″,3 quand la parallaxe pour Paris eſt de 60′.

Dans la seconde édition de mon Astronomie je le supposois de 32′ 50″,0 pour la parallaxe de 60′ 6″,6, qui revient à celle de 60′ dans ma nouvelle hypothèse; ainsi je le trouve aujourd'hui plus petit de 2″,7. Je n'ai pu retrouver les calculs que j'avois faits vers 1760 sur cet objet; mais je ne crois pas qu'ils fussent plus concluans que ceux de ce Mémoire; ainsi dans les Tables que je vais publier, je ne ferai pas difficulté de diminuer le diamètre.

De-là il suit que la diminution de 3″,5 que M. du Séjour avoit remarquée dans les éclipses pour le demi-diamètre de la Lune, y compris l'effet de l'inflexion, devoit se réduire à 2″,2. Dans son Traité analytique, *p. 418*, il réduit l'inflexion à 1″,8, en faisant une diminution de 1″,5 dans le demi-diamètre de la Lune; la somme est 3″,3, qui devroit se réduire à 2″ d'après le nouveau diamètre que j'adopte actuellement: dans ce cas, l'inflexion se réduiroit à 1″,1, & la diminution du diamètre à 0″,9.

Ces recherches sur le diamètre de la Lune étoient d'autant plus nécessaires, que les astronomes différoient beaucoup pour cet élément. Par exemple, le 15 Mars 1764 je trouve le diamètre 32′ 26″ par mes nouveaux calculs, & les Tables de Cassini donnent la même chose; mais ce ne seroit que 32′ 13″, suivant les Tables de la Hire; 32′ 18″, suivant celles de Halley; & 32′ 24″, suivant les Tables des Institutions de M. le Monnier. On auroit une seconde de plus ou 32′ 27″, suivant le résultat adopté par NEWTON; & 32″, suivant la Caille *(Mém. 1761, p. 57)*. Au reste les variations des diamètres étant représentées fort imparfaitement dans les anciennes Tables de la Lune, il seroit difficile de dire à 3 ou 4″ près ce qu'elles donnoient, & les trois premiers auteurs que je viens de citer n'avoient pas rapporté des observations positives du diamètre de la Lune, d'après lesquelles on pût savoir combien nous différons (Cassini, *Mém. Ac. 1699, p. 279;* La Hire, *Mém. Ac. 1703, p. 7)*. M. le Monnier est le seul qui ait publié des

observations, déjà imprimées jusqu'en 1746, & il paroît par un mot de ses *Institutions (p. 184)* que je diffère peu de ce célèbre astronome ; mais il n'en a pas encore publié les résultats. Ainsi ceux que je viens de donner dans ce Mémoire, sont les premiers que l'on ait eus avec la précision d'une grande lunette, pour les valeurs des diamètres de la Lune.

La réduction des diamètres observés, aux diamètres horizontaux, m'a donné lieu d'examiner les Tables de l'augmentation, calculées par la Caille & par Mayer, & j'ai reconnu qu'elles n'étoient pas d'une exactitude suffisante; il y a quelquefois plus d'une demi-seconde d'erreur: j'en ai donc calculé une nouvelle par une formule commode qui est dans mon Astronomie, *art. 1510.*

Si l'on veut avoir égard à l'aplatissement de la Terre, on est obligé de distinguer deux cas : quand la Lune est dans le méridien il suffit de diminuer la distance au zénith de l'angle que fait la verticale avec le rayon de la Terre, & cela peut produire un dixième de seconde; mais cette correction est nulle dans le premier vertical, & elle est comme le cosinus de l'azimuth. Cette correction est égale au diamètre multiplié par les sinus de la parallaxe & de l'angle de la verticale, & par les cosinus de la hauteur & de l'azimuth. J'ai pris le parti dans ma Table, de prendre un milieu, en n'employant que la moitié de la correction, afin que cette Table puisse servir dans tous les cas, sans que l'on courre risque de se tromper d'un vingtième de seconde. Il seroit inutile de pousser la précision de cette Table au-delà des dixièmes de secondes, puisque cela exigeroit une correction dans la Table pour les différens degrés d'azimuth. Par la même raison, je me suis contenté de calculer la Table pour les diamètres de 30′ 30″ & 32′ 30″; j'ai conclu les autres par des parties proportionnelles, ce qui n'auroit pas suffi si j'eusse voulu avoir une précision plus grande qu'un dixième de seconde.

Cette Table est faite pour la latitude de Paris, mais elle peut servir pour tous les autres pays, la différence n'étant pas d'un vingtième de seconde pour un changement de 6″ dans la parallaxe horizontale. Elle se trouvera dans la troisième édition de mon Astronomie, qui paroîtra au commencement de 1791.



MÉMOIRE

MÉMOIRE

Sur le Diamètre & la Lumière du quatrième Satellite de Jupiter.

Par M. DE LA LANDE.

DANS le travail curieux & important que M. Bailly a publié ſur les diamètres & la lumière des ſatellites *(Mém. de l'Acad. 1771)*, il ne put faire entrer l'article du 4.e ſatellite, parce qu'il ne s'éclipſoit pas en 1770, temps où M. Bailly étoit occupé de ces obſervations; je lui ai demandé la permiſſion de joindre ce petit ſupplément à un traité d'ailleurs très-ſavant, très-neuf & très-complet: voici ce que m'ont donné les premiers eſſais que j'ai eu occaſion de faire ſur le 4.e ſatellite.

Le 25 novembre 1788 j'ai obſervé l'émerſion du 4.e ſatellite avec une excellente lunette de Dollond, qui a 40 $\frac{1}{2}$ lignes d'ouverture; il a commencé à paroître à $11^h\ 58'\ 44''$, temps vrai (M. Meſſier, $12^h\ 0'\ 16''$; M. Méchain, $11^h\ 59'\ 39''$); auſſitôt j'ai maſqué l'objectif avec un carton qui n'avoit qu'un pouce ou 12 lignes d'ouverture; & $4'\ 49''$ après la première obſervation, j'ai eu une ſeconde émerſion avec cette petite ouverture; elle donnoit 11 fois moins de lumière que l'ouverture entière, puiſque le carré de 40 $\frac{1}{2}$ lignes eſt au carré de 12 comme 11 eſt à 1.

Peu après l'obſervation j'ai trouvé que le ſatellite diſparoiſſoit pour ainſi dire, & qu'on avoit peine à le voir avec un diaphragme de huit lignes, qui réduiſoit à un vingt-cinquième la lumière de la lunette, ou plus exactement à 0,039; ainſi quand la lumière du ſatellite en émerſion a commencé à s'apercevoir avec peine, il y avoit déjà $\frac{1}{25}$ de ſon diſque hors de l'ombre. Cette conſéquence eſt

néceſſaire, car ſi la lumière de la lunette diminuée & réduite à cette fraction, ſuffit à peine pour faire voir le ſatellite, il eſt clair que quand avec l'ouverture entière on ne fera que l'entrevoir avec la même difficulté, il y aura la même lumière, égale à un vingt-cinquième de la lumière totale ou de la ſurface entière du ſatellite : c'eſt la valeur d'un ſegment qui eſt comme inviſible dans cette lunette.

Suivant la Table des ſegmens qui eſt dans le Mémoire de M. Bailly, un ſegment qui eſt 0,03902 du cercle entier, a pour flèche ou ſinus verſe 0,08217 du diamètre entier; telle eſt donc auſſi la portion du diamètre du ſatellite qui eſt hors de l'ombre lorſqu'on commence à entrevoir le ſatellite; c'eſt ce qu'on appeloit ci-devant *émerſion*.

Mais lorſque j'ai obſervé la ſeconde émerſion avec une ouverture de 12 lignes, le ſegment inviſible étoit 0,08779 ou environ une douzième partie de la lumière totale, & la flèche qui lui correſpond eſt 0,14300 du diamètre. Ce ſegment étoit preſque 11 fois plus grand que le premier; ainſi multipliant par 11 le premier ſegment inviſible, je trouve celui qui avoit lieu dans cette petite ouverture 0,4445, & la flèche qui lui répond 0,45619 du diamètre du ſatellite. C'eſt la partie du diamètre qui étoit hors de l'ombre quand j'ai commencé à l'apercevoir avec la petite ouverture, 4′ 49″ plus tard.

La différence de ces deux flèches eſt 0,374 du diamètre, & c'eſt cette partie qui, ſuivant l'obſervation, a employé 4′ 49″ à ſortir, ce qui donne pour le diamètre entier 12′ 53″ de temps. En tenant compte du changement de lumière qui avoit dû arriver dans l'intervalle des deux obſervations, je trouve ſeulement 12′ 50″. La diſtance au nœud étoit alors de 28^d, & ſuppoſant l'inclinaiſon de 2^d 36′, je trouve qu'en 12′ 50″ de temps le ſatellite s'éloignoit du centre de l'ombre de 9′ 37″. Tel eſt donc le diamètre apparent du ſatellite vu du centre de Jupiter. Cette quantité que je trouve de 9′ 37″, étoit, ſuivant

Whiſton, de 5′ 40″ ſeulement, & ſuivant Caſſini, dans ſes Tables aſtronomiques *(page 184)*, de 15′ 4″.

Multipliant le ſinus de cette quantité par la diſtance du ſatellite 13,31, on a $\frac{1}{27}$ de Jupiter; M. Maraldi l'eſtimoit $\frac{1}{20}$ *(Mém. de l'Acad. 1734)*; Whiſton, $\frac{1}{44}$ *(The longit. diſcovered, 1738, p. 8)*; mais ni l'un ni l'autre n'avoient employé une méthode auſſi exacte que celle-ci, qui nous a été ſuggérée par M. de Fouchy, mais dont M. Bailly a tiré le plus grand parti, & dont il a fait la plus ſavante application aux trois premiers ſatellites, avec autant de ſagacité que de travail.

Le diamètre de la Lune eſt $\frac{1}{40}$ de celui de Jupiter; ainſi le diamètre du ſatellite eſt une fois & demie celui de la Lune.

Ce ſatellite, dans ſes plus grandes digreſſions, ſe voit encore avec un diaphragme de 3 $\frac{1}{2}$ lignes; mais quand il eſt tout près de Jupiter, il en faut un qui ait au moins 15 lignes; c'eſt-à-dire, qu'alors le ſatellite a dix-huit fois moins de lumière, parce que celle de Jupiter éteint & affoiblit pour nous la lumière du ſatellite à meſure qu'il eſt plus près de Jupiter. Pour connoître la loi de la diminution de lumière ſuivant ſes diſtances à Jupiter, j'emploîrai des obſervations que je fis le 22 février lorſque le ſatellite paſſa ſur le bord de Jupiter, dans ſa conjonction inférieure; il en étoit ſi près, qu'il parut le toucher pendant près d'un quart d'heure.

Je trouvai le ſegment inviſible 0,1030, avec un diaphragme de 13 lignes, lorſque la diſtance du ſatellite au centre de Jupiter en demi-diamètres de Jupiter étoit 1,46; & enſuite avec un diaphragme de 15 $\frac{1}{2}$ lignes, je trouvai le ſegment inviſible 0,1465 à la diſtance 1,20. J'ai calculé ces diſtances en partant de la conjonction, ou du milieu du paſſage qui me parut arriver vers $9^h \frac{1}{4}$; le ſatellite ne fit que raſer le bord de Jupiter, il faiſoit 8″,4 par heure: le demi-diamètre apparent de Jupiter étoit alors de 19″,4. Avec ces données j'ai tracé une figure où j'ai vu qu'à

6^h 38′ & 7^h 32′, ses distances au centre de Jupiter en demi-diamètres de cette planète étoient 1,46 & 1,20.

Lorsqu'en pareil cas on veut calculer à quelle distance le satellite a dû passer du centre de Jupiter, il ne suffit pas d'avoir égard à la latitude du satellite par rapport à l'orbite de Jupiter; il faut aussi considérer la latitude géocentrique de Jupiter, qui est égale à la latitude de la Terre vue de Jupiter: ainsi le 22 février Jupiter avoit 16′ de latitude australe, la Terre lui paroissoit avoir 16′ de latitude boréale; d'où j'ai trouvé par deux triangles sphériques, que la Terre étoit de 13′ au midi de l'orbite de Jupiter, ce qui fait 2″ dont le satellite devoit paroître plus au nord; & comme le satellite ayant 2^d 1′ de latitude, devoit paroître 18″,8 au nord de Jupiter, il s'ensuit que sa latitude auroit dû être de 20″,8, c'est-à-dire, qu'il devoit passer 1″,4 au nord du bord de Jupiter; mais cette distance a été insensible, & il n'étoit pas possible de distinguer le satellite. Au reste, Jupiter étoit fort bas, les irradiations & les aberrations de la lunette pour les deux astres ont bien pu rendre insensible cette distance, & elle a pu être aussi réellement moindre par le défaut des élémens du calcul, c'est-à-dire, de l'inclinaison, du nœud & du rayon de l'orbite du satellite.

Je suppose que la valeur générale du segment invisible pour une distance quelconque x, soit exprimée par la formule $\frac{b}{x^2} + \frac{c}{x} = y$; substituant pour y les segmens observés, & pour x les distances calculées, on a la valeur $\frac{b}{(1,46)^2} + \frac{c}{1,46} = 0,1030$, & $\frac{b}{(1,20)^2} + \frac{c}{1,20} = 0,1465$; d'où j'ai conclu $b = 0,1707$, & $c = 0,0335$. Mais en réduisant les segmens à la hauteur de 38^d & à la distance de Jupiter qui avoit lieu le 25 novembre, j'ai trouvé $b = 0,1796$, & $c = 0,0351$.

Pour réduire les segmens à une distance & à une hauteur différentes de celles qui avoient lieu le 22 février,

j'ai calculé les diſtances de Jupiter au Soleil & à la Terre, en février & en novembre; la diſtance au Soleil en février étoit plus petite dans le rapport de 1 à 1,02; la diſtance à la Terre étoit plus grande dans le rapport de 1 à 1,049; le ſegment inviſible qui étoit plus petit à raiſon de la première circonſtance, & plus grand à raiſon de la ſeconde, & cela dans le rapport des carrés des diſtances, doit être diminué en total dans le rapport de 1 à 1,049, ou multiplié par 0,9446, pour être réduit au 25 novembre.

Les ſegmens inviſibles obſervés le 22 février vers 63^d de hauteur, doivent auſſi être réduits à 38^d, qui étoit la hauteur le 25 novembre, parce que quand les aſtres ſont plus bas, l'atmoſphère intercepte une plus grande partie de leur lumière. Les expériences de Bouguer nous fourniſſent les élémens de cette réduction; nous voyons dans ſa Table, que les quantités de lumière que l'atmoſphère nous tranſmet, ſont à 63^d de 0,792, & à 38^d de 0,712 ſeulement *(Traité d'optique in-4.° page 332)*; il y avoit donc moins de lumière le 25 novembre; le ſegment inviſible étoit plus grand: il faut multiplier ceux de février par 1,112, pour les comparer à ceux de novembre.

J'ai réduit tout au 25 novembre, parce que c'eſt le jour où j'ai fait l'obſervation du diamètre du ſatellite, & que j'ai fait de ſemblables obſervations le 24 & le 25 novembre. Le 24 à $10^h\ 51'$, temps vrai, Jupiter étant élevé de 24^d, le ſatellite étant à $4'\ 39''$ ou 13,71 de diſtance, paroiſſoit à peine avec un diaphragme de trois lignes & demie; le ſegment inviſible étoit 0,006294. Le 25 à $1'\ 9''$ ou 3,39 de diſtance, il étoit, comme on l'a vu ci-devant, 0,0390; d'où j'ai conclu $b = 0{,}2068$, & $c = 0{,}0712$.

Ces quantités ne ſont pas les mêmes que les précédentes, mais elles en approchent aſſez pour l'uſage qu'on en fait, c'eſt-à-dire, pour réduire à une même diſtance les obſervations faites aux environs des immerſions & des émerſions;

ainſi je ſuppoſerai par un milieu que le ſegment inviſible eſt $\frac{0,192}{x^2} + \frac{0,053}{x}$ à 38d de hauteur, & à la diſtance où Jupiter étoit de la Terre & du Soleil le 25 novembre 1788, lorſqu'il eſt vu dans la lunette dont j'ai parlé. Mais il y a apparence que la loi de ces diminutions de lumière eſt fort différente quand on prend deux diſtances fort grandes ou deux diſtances fort petites. Si l'on pouvoit tenir Jupiter derrière une lame par le moyen d'un hélioſtate qui ſuivît le mouvement diurne, on jugeroit encore mieux des groſſeurs des ſatellites.

Si l'on emploie la diſtance du ſatellite au bord de Jupiter plutôt que la diſtance au centre, on trouve cette formule $\frac{0,06127}{x} - \frac{0,0064}{x^2}$; je crois que cette hypothèſe eſt préférable, parce qu'elle donne des réſultats plus uniformes. On trouve en effet, que le ſegment inviſible eſt en raiſon inverſe de la diſtance ſimple; du moins le terme c qui dépend de cette diſtance eſt vingt fois plus fort pour le premier ſatellite que le terme b qui dépend du carré de la diſtance; il eſt dix-ſept fois plus fort pour le ſecond ſatellite, & dix fois pour le troiſième & le quatrième: mais quand on prend, comme M. Bailly, la diſtance du ſatellite au centre de Jupiter, on trouve des diſparates conſidérables entre les termes qui dépendent de la diſtance ſimple & ceux qui viennent du carré pour différens ſatellites. Au reſte, ces termes peuvent avoir un rapport différent pour les ſatellites les plus gros & pour les plus petits, parce que la lumière d'un objet plus petit s'affoiblit plus promptement que celle d'un objet plus gros en approchant d'une groſſe lumière.

On voit par ces réductions combien étoient imparfaites les obſervations des ſatellites lorſqu'on ne faiſoit pas uſage des diaphragmes: auſſi M. Maraldi & M. Meſſier différoient-ils de 12 minutes dans l'immerſion du 25 janvier 1762.

M. de Lambre, en diſcutant au mois de novembre 1788 les obſervations du quatrième ſatellite pour ſes nouvelles Tables, trouvoit des réſultats différens de pluſieurs minutes, tant pour l'équation que pour les mouvemens ſéculaires du ſatellite, de ſon apſide & de ſon nœud, ou pour l'inclinaiſon de ſon orbite, ſuivant qu'il employoit telles ou telles obſervations.

La différence entre l'immerſion obſervée & celle du centre du ſatellite eſt aiſée à calculer par les quantités rapportées ci-deſſus. En effet, la portion du diamètre qui étoit déjà hors de l'ombre quand j'ai commencé à apercevoir le ſatellite, étoit 0,08061 du diamètre, au lieu de 0,08217 que j'ai trouvée 16′ après l'émerſion; cette portion employoit 1′ 2″ de temps à ſortir, & il s'en falloit alors 5′ 23″ que le centre du ſatellite ne fût ſur le bord de l'ombre.

C'eſt ce que M. Bailly appelle *l'équation de M. de Fouchy;* c'eſt cette quantité qu'il faudroit appliquer toujours aux obſervations faites avec différentes lunettes & dans des circonſtances différentes pour pouvoir les comparer entre elles, & c'eſt là le réſultat important pour la théorie des ſatellites de Jupiter.

On a fait deux objections à la méthode des diaphragmes; la première, que la lumière de Jupiter étant diminuée auſſi-bien que celle du ſatellite, on n'avoit pas dans ces obſervations l'effet que l'on ſuppoſe déterminé ſéparément pour le ſatellite; la ſeconde, que l'aberration des lunettes qui agrandit les diamètres d'autant plus que l'ouverture eſt plus grande, produiſoit un effet différent dans les deux immerſions que l'on obſerve. Mais les petites différences qui peuvent en réſulter n'approchent pas des erreurs que l'on commet en négligeant ces précautions, & l'on ne peut rien eſpérer par le progrès de la théorie des ſatellites, tant que l'on ne fera pas uſage des diaphragmes.

MÉMOIRE

SUR LES SATELLITES DE SATURNE.

Par M. DE LA LANDE.

LORSQUE je rappelai en 1786 l'attention des aſtronomes vers les ſatellites de Saturne, qui étoient oubliés depuis ſoixante-dix ans *(a)*, je remarquai des erreurs de vingt degrés dans les Tables de Caſſini, & je me propoſai dès-lors d'en donner de nouvelles dans la troiſième édition de mon ASTRONOMIE ; M. Bernard voulut bien me fournir des obſervations, & cette année dans mon voyage d'Angleterre, M. Herſchel m'en a donné quelques-unes, en ſorte que je ſuis en état de rectifier les moyens mouvemens de tous les ſatellites de Saturne.

Je comptois employer les anciennes obſervations telles que Caſſini le fils les rapporta dans les Mémoires de 1716; mais ayant voulu les comparer avec mes nouveaux élémens, je n'ai pas tardé à apercevoir une faute que tous les aſtronomes ont faite, & qui ſeule a produit des erreurs de deux ou trois degrés dans les poſitions que l'on nous a tranſmiſes ; c'eſt la réduction des longitudes à l'orbite de chaque ſatellite.

Les longitudes de Saturne ſe comptent ſur l'écliptique, celles des ſatellites ſe comptent ſur leurs orbites ; on ne peut donc les comparer enſemble ſans réduire celles de Saturne à l'orbite du ſatellite ; & comme l'inclinaiſon eſt de 30^d, la réduction eſt très-conſidérable. La latitude de Saturne augmente encore la néceſſité de cette réduction.

(a) Les dernières obſervations étoient de 1718. Pound *Phil. tranſ.* 1718, n.° 355, p. 772.

Toutes

Toutes les obſervations que l'on a faites ſur les ſatellites de Saturne ſe rapportent à ſon anneau. Caſſini appelle la conjonction ſupérieure d'un ſatellite ou ſon apogée, le point où il répond perpendiculairement ſur la ligne des anſes, étant ſitué ſur le petit axe de l'anneau ; il obſervoit la conjonction des ſatellites avec une des anſes, ou bien le paſſage ſur cette ligne ; M. Bernard & M. Herſchel ont fait la même choſe : ainſi dans toutes ces obſervations on obſerve la diſtance au petit axe de l'anneau. Pour le cinquième ſatellite, ſi l'on détermine ſa diſtance à la conjonction, alors c'eſt ſur le petit axe de ſon orbite qu'on la ſuppoſe arriver, & c'eſt une autre réduction qu'il faut faire.

Or quand nous obſervons un ſatellite en conjonction avec Saturne ſur le petit axe de l'orbite apparente du ſatellite, la Terre & les deux aſtres ſont dans un plan perpendiculaire au plan de l'orbite du ſatellite ; car quand un cercle vu obliquement paroît ſous la forme d'une ellipſe, le petit axe eſt toujours dans le plan perpendiculaire au plan du cercle. Ainſi nous rapportons Saturne & le ſatellite perpendiculairement ſur l'orbite de celui-ci, mais alors le lieu du ſatellite compté ſur cette orbite n'eſt pas le lieu de Saturne compté ſur l'écliptique.

Soit *A N* l'écliptique, *A S* la latitude de Saturne, $1^d\ 34'$ boréale ; *N B* l'orbite des quatre premiers ſatellites, dont le nœud *N* étoit en 1787 à $5^s\ 17^d\ 15'$, & dont l'inclinaiſon *N* eſt de $31^d\ \frac{1}{2}$, *B* le point de la conjonction. Si la diſtance *A N* entre le nœud *N* & Saturne, eſt de $23^d\ 26'$, la diſtance *N B* n'eſt que de $19^d\ 30'$; il faut donc ôter $3^d\ 56'$ de la longitude de Saturne en *A* pour avoir la longitude du ſatellite en *B*, comme on le trouve en réſolvant les deux triangles *S N A*, *S N B*. Le point *S*, où je ſuppoſe Saturne, peut être conſidéré comme le point du ciel directement

opposé à la Terre, ayant une latitude égale à celle de Saturne vu de la Terre; alors *N B* est l'orbite du satellite autour de Saturne, & *N A* l'écliptique vue de Saturne; mais le point *S* & le point *B* sont toujours sur l'arc *S B* perpendiculaire à l'orbite, si *B* est le point de la conjonction ou le petit axe de l'orbite du satellite.

Pour le cinquième satellite, il faut distinguer la manière dont on a fait les observations. Celles que j'ai rapportées (*Mém. 1786, page 383*) étant faites par rapport à la perpendiculaire à son orbite, le point *N* est le nœud du cinquième satellite; mais l'observation de 1673 que j'ai employée & que j'ai réduite de même, pourroit bien avoir été faite par rapport à la ligne des anses, parce qu'alors on croyoit que le satellite tournoit dans le même plan que les autres : or Cassini disant que le satellite étoit à 6^d 40′ de son périgée (*Mém. 1716, p. 216*), pourroit bien avoir pris pour périgée le petit axe de l'anneau; la différence feroit 40′ dans la réduction. Cependant comme plusieurs jours d'observations rapportées sur une figure, indiquent naturellement le passage par le petit axe de l'ellipse, je crois plus naturel de supposer que c'est-là ce qu'il a entendu par le périgée du satellite.

Pour corriger encore un peu les anciens résultats de Cassini, j'ai calculé les longitudes de Saturne par les Tables de Halley, & j'y ai appliqué l'erreur des Tables que Halley avoit déterminée; par ce moyen j'ai eu les résultats suivans pour les dix observations dont Cassini s'étoit servi pour construire ses Tables. Ces observations sont rapportées dans les Mémoires de 1716, & je les ai encore insérées dans ceux de 1786, *page 385*; mais les voici plus exactement.

	TEMPS MOYEN des obſervations.				LONGITUDES des Satellites.			CORRECT. des Tables.	
		H.	M.	S.	D.	M.	S.	D.	M.
I.	1685 31 Mars	10.	19.		4.	5.	40	+ 1.	52
	1714 18 Avril	9.	36.		1.	0.	23	+ 2.	30
II.	1685 24 Avril	8.	38.		10.	13.	47	+ 1.	52
	1714 7 Mai	9.	26.		3.	22.	42	+ 2.	11
III.	1673 25 Juillet	12.	5.	46	1.	11.	17	− 2.	46
	1714 4 Avril	10.	3.		11.	26.	52	+ 2.	23
IV.	1659 14 Mars	8.	9.	20	0.	25.	44	− 4.	2
	1714 11 Février	10.	14.	53	11.	11.	11	+ 1.	59
V.	1673 16 Juillet	12.	5.	20	6.	19.	49	+ 0.	3
	1714 5 Mai	9.	26.		4.	28.	22	+ 0.	14

On voit que les Tables de Caſſini ne s'accordent point avec les obſervations qui lui avoient ſervi pour les conſtruire, & cela vient principalement de la réduction dont j'ai parlé, & qu'il avoit omiſe.

Pour établir les époques des ſatellites au temps préſent, j'ai fait uſage des obſervations de M. Bernard, que j'ai rapportées dans les Mémoires de 1786, *p. 384*, & j'y ai joint celles de M. Herſchel que je vais rapporter.

Premier ſatellite. Le 19 août 1787, $12^h\ 29'$, temps moyen réduit au méridien de Paris : il étoit à gauche, exactement ſur la ligne des anſes.

Le 20 août, $12^h\ 25'$, il étoit à droite ſur la ligne des anſes; le milieu donne la conjonction ſupérieure.

Le 30 ſeptembre, $9^h\ 18'$, il étoit près de la perpendiculaire menée ſur l'anneau à l'extrémité de l'anſe, avant ſa conjonction inférieure.

Second ſatellite. Le 10 ſeptembre, 9^h $37'$, dans la perpendiculaire menée par une anſe.

Le 24 ſeptembre, 10^h $3'$, dans la perpendiculaire menée par l'autre anſe.

Troiſième ſatellite. Le 30 août, 10^h $38'$, il étoit en conjonction ſupérieure ſur le petit axe de l'anneau.

Le 8 ſeptembre, 10^h $50'$, auſſi en conjonction ſupérieure.

Quatrième ſatellite. L'obſervation que l'on verra ci-après, de l'ombre au milieu de Saturne, le 2 novembre 1789, à $10^h 43'$ eſt certainement la plus exacte de toutes; mais comme elle eſt unique, elle n'apprend rien pour une orbite où il y a 5 ou 6 degrés d'équation; il en faudroit trois de même eſpèce, & tout le ſoin que j'ai mis à la calculer & à la réduire, ne lui donne aucun avantage.

Mais comme j'avois ſept obſervations de M. Bernard, je les ai toutes calculées; voici les erreurs des Tables de Caſſini, ou les corrections qu'il faut y faire pour chacune, en y joignant celle de M. Herſchel: le réſultat moyen eſt 1^d $21'$ à ajouter aux époques de Caſſini pour 1788, tandis qu'en 1659 il y avoit 4^d $2'$ à ôter; cela fait 5^d $23'$ pour 129 ans, ou $2'$ $30''$ par année à ajouter au mouvement du quatrième ſatellite.

	D. M.
11 Août 1787	— 2. 13
26 Juillet	— 2. 46
2 Nov. 1789	— 3. 53
28 Sept. 1787	— 5. 26
3 Sept.	+ 5. 14
21 Octob.	+ 6. 10
9 Octob.	+ 6. 46
18 Août 1786	+ 7. 0

Mais comme l'obſervation de 1659 eſt unique, & qu'elle pourroit être de 5 ou 6 degrés plus ou moins forte que la longitude moyenne, on pourroit diſcuter les obſervations de Caſſini rapportées dans les Mémoires de 1718; c'eſt ce que je ferai quand j'aurai raſſemblé un plus grand nombre d'obſervations modernes: M. Herſchel m'a promis d'en publier, & je les attends avec impatience pour déterminer l'apſide du quatrième ſatellite. En attendant, elle me paroît comme celle du Soleil, vers trois ſignes de longitude, avec une équation de cinq ou ſix degrés, comme celle de la Lune.

En réuniſſant ces obſervations avec celles de M. Bernard, j'ai eu les poſitions ſuivantes avec la correction des Tables de M. Caſſini.

		H. M.	D. M. S.	D. M.
I.	1787 19 Août	12. 29	10. 28. 59	+ 19. 52
	20 Août	12. 25		
	9 Sept.	7. 53	1. 27. 50	15. 41
	30	9. 18	3. 28. 18	20. 15
	20 Déc.	6. 30	1. 28. 29	16. 12
	L'erreur moyenne eſt 18^{d}.			
II.	1787 10 Sept.	9. 37	4. 5. 54	+ 10. 42
	24 Sept.	10. 3	2. 18. 48	+ 9. 46
	L'erreur moyenne eſt 10^{d} 14'.			
III.	1787 30 Août	10. 38	10. 28. 39	− 3. 28
	8 Sept.	10. 50	10. 27. 47	− 2. 3
	L'erreur moyenne eſt 2^{d} 45'.			
IV.	1787 26 Juiller	10. 43	5. 3. 38	− 2. 46
	11 Août	11. 13	5. 6. 24	− 2. 13
	18 Août	10. 39	10. 22. 37	+ 7. 0
	3 Sept.	10. 4	10. 21. 32	+ 5. 14
	Le milieu eſt + 1^{d} 21', comme on l'a vu ci-deſſus.			
V.	1787 24 Août	1. 7	10. 25. 26	− 7. 59
	23 Nov.	6. 20	5. 15. 44	− 5. 13
	21 Déc.	5. 46	9. 19. 11	− 8. 43
	Le milieu eſt − 7^{d} 18'.			

En comparant ces erreurs avec celles des plus anciennes obſervations rapportées ci-deſſus, je trouve qu'il faut faire aux moyens mouvemens des Tables de Caſſini, les corrections ſuivantes. J'en ai conclu le mouvement annuel, & j'y ai joint celui qui fut donné par Caſſini *(Mém. de l'Acad. 1716)*, & par Bradley *(Phil. tranſ. 1718, n.° 356)*: on verra par la comparaiſon, que les Tables de Bradley étoient beaucoup moins exactes pour les quatre derniers ſatellites, que celles de Caſſini; auſſi Halley, dans ſon recueil de Tables, préféra celles-ci, par le conſeil même de Bradley.

Satellites.	CORRECTIONS À FAIRE aux Tables de Caſſini.	Mouvement ann. ſuivant nous.	Mouvement ann. ſuivant Caſſini.	Mouvement ann. ſuivant Bradley.
	D. M.	*S. D. M. S.*	*S. D. M. S.*	*S. D. M. S.*
I.	ajoutez 16. 8 au mouvement de 102 ½ ans.	4. 4. 44. 42	4. 4. 35. 15	4. 4. 42. 51
II.	ajoutez 8. 22 pour 102 ½.	4. 10. 15. 19	4. 10. 10. 25	4. 10. 1. 59
III.	ôtez 0. 1 pour 114 ans.	9. 16. 57. 5	9. 16. 57. 5	9. 17. 1. 42
IV.	ajoutez 5. 23 pour 128 ½ ans.	10. 20. 39. 37	10. 20. 37. 7	10. 20. 35. 6
V.	ôtez 7. 21 pour 114 ½ ans.	7. 6. 23. 37	9. 6. 27. 28	7. 6. 31. 33

D'après ces élémens, j'ai fait de nouvelles Tables des ſatellites de Saturne qui ſont dans la *Connoiſſance des temps de 1791 & 1792*. Je n'ai point tenu compte des inégalités des ſatellites : il y aura donc ſouvent deux ou trois degrés d'erreur, mais nous n'avons point encore aſſez d'obſervations pour entreprendre la recherche des inégalités des ſatellites; il ſuffit de pouvoir bien les reconnoître toutes les fois qu'on voudra les obſerver, & il étoit néceſſaire de corriger des erreurs de 7^d, 10^d & 18^d dans les Tables dont on ſe ſervoit juſqu'à préſent; il étoit ſur-tout néceſſaire de rectifier l'erreur que tous les aſtronomes avoient commiſe en calculant les longitudes des ſatellites par leurs obſervations.

J'ai parlé ci-dessus d'une observation curieuse de M. Herschel; il m'a écrit le 26 février 1790, qu'il avoit observé le passage de l'ombre du 4.e satellite sur le disque de Saturne, & qu'il étoit central le 2 novembre 1789, à $10^h\ 31'\ 25'',5$, temps moyen à Slough, ou $10^h\ 43'\ 9''$, temps moyen à Paris : la longitude de Saturne sur son orbite, étoit $11^s\ 21^d\ 33'$, & celle du satellite sur la sienne, $5^s\ 21^d\ 13'$. Cette observation donne pour la longitude du satellite $5^d\ 34'$ de moins que mes Tables; mais cette différence vient sans doute de l'équation de l'orbite du satellite, que nous déterminerons quand nous aurons un plus grand nombre d'observations. L'erreur des Tables de Cassini pour cette observation, n'est que de $3^d\ 53'$; ainsi il auroit fallu diminuer la longitude de ces Tables, au lieu que je l'ai augmentée; mais les observations du 18 août & du 3 septembre 1786 l'exigeoient évidemment.

Au moment où l'on finissoit l'impression de ce Mémoire *(25 janv. 1791)*, j'ai reçu les observations de M. Herschel, avec de nouvelles Tables des satellites de Saturne, par ce célèbre observateur; je les ai comparées avec ses observations, & j'ai trouvé que mes Tables s'accordoient mieux que celles de M. Herschel avec ses propres observations, en faisant les réductions dont j'ai parlé, comme je le ferai voir dans un troisième Mémoire sur les satellites de Saturne.



ÉCLIPSES DE SOLEIL ET D'ÉTOILES,

Obſervées en 1787 & 1788, avec les réſultats des Obſervations pour les Longitudes de divers pays.

Par M. DE LA LANDE.

LES occultations des étoiles η & μ des Gémeaux ont été obſervées à Paris & en pluſieurs autres endroits, le 26 novembre 1787; voici les obſervations & les calculs, en ſuppoſant la parallaxe de la Lune à Paris, 60′ 59″,7, à 11^h 33′ 40″ de temps vrai; & le mouvement horaire, 37′ 35″,3 en longitude, & 3′ 27″,3 en latitude.

M. le François, mon neveu, qui s'occupe de l'aſtronomie avec moi depuis pluſieurs années, a obſervé au Collége royal, 2″,2 à l'orient de l'Obſervatoire, l'immerſion de η, 11^h 33′ 40″, temps vrai; & l'émerſion, 12^h 42′ 27″. L'immerſion de μ, 15^h 44′ 45″; & l'émerſion, 16^h 16′ 51″; d'où il réſulte que la conjonction avec η eſt arrivée à 12^h 35′ 28″; longitude de la Lune, 3^s 0^d 29′ 15″; latitude, 23′ 48″ *A*. la conjonction avec μ, 15^h 33′ 34″; longitude, 3^s 2^d 20′ 40″; latitude, 33′ 49″ $\frac{1}{2}$.

A Greenwich, immerſion de la première, 11^h 22′ 51″,7; émerſion, 12^h 31′ 45″,0; conjonction, 12^h 26′ 4″,5; latitude, 23′ 43″. Immerſion de la ſeconde, 15^h 38′ 34″,7; émerſion, 15^h 53′ 48″,0; conjonction, 15^h 24′ 14″,7; latitude, 33′ 51″.

A Marſeille, par M. Bernard; immerſion de la première, 11^h 51′ 28″; émerſion, 12^h 51′ 32″; conjonction, 12^h 47′ 28″; latitude, 23′ 42″. Immerſion de la ſeconde,

seconde, $15^h\ 56'\ 59''$; émersion, $16^h\ 48'\ 28''$; conjonction, $15^h\ 45'\ 35''\frac{3}{4}$; latitude, $33'\ 50''$.

A Vérone, par M. Cagnoli, immersion de la première étoile, $12^h\ 20'\ 49''$; émersion, $13^h\ 27'\ 16''$: celle-ci est plus sûre. Conjonction, $13^h\ 9'\ 48''$; latitude, $24'\ 0''$; cette latitude étant trop grande, rend l'immersion suspecte. En n'employant que l'émersion, on trouve la conjonction, $13^h\ 10'\ 0''$, & la différence des méridiens, $34'\ 34''$, au lieu qu'on ne trouve que $34'\ 12''$ par l'immersion. M. Cagnoli trouve par un milieu entre plusieurs observations, $34'\ 42''$, & sa latitude, $45^d\ 26'\ 7''$.

A Gotha, par M. Zach, immersion de la première étoile, $12^h\ 18'\ 38'',8$; émersion, $13^h\ 29'\ 30'',8$; conjonction, $13^h\ 8'\ 53'',6$; latitude, $24'\ 8''$. La différence des méridiens avec Paris seroit $33'\ 27''$; mais comme la latitude ne devroit être que de $23'\ 42''\ \frac{1}{2}$, il y a lieu de croire qu'une des deux observations a moins bien réussi : l'immersion seule donne la différence des méridiens, de $33'\ 18''$; l'émersion seule donne $33'29''$, ce qui me paroît plus exact, parce que j'avois trouvé $33'\ 34''$ par l'éclipse de ι du Taureau, le 18 octobre 1788. Comme l'émersion se faisoit ici à la partie obscure de la Lune, elle étoit en effet susceptible d'une plus grande précision, & je préfère le résultat de $33'\ 29''$.

En prenant le milieu entre les observations des deux étoiles, on a la longitude de la Lune le 26 novembre, $12^h\ 23'\ 16''$, temps moyen, réduit à l'Observatoire royal; $3^f\ 0^d\ 29'\ 11''$; & la latitude, $23'\ 41''$. La correction à faire aux Tables, telles qu'elles sont dans mon *Astronomie*, 3.e édition, est $0''$ pour la longitude, & $+\ 1''$ pour la latitude.

On a aussi très-bien observé l'occultation de Jupiter par la Lune, le 14 mars 1788.

Ce jour-là on étoit assemblé au Palais-royal pour voir Jupiter à côté de la Lune, qui faisoit un spectacle singulier, sur-tout après l'émersion.

Immersion du premier bord de Jupiter, au Collége royal	4^h	46′	33″,	temps vrai.
Immersion totale	4	47	50.	
Emersion du premier bord	6	4	49.	
Émersion du second bord	6	5	59.	

J'ai employé la seconde & la quatrième observation pour trouver la conjonction.

J'ai supposé le mouvement horaire de la Lune, 34′ 51″,9 en longitude, & 3′ 5″,6 en latitude; la parallaxe horizontale de la Lune pour Paris, 58′ 55″ & 58′ 56″; le diamètre horizontal de la Lune, 32′ 7″,4 & 32′ 6″,9; celui de Jupiter, 36″.

J'ai trouvé la conjonction, 5^h 22′ 32″, temps vrai, ou 5^h 31′ 39″, temps moyen, au méridien de l'Observatoire royal. La longitude calculée par les Tables, étoit 2^s 18^d 16′ 27″,6, plus grande de 2″ $\frac{1}{2}$ que celle de Jupiter, suivant l'observation du P. Fixlmillner; & la latitude, 14′ 43″ *B*.

Le 18 octobre 1788, l'étoile *ι* du Taureau a été éclipsée par la Lune; l'immersion, 10^h 57′ 41″ $\frac{1}{2}$; émersion, 11^h 49′ 9″ $\frac{1}{2}$, par M. le François mon neveu, au Collége royal. M.rs Méchain & Messier ont eu quelques secondes de différence pour l'immersion; en supposant 44″, on trouve la conjonction vraie, 12^h 12′ 50″, temps vrai réduit à l'Observatoire, avec 2^s 13^d 50′ 40″ de longitude, & 29′ 16″ de latitude. J'ai supposé 1^d 13′ 20″ pour la latitude apparente de l'étoile, cette année, en tenant compte du changement de latitude, à raison de 50″ pour la diminution séculaire. J'ai supposé la parallaxe horizontale pour Paris, 58′ 14″ plus petite que celle qu'on a employée jusqu'ici, parce qu'il me paroît que l'aplatissement de la Terre n'est pas aussi considérable que les astronomes l'ont supposé. Le mouvement horaire en longitude étoit 34′ 16″,3, & 3′ 5″,0 en latitude;

le demi-diamètre horizontal de la Lune, 15′ 54″,3; d'après les nouveaux calculs que j'ai présentés à l'Académie; j'en ôte 2″ pour l'inflexion. Par les nouvelles Tables de la Lune, de Mason, publiées en Angleterre, on trouve la longitude, 2ˢ 13ᵈ 50′ 40″; & la latitude, 29′ 9″; ainsi l'erreur est nulle en longitude, elle est + 7″ en latitude : c'est la correction à appliquer aux Tables pour les accorder avec l'observation.

M. Zach m'ayant envoyé son observation, 11ʰ 40′ 50″, & 12ʰ 32′ 57″, à Gotha, j'en ai déduit la conjonction, 12ʰ 46′ 23″ ½; & la différence des méridiens, 33′ 33″ ½, au lieu de 33′ 40″ que nous supposions auparavant.

Le 18 novembre, la première des deux α du Cancer a été éclipsée: immersion, 17ʰ 54′ 32″; émersion, 18ʰ 47′ 21″, au Collége royal; conjonction, 18ʰ 12′ 14″,7, temps vrai réduit à l'observatoire; longitude apparente de l'étoile, par le catalogue de Mayer, 4ˢ 10ᵈ 9′ 48″; latitude de l'étoile, 5ᵈ 29′ 40″,3; latitude de la Lune par l'observation, 4ᵈ 40′. 47″,5; erreurs des Tables en longitude, + 4″, en latitude, + 4″; parallaxe, 59′ 20″; mouvement horaire, 35′ 40″,9, & 1′ 31″,2; demi-diamètre horizontal de la Lune, 16′ 12″,3.

Le 21 novembre, immersion de l'étoile *e* du Lion, 14ʰ 23′ 32″; émersion, 15ʰ 19′ 52″ ½, au Collége royal; conjonction, 16ʰ 18′ 27″, temps vrai, ou 16ʰ 5′ 2″, temps moyen, à l'Observatoire; longitude de l'étoile, 5ˢ 21ᵈ 26′ 9″; latitude, 5ᵈ 42′ 3″; latitude de la Lune, 5ᵈ 8′ 14″, par l'observation; l'erreur des Tables en longitude est nulle, en latitude — 10″. J'ai supposé la parallaxe horizontale; 58′ 38″,6 pour l'immersion, 58′ 37″,8 pour l'émersion; les mouvemens horaires, 34′ 51″,3, & 44″,9; le demi-diamètre horizontal de la Lune, 16′ 1″.

L'éclipse de Soleil du 4 juin 1788, n'a pu être observée à Paris, mais elle l'a été en plusieurs endroits de l'Europe, & M. de Beauchamp l'a observée à Bagdad;

elle a été totale à Alep : mais revenant de ſon voyage de Perſe, pour la détermination de la mer Caſpienne, & ayant pris la fièvre, il n'a pu ſe tranſporter dans les parties de l'Aſie où il auroit eu la ſatisfaction d'obſerver l'éclipſe totale.

M. Piazzi, aſtronome de Palerme, qui étoit à Londres, ainſi que M. Darquier, correſpondant de l'Académie, ont obſervé cette éclipſe à Greenwich, avec M. Maskelyne, aſtronome royal : commencement, le 3 à $19^h\ 24'\ 46'',5$, temps vrai; fin, $21^h\ 1'\ 24''$. M. Piazzi en a déduit la conjonction à $20^h\ 58'\ 47'',3$; & la latitude de la Lune, $14'\ 48''$ *B*. La longitude du Soleil, calculée par les nouvelles Tables de M. de Lambre, étoit alors $2^s\ 14^d\ 16'\ 39''$. Les nouvelles Tables de la Lune, de M. Maſon, donnent $17''$ de plus pour la longitude de la Lune, & $13''$ de trop pour la latitude.

En prenant le milieu entre les obſervations de Greenwich, d'Oxford & de Loampit-hill, & ſuppoſant Paris de $9'\ 18'',8$ à l'orient de Greenwich, comme le trouve M. le général Roy, par ſes triangles, on a la conjonction pour Paris, $21^h\ 8'\ 6'',7$, temps vrai.

M. de Beauchamp obſerva la fin de l'éclipſe le 4, à $1^h\ 26'\ 19''$, ſous la latitude de $33^d\ 19'\ 32''$. Suppoſant la différence des parallaxes, $60'\ 18'',4$ à Bagdad ; le demi-diamètre apparent de la Lune, $16'\ 44'',1$; celui du Soleil, $15'\ 43'',5$; la différence des mouvemens horaires en longitude, $34'\ 30'',0$; le mouvement horaire en latitude décroiſſante, $3'\ 25'',5$, j'ai trouvé la conjonction, le 3, à $23^h\ 56'\ 12''$, & la différence des méridiens, $2^h\ 48'\ 5''$: elle eſt moindre ſeulement de $4''$ que celle que M. de Beauchamp avoit déduite de ſes obſervations des ſatellites de Jupiter. Le commencement qu'il avoit eſtimé à $10^h\ 30'\ 51''$, étant comparé avec la fin, m'a donné la conjonction, $23^h\ 56'\ 11''\frac{1}{2}$; ainſi il paroît que l'eſtime étoit exacte ; mais la fin ne donne que $2^h\ 47'\ 51''$ pour la différence des méridiens,

Voici les autres obſervations, avec les réſultats que M. Piazzi en a tirés : il les avoit publiés dans les Tranſactions philoſophiques de 1789 ; mais il m'a envoyé des calculs refaits depuis la publication, en employant 6″,5 pour l'inflexion & l'irradiation, & qui lui ont donné 14′ 58″ pour la latitude de la Lune en conjonction. On voit dans les deux dernières colonnes, la conjonction déduite ſéparément du commencement & de la fin, en ſuppoſant la latitude, 14′ 58″, & ôtant 6″,5 de la ſomme des demi-diamètres.

	Commenc.	Fin.	Conjonction.	Latitude de la Lune.	Conj. par le com.	Conj par la fin.
	H. M. S.	H. M. S.	H. M. S.	M. S.	S.	S.
A Loampit-hill, M. Aubert.	19. 24. 41,9	21. 1. 20,3	20. 58. 44,1	14. 48,2	44,1	44,2
A Oxford, M. Hornſby...	19. 20. 36,1	20. 54. 40,0	20. 53. 46,2	14. 48,7	43,8	47,1
A Dublin, M. Uſſher.....	19. 5. 46,5	20. 27. 42,1	20. 33. 33,9	14. 48,3	37,6	30,2
A Mitau, M. Beitler......	21. 20. 15	23. 8. 52	22. 33. 41,5	14. 48,7	37,6	45,0
A Berlin, M. Bode.......	20. 23. 9	22. 14. 32	21. 52. 20,3	14. 44,2	22,9	14,0
A Cremſmunſter, M. Fixlmillner.............	20. 15. 20	22. 19. 50,7	21. 54. 59	14. 23	21,2	37,0
A Vienne, M. Trieſnecker.	20. 25. 49	22. 32. 40	22. 4. 18,8	14. 39	24,2	13,8
A Perinaldo, M. Maraldi..	19. 37. 50	....	21. 29. 40			
A Milan, M.rs de Ceſaris & Reggio............	19. 48. 23	21. 51. 14	21. 35. 24,7	14. 32	25,2	25,0
A Padoue, M. Ciminello..	19. 59. 20	22. 6. 58	21. 46. 21,3	14. 39	25,1	17,9
A Bologne, M. Mateucci..	19. 55. 10 ½	22. 3. 45 ½	21. 44. 15,3	14. 31,0	28,3	4,2
A Viviers, M. Flaugergue..	19. 26. 38	21. 25. 41	21. 17. 29	14. 33	41,2	18,4
A Rouen, M. du Lague...	....	21. 7. 15	21. 3. 9,6	....	....	10,6
A Marſeille, M. Bernard...	19. 26. 42	21. 29. 23,5	21. 20. 17,5	14. 40	20,4	14,3

M. Gerſtner, profeſſeur d'aſtronomie à Prague, m'a envoyé de ſemblables calculs qu'il a faits par ſa méthode analytique, pour cinq endroits différens.

	COMMENCEMENT observé.			FIN observée.			CONJONCTION par le commenc.			CONJONCTION par la fin.		
	H.	M.	S.	H.	M.	S.	H.	M.	S.	H.	M.	S.
Greenwich. . .	19.	24.	46,5	21.	1.	25,5	20.	58.	42,9	20.	58.	43,0
Marſeille. . . .	19.	26.	42	21.	29.	23,5	21.	20.	10,1	21.	20.	10,3
Cremſmunſter. .	20.	15.	20	22.	19.	50,7	21.	55.	15,3	21.	55.	15,0
Vienne.	20.	25.	49	22.	32.	40	22.	4.	17,4	22.	4.	14,6
Prague.	20.	21.	31	22.	21.	15	21.	56.	26,0	21.	56.	28,8

M. Piazzi trouve la conjonction à Prague, $21^h\ 56'\ 30''$, & la latitude, $14'\ 45''$: la conjonction, par le commencement, eſt à $33'',8$, & par la fin, à $26'',1$, en tenant compte de l'inflexion, & ſuppoſant la latitude en conjonction, $14'\ 58''$.

J'ajouterai encore ici les obſervations faites en Suède.

A Stockholm, M. Nicander.	21^h	$2'$	$21'',3.$	22^h	$35'$	$33'',4.$
A Lund, M. Lidtgren.	20	25	53,5.	22	12	2,8.
A Abo, M. Lindquiſt.	21	24	10.	22	56	7.

Latit. $60^d\ 27'\ 7''$.

M. Piazzi trouve la conjonction, $22^h\ 27'\ 50'',7$, par le commencement; & $20'',4$ ſeulement par la fin.

A Varſovie, M. Biſtrzki. . . . . 20 56 45. 22 57 33.

Celle-ci donne la conjonction à $22^h\ 22'\ 59'',3$, & la latitude, $14'\ 44''$, ſuivant les calculs de M. Piazzi ; mais en tenant compte de l'inflexion, il trouve, par le commencement, $61'',7$; & par la fin, $55'',7$ ſeulement.

A Lilienthal, par M. Nahe, fin, $21^h\ 49'\ 50''6$; latit. $53^d\ 8'\ 25''$, $26'$ à l'orient de Paris; la conjonction, $9^h\ 34'\ 38''$; différence des méridiens, $26'\ 30''$.

Cet obſervatoire, devenu remarquable actuellement, méritoit qu'on en déterminât bien la poſition.

Cette éclipſe donne pour Périnaldo, la conjonction, $21^h\ 29'\ 40''$, & la différence des méridiens, $21'\ 36''$. Comme cet endroit eſt remarquable par les obſervations de feu M. Maraldi, j'ai voulu m'en aſſurer par une autre obſervation. Le 18 novembre 1774, M. Maraldi obſerva l'éclipſe d'Aldebaran, à $16^h\ 9'\ 48''$ (*Mém. de l'Académ. 1777*); en employant les élémens donnés par M. Lexell, dans les Mémoires de Péterſbourg pour 1774, je trouve la conjonction, $15^h\ 27'\ 58''$; & comme M. Lexell la trouvoit pour Paris, $15^h\ 6'\ 23''$, cela donne pour la différence des méridiens, $21'\ 35''$. L'émerſion obſervée à Périnaldo ne s'accorde point avec l'immerſion, & je m'en ſuis tenu à l'immerſion. Ce réſultat eſt aſſez bien d'accord avec celui de M. Piazzi. M. Méchain a trouvé, il eſt vrai, $21'\ 44''$, par l'occultation d'Aldebaran du 1.er novembre 1773, obſervée à $9^h\ 46'\ 29''$; mais M. Maraldi n'étoit pas aſſez ſûr de cette obſervation pour qu'elle doive balancer le réſultat de $21'\ 35''$.

Depuis que M. Piazzi eut achevé ſes calculs, je lui écrivis que je diminuois les parallaxes de la Lune de $5''$, en réduiſant l'aplatiſſement de la Terre à $\frac{1}{300}$, ce qui donne pour l'angle de la verticale à Greenwich, $11'\ 12''$; alors il trouve la conjonction, $20^h\ 58'\ 42''$, au lieu de $47'',3$; la latitude, $14'\ 59'',7$, au lieu de $48''$; la correction des Tables, $-\ 17''$ en longitude, & $-\ 2'',6$ en latitude, en prenant les Tables de la Lune, telles que je les ai données dans la troiſième édition de mon *Aſtronomie*, où les époques & les moyens mouvemens ſont un peu corrigés. Le 3 juin à $21^h\ 3'\ 58''$, temps moyen, elles donnent la longitude, $2^s\ 14^d\ 16'\ 56''$.

A ces réſultats ſur l'éclipſe de 1788, j'en ajouterai un ſur celle de 1787, par une obſervation qui m'eſt parvenue depuis la publication des Mémoires de 1787, où j'ai donné les réſultats de cette éclipſe. L'obſervation fut faite

à Gothaab, ſur la côte occidentale du Groenland, par M. Ginge, miſſionnaire Danois, à 64^d $10'$ de latitude: commencement, le 14 juin à 11^h $43'$ $6''$ du matin; fin, à 1^h $29'$ $38''$; conjonction, 0^h $22'$ $26''$; différence des méridiens, 3^h $36'$ $7''$; latitude en conjonction, $59'$ $51''$, plus petite de $17''$ que je ne l'avois trouvée par les autres obſervations. La différence n'étant pas très-conſidérable, prouve que l'obſervation eſt aſſez bonne, ſur-tout pour déterminer la poſition d'une côte auſſi peu connue. On peut voir dans les Éphémérides de Vienne pour 1790, pluſieurs obſervations des ſatellites, faites dans le même endroit, par leſquelles M. Méchain a déterminé la différence des méridiens, 3^h $36'$ $32''$. Il a auſſi calculé l'obſervation de l'éclipſe; & il trouve, 3^h $36'$ $26''$, en n'employant que la fin de l'éclipſe, qu'on doit préſumer plus exacte que le commencement.



MÉMOIRE

Sur l'Éclipse de Soleil du 16 Août 1765, observée à Rome.

Par M. DE LA LANDE.

J'OBSERVAI cette éclipse à Rome; je calculai la conjonction le même jour, & je l'envoyai à l'Académie. A mon retour, je voulus y ajouter de nouvelles comparaisons & de nouveaux calculs; mais d'autres occupations ont retardé ce travail jusqu'à présent. Cependant j'ai cru devoir y revenir, & j'en profiterai pour employer les nouvelles Tables du Soleil & de la Lune, & des élémens plus exacts, pour comparer plusieurs autres observations de la même éclipse, qui serviront à établir les longitudes de divers endroits.

J'étois au collége Romain de Saint-Ignace, avec trois astronomes habiles, le P. Boscovich, M. Zanotti, qui étoit venu à Rome à l'occasion des eaux de Bologne, & le P. Asclepi, professeur du collége Romain. Nous avions un télescope de deux pieds de foyer, garni d'un micromètre objectif fait par Short, que M. le Prince de Palestrine nous avoit confié, & une lunette acromatique de Dollond, qui a dix pieds de foyer, que M. le marquis Gabrielli nous avoit aussi prêtée. J'avois pris des hauteurs correspondantes; mais le mauvais temps diminua beaucoup le succès de nos préparatifs.

A $4^h\ 54'\ 30''$, temps vrai, j'aperçus au travers des nuages, que l'éclipse venoit de commencer. Le P. Audiffredi, qui étoit à la Minerve avec une lunette de dix-neuf palmes, ou treize pieds, faite par Eustachio de Divinis, opticien connu, l'aperçut 5″ plus tôt, ou à $4^h\ 54'\ 25''$.

Je mesurai ensuite les distances des cornes de l'éclipse, tant que les nuages me le permirent.

TEMPS VRAI à Rome.			DISTANCES des cornes.	
H.	*M.*	*S.*	*M.*	*S.*
4.	59.	40	9.	22
5.	2.	5	11.	15
5.	4.	36	12.	30
5.	8.	13	14.	30
5.	11.	30	15.	15
5.	12.	35	15.	54
5.	16.	52	16.	46

A Greenwich, le commencement fut observé à $3^h\ 42'\ 52''$, de temps vrai; & la fin, à $4^h\ 59'\ 24''$. *Éphémérides, Berlin 1780, page 175.* Observations de M. Maskelyne, *page 19.*

A Londres, M. Short observa la fin, à $4^h\ 58'\ 57''$.

A Leyde, M. Lulofs observa la fin à $5^h\ 18'\ 58''$; il mesura plusieurs fois la distance des cornes; elle étoit de $19'\ 36''$ à $4^h\ 29'\ 1''$, & à $4^h\ 44'\ 48''$ (*Philosophical transact. 1766, page 31*).

A Caen, M. Pigott observa le commencement à $3^h\ 48'\ 16''$, & la fin, à $5^h\ 0'\ 56'',5$; grandeur de l'éclipse, $5'\ 15''$, en supposant $31'\ 43''\frac{1}{3}$ pour le diamètre du Soleil. Il se servit d'une lunette acromatique de six pieds, & d'un micromètre de Dollond (*Philos. trans. 1767, page 403*).

A Calais, l'éclipse fut observée par feu M. le prince de Croy, feu M. de Fourcroy, depuis Maréchal-de-camp, & M. Mouron. Commencement, $3^h\ 50'\ 46''$; & fin, $5^h\ 8'\ 17'',5$ (*Philos. trans. 1766, page 263*); mais on n'avoit pas pris de hauteurs correspondantes.

M. Messier observa la même éclipse à Colombes, 20″ $\frac{1}{3}$ de temps à l'occident de Paris, à 48^d 55′ 28″ de latitude. Le commencement arriva à 3^h 58′ 13″, & la distance des bords fut mesurée de 26′ 19″, à 4^h 25′ 27″ (*Mém. de l'Acad. 1765, page 479. Philos. trans. 1766, page 3*).

M. Méchain a conclu du commencement la conjonction, 3^h 43′ 47″, temps vrai à Paris; mais c'est en partant de l'observation de Calais, sur laquelle il y a erreur.

M. le Monnier observa la fin à 5^h 11′ 50″, à Paris, mais entre les nuages (*Mém. de l'Académie 1765, page 553*).

A Brest, l'éclipse fut observée par M. le chevalier de Goimpy, mais seulement avec une lunette simple de trois pieds, & sans avoir pris des hauteurs correspondantes; ainsi l'on ne peut guère tirer parti de cette observation.

Le P. Rostan, Jésuite, & professeur de mathématiques à Varsovie, observa le commencement à 4^h 58′ 27″, & la fin à 6^h 27′ 44″; la partie éclairée, à 5^h 7′ 28″, étoit 13′ 12″,6; à 5^h 49′ 22″, de 22′ 23″,1, & à 6^h 23′ 7″, de 29′ 47″,9. Pour faire cette observation, il se joignit à M. Wolf, médecin du prince Adam Czartorinsky, & le seul à Varsovie qui eût quelques instrumens d'astronomie; mais pour régler la pendule, au défaut de quart-de-cercle, il se servit d'un octant à pinules, avec un bassin d'huile pour horizon; cependant les temps s'accordoient toujours à 3 ou 4″ près. Pour observer l'éclipse, il employa un télescope de Short de vingt-quatre pouces de foyer, garni d'un micromètre objectif; la fin lui parut entre 41 & 47″, dans les nuages; ainsi il n'y a que 3 ou 4″ d'incertitude sur cette fin.

Pour calculer ces différentes observations, & d'abord celle de Greenwich, j'ai cherché par les nouvelles Tables du Soleil de M. de Lambre, & les dernières Tables de la Lune de M. Mason, les élémens primitifs. Lieu du Soleil, le 16 août, à 3^h 47′ 34″, temps moyen de la conjonction

à Paris, à peu-près connu, 4^s 23^d $52'$ $51''$,5 ; plus petite de $10''$ que par les Tables de la Caille ; lieu de la Lune, 4^s 23^d $52'$ $44''$,1 ; latitude boréale, 1^d $14'$ $15''$,2 ; mouvement horaire en longitude, $31'$ $16''$,4 ; en latitude, $2'$ $48''$,0 ; parallaxe horizontale pour Paris, $55'$ $34''$,2, qu'il faut diminuer de $6''$ pour la réduire à l'aplatissement de $\frac{1}{300}$, comme je l'ai prouvé dans mon dernier Mémoire sur la parallaxe. La latitude de Greenwich, 51^d $28'$ $40''$, se réduit à 51^d $17'$ $29''$ dans ce sphéroïde ; & la différence des parallaxes horizontales du Soleil & de la Lune, à $55'$ $19''$.

	COMMENCEMENT.	FIN.
Temps vrai des observations à Greenwich	3^h $42'$ $52''$	4^h $59'$ $24''$
Différence des longitudes vraies du Soleil & de la Lune	0. 3. 46,6	0. 40. 36,4
Latitude vraie de la Lune	1. 13. 32,0	1. 9. 57,4
Déclinaison du Soleil	13. 34. 41	13. 33. 28
Distance du Soleil au zénith	58. 17. 26	70. 0. 46
Angle du vertical & du cercle de déclinaison	37. 24. 0	39. 57. 52
Angle de position	19. 19. 54	19. 20. 35
Différence apparente de longit.	10. 54,5	22. 25,2
Parallaxe de longitude	14. 41,1	18. 11,2
Différence apparente de latitude.	29. 2,9	21. 25,2
Parallaxe de latitude	44. 29,1	48. 32,2

Ainsi le mouvement apparent de la Lune pendant la durée de l'éclipse, devoit être $33'$ $19''$,7 en longitude, & $7'$ $37''$,7 en latitude. Je suppose la distance apparente des centres, $31'$ $3''$,2, & $31'$ $0''$,5, en diminuant les diamètres du Soleil & de la Lune, comme on le doit faire dans les éclipses, & je trouve le temps vrai de la conjonction, 3^h $35'$ $4''$,4, & la latitude vraie, 1^d $13'$ $55''$ *B*.

J'ai calculé de même l'obſervation de Caen, & j'ai trouvé le temps vrai de la conjonction, 3^h 33′ 27″,5, ou 3^h 44′ 15″,5 à Paris, & la latitude, 1^d 13′ 52″, plus petite de 3″ que par l'obſervation de Greenwich. Il réſulte auſſi de-là une différence des méridiens entre Paris & Greenwich, qui ne ſeroit que 9′ 11″, c'eſt-à-dire, plus petite de 5″ que celle de 9′ 16″ qu'on a coutume d'employer, & que l'on croit cependant depuis quelques temps un peu trop foible.

L'obſervation de Calais m'a donné la conjonction à 3^h 41′ 55″ (M. Méchain avoit trouvé 3^h 41′ 49″, mais avec une parallaxe plus grande); je trouve auſſi la latitude, 1^d 13′ 56″,3, ſeulement 1″ de plus que par l'obſervation de Greenwich; mais il paroît que le temps vrai étoit en erreur de 27″, à en juger par les obſervations de Caen & de Greenwich : en effet, M. le prince de Croy n'avoit pas employé les hauteurs correſpondantes; mais la durée paroît avoir été bien obſervée.

L'obſervation de M. Short, en corrigeant la latitude de la Lune par les obſervations de Greenwich & de Caen, donne auſſi la conjonction pour Greenwich, 3^h 35′ 4″, & par conſéquent la différence des méridiens, 9′ 11″, en partant de la conjonction trouvée pour Caen.

Par un milieu entre les deux obſervations de Caen & de Greenwich, on a la conjonction, 3^h 48′ 6″, temps moyen à Paris, dans 4^f 23^d 52′ 53″; la longitude des Tables eſt plus grande de 10″; la latitude vraie, 1^d 13′ 55″, eſt plus petite de 20″ que par les Tables. L'erreur n'eſt que de 9″ dans les ſecondes Tables de Mayer, que j'avois inſérées dans la ſeconde édition de mon *Aſtronomie*.

J'ai auſſi voulu employer le commencement obſervé à Colombes par M. Meſſier, avec la fin obſervée à Paris par M. le Monnier, en réduiſant les deux obſervations au méridien de l'obſervatoire, mais en y appliquant les parallaxes qui conviennent à chaque lieu reſpectivement,

j'ai trouvé, pour l'obſervation de M. Meſſier, préciſément la même conjonction, $3^h\ 44'\ 18''$, comme le milieu entre Caen & Greenwich; mais l'obſervation de M. le Monnier, faite au travers des nuages, en diffère trop pour pouvoir en tirer les conſéquences que j'avois en vue dans cette comparaiſon.

La poſition de Varſovie eſt encore aſſez peu connue pour qu'il ſoit utile de calculer auſſi cette obſervation; j'en ai donc déduit le temps de la conjonction, & j'ai trouvé $4^h\ 58'\ 48''$; ce qui donne pour la différence des méridiens, $1^h\ 14'\ 30''$; la hauteur du pôle eſt de $52^d\ 14'\ 28''$ *(Éphém. de Berlin, 1780, page 176)*. Le P. Roſtan avoit auſſi obſervé l'éclipſe de 1764; commencement, $10^h\ 54'\ 5''$; fin, $1^h\ 50'\ 37''$; M. du Séjour en a conclu, $1^h\ 14'\ 40''$ par le commencement, & $1^h\ 14'\ 27''$ par la fin.

Par l'éclipſe du 26 août 1775, M. Lexell trouva, $1^h\ 14'\ 38''$ ou $41''$, comme on le voit dans *les Mém. de Péterſb. 1775, page 590.* Il ajoute que dans l'éclipſe de 1764, il avoit trouvé $1^h\ 14'\ 52''$ par le commencement, & $1^h\ 14'\ 24''$ par la fin. Dans les Éphémerides de Berlin pour 1780, le P. Roſtan trouvoit $1^h\ 14'\ 51''$ par l'éclipſe de 1764; M. Wolf, $1^h\ 14'\ 35''$ par celle de 1765, & $1^h\ 14'\ 32''$ par quelques éclipſes des ſatellites: mais ce qui me fait croire que mon réſultat, $1^h\ 14'\ 30''$ eſt exact, c'eſt que je trouve la latitude de la Lune, $1^d\ 14'\ 0''$, à $5''$ près, comme par les obſervations de Greenwich & de Calais, qui tiennent le milieu entre celles de Caen & de Varſovie.

La poſition de Leyde mérite auſſi d'être vérifiée par cette éclipſe; j'ai calculé la diſtance apparente des centres, en ſuppoſant la latitude corrigée, & la différence des méridiens de $8'\ 32''$, j'ai trouvé $0'',3$ de moins: ce qui fait voir qu'il n'y a aucun changement ſenſible à faire dans la différence des méridiens; on pourroit ôter ſeulement $1''$, elle ſeroit de $8'\ 31''$.

Je n'eus pas à Rome la satisfaction d'observer la fin ni la grandeur de l'éclipse; je me suis borné au commencement, en corrigeant la latitude par les observations de Greenwich ou de Caen, & j'ai trouvé 4h 24′ 56″ pour la conjonction à Rome; ainsi la différence des méridiens est 40′ 38″ entre Paris & le collége Romain, plus petite seulement d'une seconde que celle que M. Cagnoli a déduite de l'éclipse de 1781, & la même que celle que M. du Séjour a trouvée de l'éclipse de 1764, en prenant un milieu entre le commencement & la fin. M. Méchain avoit trouvé 40′ 36″, par diverses comparaisons; ainsi l'on a bien peu d'incertitude sur la position de cette fameuse ville.

La différence 40′ 38″, se réduit à 40′ 32″, en la rapportant à la coupole de S.t Pierre du Vatican, qui est non-seulement le lieu le plus considérable de Rome, mais peut-être le point le plus remarquable de l'univers *(a)*.

(a) Lorsque j'ai lu ce Mémoire à l'Académie, on a demandé si la grande pyramide d'Égypte, Sainte-Sophie de Constantinople, &c. ne seroient pas des points encore plus remarquables. Mais quelle différence, quand on considère Rome comme ayant été la capitale de l'empire du monde, & comme étant encore celle du monde chrétien.



MÉMOIRE

Sur la période de lumière de l'Étoile Algol.

Par M. DE LA LANDE.

LES variations de lumière de l'étoile β de Perſée, appelée *Algol* ou *la tête de Méduſe,* avoient été remarquées dans le dernier ſiècle par Montanari, profeſſeur de Bologne en Italie; mais la régularité de ſes variations n'a été reconnue qu'en 1782, à Yorck, par M. le chevalier Goodricke, dont les aſtronomes regrettent la perte actuellement. Ses obſervations ſe trouvent dans les Tranſactions philoſophiques de 1783, *page 480*, & de 1784, *page 288.* J'en ai donné l'hiſtoire dans le huitième tome de mes Éphémerides, *page 94.*

M. Wurm, à Nurtingen dans le Wurtemberg, a donné des Tables de ces variations comparées aux obſervations, & avec leſquelles on calcule facilement les retours de lumière. *Éphém. de Berlin, 1788* & *1789.* J'ai entrepris de les vérifier par de nouvelles obſervations.

Dès la première année, M. Goodricke jugea que la période étoit de $2^j\ 20^h\ \frac{3}{4}$, & dans les Tranſactions de 1784, *page 288*, il trouva $2^j\ 20^h\ 49'\ 3''$; M. Méchain, dès 1783, $2^j\ 20^h\ 48'\ 51''$.

Les Tables calculées par M. Wurm, ſuppoſent $2^j\ 20^h\ 48'\ 59''$, *Éphém. de Berlin, 1788, page 191.* Il les a comparées avec vingt-quatre obſervations, depuis 1783 juſqu'à 1785; il n'y en a que deux où l'erreur paſſe 20', ce qui prouve déjà que ces retours ſont à peu-près conſtans.

Le 10 & le 13 octobre 1788, j'ai obſervé le temps de la plus grande diminution de lumière, & en prenant un milieu entre l'eſtime de ces deux jours, je trouve que c'étoit

c'étoit le 10 vers 11^h du soir, ce qui fait 10^h $47'$, temps moyen, exactement comme par les Tables de M. Wurm. Je compare cette observation avec celles de M. Goodricke, en prenant un milieu entre quatre qu'il choisit de préférence, & qui me donnent le 14 janvier 1783 à 9^h $44'$; l'intervalle est de 2096 jours 1^h $3'$, qui, divisé par 731, nombre des périodes, donne 2^j 20^h $49'$ $0'',33$ pour chacune. Le 2 novembre j'ai trouvé 8^h $34'$; le 22 novembre, 10^h $35'$; & le 25 novembre, 7^h $36'$; ce qui diffère du résultat précédent de $47'$, $27'$ & $15'$: si l'on suppose $30'$ pour l'erreur moyenne, la période ne sera plus que de 2^j 20^h $48'$ $58''$. Le 9 janvier 1790, j'ai estimé la diminution à 9^h $8'$, le 1.er février, à 7^h $25'$, & le 21, à 9^h $40'$. Ces observations donnent 2^j 20^h $49'$ $2''$; c'est la quantité à laquelle je m'en tiens actuellement.

Les quatre observations de M. Goodricke dont j'ai fait usage, sont celles-ci, réduites en temps moyen, & au méridien de Paris.

	H.	M.
14 Janvier 1783.	9.	39
31 Janvier	14.	43
6 Février	8.	29
26 Février	9.	57

En partant de la première, & ajoutant la période de 2^j 20^h $49'$ autant de fois qu'il est nécessaire, je trouve pour les autres, $9'$, $3'$ & $10'$ de plus; ainsi, pour avoir un milieu entre les quatre, j'ajoute $5'$ à la première, & j'ai 9^h $34'$; c'est ainsi qu'il faut l'employer pour qu'elle soit véritablement le résultat des quatre observations.

La plus petite phase dure 20 à $25'$ suivant M. Wurm, & la diminution totale, 6 heures & demie : ainsi, on est étonné de voir que les observations de M. Goodricke

diffèrent si peu. Il est vrai que celle du 21 mars, 8^h $50'$, diffère de $24'$; mais cela n'est pas surprenant. Au reste, j'ai rejeté celle-là de ma comparaison.

D'après mes observations & la période que je viens d'établir, j'ai calculé une Table des plus petites phases d'Algol pour tous les jours de l'année 1789, afin que les astronomes puissent facilement les observer. Cette Table a été publiée dans le *Guide céleste*, Éphéméride qu'a donné depuis 1787 M. Perny de Ville-neuve, l'un des astronomes établis à l'Observatoire royal en 1785, par la magnificence du Roi, par les soins de M. le baron de Breteuil, & de M. le comte de Cassini, dont le zèle pour l'astronomie mérite notre reconnoissance & nos éloges.

Cette Table une fois faite, peut servir pour l'année suivante, en ajoutant deux jours & trente-six minutes, si l'année suivante est aussi une année commune.

On voit par cette Table, qu'il y a 14 ou 17 jours dans chaque mois où l'on ne peut observer la diminution de lumière d'Algol, parce qu'elle arrive de jour; & comme cette étoile est 1^h $28'$ sous l'horizon, il est difficile au mois de mai de l'observer : elle se couche le 15 mai, à 10^h $38'$, & se lève à minuit & $6'$. C'est l'hiver qui est le plus commode pour faire ces observations le soir, l'etoile étant très-élevée.

Pour juger de l'uniformité de la période, je prends encore un intervalle moitié plus court, & je choisis les quatre dernières observations de M. Wurm, qui ne diffèrent que de 6 à 7 minutes; en prenant un milieu, je trouve, le 22 janvier 1786, 8^h $20'$ à Paris; mon observation du 10 octobre 1788 en est éloignée de 992 jours 2^h $27'$, qui divisés par 346, donnent 2^j 20^h $48'$ $58''$, 8; ce qui approche plus du résultat de M. Wurm, & diffère de $3''$,2 du précédent. Ainsi, nous avons lieu de croire que cette révolution est sensiblement uniforme, puisqu'un intervalle de trois ans, & un de six ans, donnent le même résultat.

Les Tables de M. Wurm s'accordent parfaitement avec mes obſervations de 1788, mais elles diffèrent de 16′ de celles de M. Goodricke, qu'elles devroient ſur-tout repréſenter

Il me reſtoit à donner ici des Tables générales pour calculer en tout temps le moment de la moindre lumière, d'après les réſultats de ce Mémoire ; mais M. Méchain a bien voulu ſe charger de les publier dans la *Connoiſſance Temps de 1792.*

Au temps où ce Mémoire s'imprime, M. Wurm m'a envoyé cinq Obſervations réduites en temps moyen au Méridien de Paris : 1790, 18 février, $11^h\ 50'$; 21 février, $8^h\ 40'$; 13 mars, $10^h\ 46'$; 5 avril, $9^h\ 10'$; 17 octobre, $8^h\ 39'$; d'après leſquelles il ſemble qu'il faudroit ôter une demi-heure de l'époque de mes Tables pour 1790. Les Obſervations nous éclaireront à ce ſujet.

Cet habile Obſervateur m'écrit qu'il a auſſi remarqué d'autres étoiles changeantes : il ſait remplacer le défaut d'inſtrumens par une aſſiduité précieuſe à obſerver des phénomènes qui n'exigent que la ſimple vue.



MÉMOIRE

Sur l'état moyen des Eaux de la Seine, à Paris.

Par M. DE LA LANDE.

ON a ſouvent parlé dans les Mémoires de l'Académie, de la hauteur moyenne des eaux de la rivière; on a rapporté à ce point des nivellemens & des meſures; mais on a toujours ſuppoſé que la hauteur moyenne tenoit un milieu entre la plus grande & la plus petite élévation, & c'eſt cette notion défectueuſe que je me propoſe de rectifier.

L'état moyen des eaux doit être l'état où elles ſont le plus ſouvent; l'etat naturel, indépendant des grandes inondations & des grandes ſécherelles, l'état ſur lequel on a droit de compter pour la navigation, ſauf les accidens paſſagers, & les événemens extraordinaires.

Pour connoître cette hauteur moyenne, il falloit exclure les grandes hauteurs & les grands abaiſſemens, tandis que ce ſont, au contraire, les ſeuls dont on ait fait mention, & dont on ait tenu compte juſqu'à préſent dans ces ſortes de calculs. Enfin, il faut avoir un grand nombre d'obſervations faites dans toutes les ſaiſons, & prendre le milieu.

Les hauteurs que l'on marque tous les jours à l'échelle du pont de la Tournelle pour le ſervice de la navigation de la rivière, & qui ſe publient dans le Journal de Paris, offrent un moyen facile de connoître l'état moyen de la rivière. Voici les hauteurs moyennes de chaque mois en 1782 & en 1787, qui ſuffiront pour donner une idée de celle qui fait l'objet de ce Mémoire. Ces hauteurs ſont en pieds, pouces & dixièmes de pouces; elles ſont

le résultat des hauteurs de tous les jours, entre lesquelles j'ai pris un milieu. Dans la dernière colonne j'ai mis les hauteurs des différens mois, dans l'ordre des hauteurs de l'eau, pour que l'on voie, par exemple, que le mois de septembre a été dans ces deux années le plus sec, & le mois de mai le plus sujet à la pluie.

MOIS.	1782.		1787.		Mois par ordre des 4 hauteurs.	Hauteurs par un milieu.	
	Pieds.	Pouc.	Pieds.	Pouc.		Pieds.	Pouc.
Janvier...	6.	5,4	5.	0,0	Septembre.	1.	2,5
Février...	6.	2,9	3.	10,6	Août....	1.	6,4
Mars....	4.	7,0	5.	3,8	Juillet...	3.	1,7
Avril....	7.	10,6	5.	10,4	Octobre..	3.	4,3
Mai.....	9.	5,1	9.	3,6	Mars....	4.	11,4
Juin.....	5.	4,6	5.	5,7	Février...	5.	0,7
Juillet...	2.	0,0	4.	3,5	Décembre.	5.	2,0
Août....	1.	5,1	1.	7,6	Juin.....	5.	5,2
Septembre.	1.	0,0	1.	5,1	Janvier...	5.	8,7
Octobre..	1.	8,8	4.	11,8	Novembre.	5.	11,5
Novembre.	3.	2,2	8.	8,7	Avril....	6.	10,5
Décembre.	2.	9,7	7.	6,3	Mai.....	9.	4,4
Milieu...	4.	4,0	5.	4,6			

La hauteur moyenne entre ces deux années, est donc de 4 pieds 10 pouces; c'est à peu-près l'état moyen de la rivière sur l'échelle du pont de la Tournelle, & c'est pour cela que j'ai fait ajouter dans le Journal de Paris, à la hauteur de l'eau pour chaque jour, ces mots, *Hauteur moyenne, 5 pieds.*

L'échelle du pont Royal marque les hauteurs au-dessus du fond de la rivière, au banc de l'Aiguillette, qui est l'endroit où il y a le moins d'eau; elle marque 2 pieds 8 pouces de plus, du moins dans les moyennes eaux;

car la différence n'eſt que de 1 pied 4 pouces dans les baſſes eaux ; elle va juſqu'à 3 pieds quand les crues ſont fortes & ſubites : ainſi c'eſt à 7 pieds 5 pouces de l'échelle du pont Royal, que l'on peut fixer l'état moyen de la rivière.

L'échelle du pont au Change, faite en 1769, marque 17 pouces de plus que celle du pont de la Tournelle; ainſi l'état moyen des eaux ſur l'échelle du pont au Change, eſt de 6 pieds 3 pouces.

Mais les hauteurs extrêmes qui ont été obſervées ſur l'échelle du pont Royal, ſont 1 pied 10 pouces, & 25 pieds 3 pouces, dont le milieu eſt de 13 pieds 6 pouces $\frac{1}{2}$; & ce milieu que l'on a quelquefois appelé *hauteur moyenne*, ſurpaſſe de 6 pieds la hauteur qui doit réellement s'appeler *hauteur moyenne*. Cette différence fait voir la néceſſité des conſidérations que je viens de rapporter.

En prenant ainſi un plus grand nombre d'années, & en choiſiſſant celles où la quantité de pluie eſt d'environ 17 pouces, quantité moyenne ſuivant M. Cotte *(Traité de météorologie, page 231, 312)*, on aura plus exactement l'état moyen de la rivière. Il eſt tombé en 1782, 22 pouces d'eau *(Journal des Savans, juin 1783)*, & la même quantité en 1787 *(Connoiſſance des Temps, 1791, p. 360)*; ainſi la hauteur que j'ai trouvée eſt probablement un peu trop forte. Mais je me contente d'avoir montré l'erreur de la méthode employée juſqu'ici pour avoir la hauteur moyenne de la rivière. Il en eſt de même des hauteurs de la mer ; le niveau naturel n'eſt qu'à un tiers de l'intervalle qu'il y a des baſſes eaux à leur plus grande hauteur, comme je l'ai démontré dans mon *Traité du flux & reflux de la mer (art. 117)*; il eſt donc plus bas que le point qui tient le milieu entre les deux hauteurs.

Au ſujet des grandes hauteurs de l'eau en 1651, 1658, 1700, 1740, 1749, 1751, 1764, on peut voir M. Bonamy *(Mémoires de l'Acad. des Inſcript. tome XVII, page 675)*; M. Buache *(Mémoires de l'Academie des*

Sciences, 1741, 1742 & 1767, page 508), & M. Deparcieux *(Mém. 1764, p. 457)*.

Si la méridienne de l'obſervatoire royal eſt de 149 pieds au-deſſus du zéro de l'échelle du pont Royal, elle ſera de 141 ½ pieds au-deſſus des moyennes eaux de la Seine; & ſi l'on ſuppoſe avec M. Maraldi *(Mém. 1703, p. 231)*, que la méridienne eſt 276 pieds au-deſſus de l'Océan, la pente de la Seine ſera de 134 ½ pieds. Cependant M. Shuckburgh, qui a fait le trajet de Paris juſqu'à la mer avec un excellent baromètre, ne jugeoit la pente que de 28 pieds *(Philoſ. tranſ. 1777)*; mais M. le Monnier eſt perſuadé qu'il l'a trop diminuée, & cela eſt très-vraiſemblable.

La différence de niveau entre les deux échelles du pont Royal & du pont de la Tournelle, ſur le mur de quai, a été déterminée en 1789 & en 1790 par M. de Prony, avec un excellent niveau. Il a trouvé que les ſept pieds de l'échelle du pont de la Tournelle étoient de niveau avec 12 pieds 5 pouces de celle du pont Royal, en ſorte que la différence réelle des deux échelles, eſt 5 pieds 5 pouces. M. Buache ne la croyoit que de 3 pieds 9 pouces. Le 31 janvier 1789, la rivière étoit a 9 pieds 11 pouces au pont Royal, ainſi elle auroit dû être à 4 pieds 6 pouces à la Tournelle; elle y étoit à 7 pieds 1 pouce : donc l'eau étoit plus haute au-deſſus du pont de la Tournelle qu'au-deſſous du pont Royal, de 2 pieds 7 pouces. Mais la pente ordinaire & générale de la Seine, ſur une diſtance de 1300 toiſes, eſt de 1 pied 4 pouces, ſuivant les anciens nivellemens de Picard; il y avoit donc dans Paris 15 pouces de plus pour la retenue des ponts, ou pour la cataracte effective de l'eau, ſoutenue par ces obſtacles; mais cette quantité varie de deux pieds par les différentes hauteurs & peut-être par les embarras de la rivière, plus ou moins conſidérables dans un temps que dans l'autre. Dans les moyennes eaux on trouve la pente totale depuis 2 pieds 3 pouces juſqu'à 3 pieds 3 pouces;

le milieu eſt 2 pieds 9 pouces, ce qui donne 1 pied 5 pouces pour la retenue des ponts, & 2 pieds 8 pouces pour la différence des hauteurs que marquent les deux échelles dans les moyennes eaux.

Il y a ſur la ſeconde pile du pont de la Tournelle, en partant du nord, & en aval, une autre échelle à laquelle M. de Prony avoit attaché ſon nivellement; mais j'ai reconnu qu'elle marque 9 pouces de moins, & j'ai réduit l'opération à celle qui eſt en amont, ſur la culée ou ſur le mur de quai, au pied de l'eſcalier qui eſt au nord & à l'eſt, parce que c'eſt celle-ci où l'on marque tous les matins la hauteur de l'eau pour le bureau de la Ville, telle qu'on l'imprime dans le Journal de Paris. On avoit ceſſé le 7 novembre 1789, de marquer cette hauteur dans le Journal, mais l'interruption n'a duré que juſqu'au 3 décembre.



THÉORIE
DES SATELLITES DE JUPITER.
Par M. DE LA PLACE.

JE me propoſe dans cet ouvrage, de donner une théorie complète des perturbations qu'éprouvent les ſatellites de Jupiter, & de préſenter aux aſtronomes, les reſſources que l'analyſe peut fournir pour perfectionner les Tables du mouvement de ces aſtres.

PREMIÈRE PARTIE.

Théorie analytique des mouvemens des Satellites de Jupiter.

I.

Équations générales du mouvement des Satellites de Jupiter.

SOIENT x, y, z, les trois coordonnées rectangles du premier ſatellite, l'origine des coordonnées étant au centre de gravité de Jupiter, que nous ſuppoſerons immobile. Soit r la diſtance du ſatellite à ce centre, & m ſa maſſe. Que l'on marque ſucceſſivement d'un trait, de deux traits & de trois traits, les mêmes quantités, relativement au ſecond, au troiſième & au quatrième ſatellite. Soit de plus, S la maſſe du Soleil; X, Y, Z, ſes trois coordonnées rapportées au centre de Jupiter, & D ſa diſtance à ce centre. Soit encore

$$\lambda = \frac{m'}{\sqrt{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]}}$$
$$+\frac{m''}{\sqrt{[(x''-x)^2+(y''-y)^2+(z''-z)^2]}}$$
$$+\frac{m'''}{\sqrt{[(x'''-x)^2+(y'''-y)^2+(z'''-z)^2]}}$$
$$+\frac{S}{\sqrt{[(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2]}}$$

Soit $V + \frac{1}{r}$, la somme de toutes les molécules de Jupiter, divisées par leurs distances au centre du satellite, la masse de Jupiter étant prise pour l'unité. Soient enfin, $V' + \frac{1}{r'}$, $V'' + \frac{1}{r''}$, $V''' + \frac{1}{r'''}$, & $U + \frac{1}{D}$, ces mêmes sommes relativement aux satellites m', m'', m''', & au Soleil. Cela posé.

La force dont le satellite m est animé parallèlement à l'axe des x, en vertu de l'attraction d'une molécule quelconque, se détermine en divisant la masse de cette molécule, par sa distance au centre du satellite m, en différenciant ensuite ce quotient par rapport à x, & divisant cette différence par ∂x. On aura donc, en observant que $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) - \frac{x}{r^3} + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right),$$

pour la force parallèle à x, qui résulte des attractions de Jupiter, du Soleil, & des trois autres satellites. Mais comme nous considérons le mouvement du satellite m, autour du centre de Jupiter; il faut retrancher de la force précédente, celle qui anime ce centre. Or, en vertu de l'égalité qui existe entre l'action & la réaction, la force accélératrice que communique au centre de gravité de Jupiter, l'action de m, étant multipliée par la masse de cette planète, est égale & directement contraire à la force accélératrice dont le satellite m est animé par l'action de toutes les molécules de Jupiter, multipliée par m; cette dernière force décomposée parallèlement à l'axe des x, est $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) - \frac{x}{r^3}$; on aura donc

$$- m . \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) - \frac{x}{r^3}\right]$$

pour la force dont le centre de gravité de Jupiter est

ſollicité parallèlement à l'axe des x, en vertu de l'action de m. Si dans cette quantité, l'on marque ſucceſſivement d'un trait, de deux traits & de trois traits, les lettres m, V, x & r; on aura les forces parallèles aux x, dont ce centre eſt animé par les attractions de m', m'', m'''. Enfin, la force parallèle aux x, dont il eſt animé par l'action du Soleil, eſt

$$- S. \left[\left(\frac{\partial U}{\partial X} \right) - \frac{X}{D^3} \right].$$

Si l'on retranche la ſomme de toutes ces forces qui ſollicitent le centre de Jupiter, de la force

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) - \frac{x}{r^3} + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right),$$

on aura la force entière dont le ſatellite m eſt animé parallèlement à l'axe des x, dans ſon mouvement relatif autour de Jupiter. Cette force doit, par les principes de dynamique, être égale à $\frac{\partial \partial x}{\partial t^2}$, ∂t étant l'élément du temps que nous ſuppoſons conſtant; on aura donc

$$\begin{aligned} 0 = {} & \frac{\partial \partial x}{\partial t^2} + (1 + m). \left[\frac{x}{r^3} - \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) \right] \\ & + m'. \left[\frac{x'}{r'^3} - \left(\frac{\partial V'}{\partial x'} \right) \right] + m''. \left[\frac{x''}{r''^3} \right. \\ & \left. - \left(\frac{\partial V''}{\partial x''} \right) \right] + m'''. \left[\frac{x'''}{r'''^3} - \left(\frac{\partial V'''}{\partial x'''} \right) \right] \\ & + S. \left[\frac{X}{D^3} - \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right) \right] - \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

On trouvera de la même manière :

$$\begin{aligned} 0 = {} & \frac{\partial \partial y}{\partial t^2} + (1 + m). \left[\frac{y}{r^3} - \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right) \right] \\ & + m'. \left[\frac{y'}{r'^3} - \left(\frac{\partial V'}{\partial y'} \right) \right] + m''. \left[\frac{y''}{r''^3} \right. \\ & \left. - \left(\frac{\partial V''}{\partial y''} \right) \right] + m'''. \left[\frac{y'''}{r'''^3} - \left(\frac{\partial V'''}{\partial y'''} \right) \right] \\ & + S. \left[\frac{Y}{D^3} - \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right) \right] - \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

$$o = \frac{\partial \partial z}{\partial t^2} + (1 + m) . \left[\frac{z}{r^3} - \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right) \right]$$

$$+ m' . \left[\frac{z'}{r'^3} - \left(\frac{\partial V'}{\partial z'} \right) \right] + m'' . \left[\frac{z''}{r''^3} \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\partial V''}{\partial z''} \right) \right] + m''' . \left[\frac{z'''}{r'''^3} - \left(\frac{\partial V'''}{\partial z'''} \right) \right]$$

$$+ S . \left[\frac{Z}{D^3} - \left(\frac{\partial U}{\partial Z} \right) \right] - \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z} \right).$$

Si l'on fait, pour abréger :

$$R = m' . \left(\frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} \right) + m'' . \left(\frac{xx'' + yy'' + zz''}{r''^3} \right)$$

$$+ m''' . \left(\frac{xx''' + yy''' + zz'''}{r'''^3} \right) + S . \left(\frac{xZ + yY + zZ}{D^3} \right)$$

$$- \lambda - (1 + m) V$$

$$- m' . \left[x . \left(\frac{\partial V'}{\partial x'} \right) + y . \left(\frac{\partial V'}{\partial y'} \right) + z . \left(\frac{\partial V'}{\partial z'} \right) \right]$$

$$- m'' . \left[x . \left(\frac{\partial V''}{\partial x''} \right) + y . \left(\frac{\partial V''}{\partial y''} \right) + z . \left(\frac{\partial V''}{\partial z''} \right) \right]$$

$$- m''' . \left[x . \left(\frac{\partial V'''}{\partial x'''} \right) + y . \left(\frac{\partial V'''}{\partial y'''} \right) + z . \left(\frac{\partial V'''}{\partial z'''} \right) \right]$$

$$- S . \left[x . \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right) + y . \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right) + z . \left(\frac{\partial U}{\partial Z} \right) \right];$$

Les trois équations différentielles précédentes deviendront

$$\left.\begin{aligned} o &= \frac{\partial \partial x}{\partial t^2} + (1 + m) . \frac{x}{r^3} + \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right); \\ o &= \frac{\partial \partial y}{\partial t^2} + (1 + m) . \frac{y}{r^3} + \left(\frac{\partial R}{\partial y} \right); \\ o &= \frac{\partial \partial z}{\partial t^2} + (1 + m) . \frac{z}{r^3} + \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right); \end{aligned}\right\} (A)$$

I I.

Si l'on multiplie la première des équations *(A)* par ∂x, la seconde par ∂y, la troisième par ∂z, & qu'ensuite on les ajoute, on aura :

$$o = \frac{\partial x . \partial \partial x + \partial y . \partial \partial y + \partial z . \partial \partial z}{\partial t^2} + \left(\frac{1+m}{r^3}\right).$$
$(x \partial x + y \partial y + z \partial z) + \partial x . \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) + \partial y . \left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) + \partial z . \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)$; or on a, $x \partial x + y \partial y + z \partial z = r \partial r$; de plus, on peut mettre la quantité $\partial x . \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) + \partial y . \left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) + \partial z . \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)$ ſous cette forme $d R$, la caractériſtique différentielle d, ne ſe rapportant qu'aux coordonnées x, y, z, du ſatellite m; on aura donc en intégrant l'équation précédente,

$$o = \frac{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}{\partial t^2} - 2 . \left(\frac{1+m}{r}\right) + \frac{1+m}{a} + 2 \int d R;$$

$\frac{1+m}{a}$ étant une conſtante arbitraire.

Si l'on multiplie la première des équations (A) par x, la ſeconde par y, la troiſième par z, & que l'on ajoute leur ſomme à l'intégrale précédente ; ſi l'on obſerve enſuite que

$$x . \partial \partial x + y . \partial \partial y + z . \partial \partial z + \partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2 = \tfrac{1}{2} . \partial^2 . r^2;$$

on aura :

$$o = \frac{\partial^2 . r^2}{\partial t^2} - 2 . \left(\frac{1+m}{r}\right) + 2 . \left(\frac{1+m}{a}\right) + 4 . \int d R + 2 . \left[x . \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) + y . \left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) + z . \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)\right].$$

En ſuppoſant $R = o$, dans cette équation, on aura la valeur de r, lorſque l'on fait abſtraction de la figure de Jupiter, & de l'action du Soleil & des ſatellites. Dans ce cas, on ſait que l'orbite eſt une ellipſe dont a eſt le demi-grand axe. Soit δr la variation de r, due à ce que R n'eſt pas nul ; l'équation précédente donnera, en négligeant le carré de δr,

$$0 = \frac{\partial^2 . (r \delta r)}{\partial t^2} + \frac{(1+m) . r \delta r}{r^3} + 2 . \int d R$$
$$+ x . \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) + y . \left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) + z . \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right).$$

Les équations *(A)* étant multipliées refpectivement par x, y, z, & étant enfuite ajoutées, donnent:

$$0 = \frac{x . \partial \partial x + y . \partial \partial y + z . \partial \partial z}{\partial t^2} + \frac{1+m}{r}$$
$$+ x . \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) + y . \left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) + z . \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right).$$

Si l'on nomme ∂v, l'angle infiniment petit, intercepté entre les deux rayons vecteurs r, & $r + \partial r$, on a

$$\frac{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}{\partial t^2} = \partial r^2 + r^2 \partial v^2;$$

$$x \partial \partial x + y . \partial \partial y + z . \partial \partial z = r \partial \partial r - r^2 \partial v^2;$$

on aura donc:

$$0 = \frac{r \partial \partial r - r^2 \partial v^2}{\partial t^2} + \frac{1+m}{r} + x . \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)$$
$$+ y . \left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) + z . \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right).$$

Dans le cas du mouvement elliptique où R eft nul, cette équation devient

$$0 = \frac{r \partial \partial r - r^2 \partial v^2}{\partial t^2} + \frac{1+m}{r}.$$

Suppofons que R augmente r & v, des quantités δr, & δv; on aura, en négligeant les carrés & les produits de δr & de δv,

$$0 = \frac{r . \partial \partial \delta r + \delta r . \partial \partial r - 2 r^2 \partial v . \partial \delta v - 2 r \partial v^2 . \delta r}{\partial t^2}$$
$$- \frac{(1+m) . r \delta r}{r^3} + x . \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) + y . \left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)$$
$$+ z . \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right).$$

On a dans l'hypothèſe elliptique,

$r^2 \partial v = \partial t . \sqrt{[(1 + m) . a . (1 - e^2)]}$,

a étant le demi-grand axe de l'orbite, & $a e$ étant ſon excentricité; on a de plus, par ce qui précède, lorſque R eſt nul,

$$\frac{r \partial v^2}{\partial t^2} = \frac{\partial \partial r}{\partial t^2} + \frac{1 + m}{r^2};$$

l'équation différentielle précédente donnera ainſi,

$$2 \partial \delta v . \sqrt{[(1 + m) . a . (1 - e^2)]} = \frac{r . \partial \partial \delta r - \delta r . \partial \partial r}{\partial t^2}$$
$$- 3 . \frac{(1 + m) . r \delta r}{r^3} + x . \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) + y . \left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)$$
$$+ z . \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right).$$

Si l'on ſubſtitue dans cette équation, au lieu de $\frac{(1 + m) . r \delta r}{r^3}$, ſa valeur donnée par l'équation différentielle trouvée ci-deſſus, en $r \delta r$, on aura:

$$\frac{2 . \partial \delta v}{\partial t} . \sqrt{[(1 + m) . a . (1 - e^2)]} = \frac{r . \partial \partial \delta r - \delta r . \partial \partial r}{\partial t^2}$$
$$+ 3 \frac{\partial^2 . (r \delta r)}{\partial t^2} + 6 . \int d R + 4 . \left[x . \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)\right.$$
$$\left.+ y . \left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) + z . \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)\right].$$

Soit $n t$ le moyen mouvement du ſatellite; on a par la théorie du mouvement elliptique,

$$n^2 = \frac{1 + m}{a^3};$$

d'où l'on tire

$\sqrt{[(1 + m) . a . (1 - e^2)]} = n a^2 . \sqrt{(1 - e^2)}$;

on a enſuite à fort peu-près, $n^2 a^3 = 1$; on aura donc en intégrant l'équation précédente,

$$\delta v = \frac{\frac{2 r . \partial \delta r + \partial r . \delta r}{a^2 . n \partial t} + 3 a . \int n \partial t \int \partial R + 2 a . \int n \partial t . \left[x . \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) + y . \left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) + z . \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)\right]}{\sqrt{(1 - e^2)}}$$

Si l'on prend pour le plan des coordonnées x & y; celui de l'orbite primitive de m, z sera de l'ordre des forces perturbatrices; ainsi en négligeant le carré de ces forces, on pourra faire $z = 0$, dans tous les termes dépendans de R. Si l'on nomme ensuite v, l'angle que fait le rayon r, avec l'axe des x, on aura

$$x = r . \cos. v; \quad y = r . \sin. v;$$

mais on a

$$d R = \partial x . \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) + \partial y . \left(\frac{\partial R}{\partial y}\right):$$

en substituant pour x & y, leurs valeurs précédentes, on aura

$$d R = \frac{\partial r}{r} . \left[x . \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) + y . \left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) \right]$$

$$+ \partial v . \left[x . \left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) - y . \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) \right];$$

on a ensuite

$$d R = \partial r . \left(\frac{\partial R}{\partial r}\right) + \partial v . \left(\frac{\partial R}{\partial v}\right);$$

on aura donc, en comparant ces deux valeurs de $d R$,

$$x . \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) + y . \left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) = r . \left(\frac{\partial R}{\partial r}\right);$$

l'équation différentielle en $r \delta r$, & l'expression précédente de δv, deviendront ainsi,

$$0 = \frac{\partial\partial . (r \delta r)}{\partial t^2} + \frac{(1 + m) . r \delta r}{r^3} + 2 . \int d R + r . \left(\frac{\partial R}{\partial r}\right); \quad (1).$$

$$\delta v = \frac{\frac{2 r . \partial \delta r + \partial r . \delta r}{a^2 . n \partial t} + 3 a . \int n \partial t . \int d R + 2 a . \int n \partial t . \left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)}{\sqrt{(1 - e^2)}}; \quad (2).$$

En joignant à ces deux équations, l'équation différentielle en z, de l'art. I.

$$0 = \frac{\partial \partial z}{\partial t^2} + \frac{(1 + m) . z}{r^3} + \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right); \quad (3).$$

On aura toutes les équations nécessaires pour déterminer les perturbations

les perturbations que le ſatellite m éprouve, lorſque l'on néglige les carrés & les produits des forces perturbatrices.

I I I.

Considérons préſentement la valeur de R. On a vu dans l'art. I, que la fonction $V + \frac{1}{r}$, exprime la ſomme de toutes les molécules de Jupiter, diviſées par leurs diſtances reſpectives au centre du ſatellite m. J'ai donné ailleurs l'expreſſion générale de cette ſomme, dans le cas où Jupiter eſt un ſphéroïde peu différent d'une ſphère; je vais rappeler ici quelques-uns des réſultats auxquels je ſuis parvenu ſur cet objet.

Soit μ le coſinus de l'angle que le rayon r fait avec l'axe de rotation de Jupiter, axe qui, pour l'équilibre de cette planète, doit être un de ſes axes principaux de rotation. Soit de plus ϖ, l'angle que fait le plan qui paſſe par cet axe & par le rayon r, avec le plan d'un méridien quelconque, que nous ſuppoſerons paſſer par l'un des deux axes principaux ſitués dans le plan de l'équateur de Jupiter. On pourra repréſenter le rayon mené du centre de gravité de cette planète à ſa ſurface, par la fonction

$$1 + Y^{(2)} + Y^{(3)} + Y^{(4)} + \&c.$$

$Y^{(i)}$ étant une fonction rationnelle & entière de l'ordre i, de μ, $\sqrt{(1 - \mu^2)}.\ \text{ſin.}\ \varpi$, & $\sqrt{(1 - \mu^2)}.\ \text{coſ.}\ \varpi$, aſſujettie à l'équation aux différences partielles,

$$0 = \left\{\frac{\partial.(1 - \mu\mu).\left(\frac{\partial Y^{(i)}}{\partial \mu}\right)}{\partial \mu}\right\} + \frac{\left(\frac{\partial \partial Y^{(i)}}{\partial \varpi^2}\right)}{1 - \mu\mu}$$

$$+ i.(i + 1).Y^{(i)}.$$

(Voyez les Mémoires de l'Académie pour l'année 1783, page 28). On aura enſuite :

$$V + \frac{1}{r} = \frac{1}{r} + \frac{[Y^{(2)} + \frac{1}{2}\varphi.(\mu^2 - \frac{1}{3})]}{r^3} + \frac{Y^{(3)}}{r^4} + \frac{Y^{(4)}}{r^5} + \&c.$$

φ étant le rapport de la force centrifuge à l'attraction de Jupiter, sur l'équateur de cette planète; *(Mémoires de l'Acad. pour l'année 1782, pages 153 & 181)*; partant,

$$V = \frac{Y^{(2)} + \frac{1}{2}\varphi.(\mu^2 - \frac{1}{3})}{r^3} + \frac{Y^{(3)}}{r^4} + \frac{Y^{(4)}}{r^5} + \&c.$$

Cette valeur de V se réduit à fort peu-près à son premier terme, si r est un peu considérable relativement au rayon du sphéroïde de Jupiter. D'ailleurs, si cette planète est un ellipsoïde de révolution, comme il est naturel de le supposer, on a $Y^{(3)} = 0$, $Y^{(4)} = 0$, &c. ce qui rend exacte la réduction de V à son premier terme; on peut donc même relativement au premier satellite, supposer

$$V = \frac{Y^{(2)} + \frac{1}{2}\varphi.(\mu^2 - \frac{1}{3})}{r^3}.$$

La fonction $Y^{(2)}$ se réduit par les conditions de l'équilibre, à cette forme,

$-\rho.(\mu^2 - \frac{1}{3}) + H.(1 - \mu^2).\text{cof. } 2\varpi$. *(Mémoires de l'Académie pour l'année 1783, page 30).* Si Jupiter est un solide de révolution, H est nul; mais dans les cas où cette quantité seroit comparable à ρ, il est facile de s'assurer que son influence sur les mouvemens des satellites de Jupiter est insensible, à cause de la rapidité du mouvement de rotation de Jupiter; nous supposerons donc $H = 0$, ce qui donne

$$V = -\frac{(\rho - \frac{1}{2}\varphi).(\mu^2 - \frac{1}{3})}{r^3}.$$

Les orbites des satellites étant fort peu inclinées à l'équateur de Jupiter, μ est une très-petite quantité dont on peut

négliger le carré; on pourra donc dans les équations *(1)* & *(2)* de l'*article précédent*, ſuppoſer

$$V = \frac{\rho - \frac{1}{2}\varphi}{3\, r^3}.$$

Si dans l'expreſſion de V, on change r, ſucceſſivement dans r', r'', r''', & D, on aura les valeurs de V', V'', V''' & U.

Si le rayon de Jupiter diffère très-peu de celui d'un ellipſoïde de révolution, comme cela a lieu pour la Terre, ainſi que je l'ai fait voir dans les Mémoires de l'Académie pour l'année 1783; les quantités H, $Y^{(3)}$, $Y^{(4)}$, &c. ſeront inſenſibles par rapport à ρ, & le rayon de Jupiter ſera à très-peu-près égal à $1 - \rho . (\mu^2 - \frac{1}{3})$. Au pôle où $\mu = 1$, ce rayon ſera $1 - \frac{2}{3}\rho$, & à l'équateur où $u = 0$, il ſera égal à $1 + \frac{1}{3}\rho$; en ſorte que $\frac{\rho}{1 + \frac{1}{3}\rho}$ ſera l'aplatiſſement de Jupiter, meſuré en parties du demi-diamètre de ſon équateur. En prenant donc pour unité, ce demi-diamètre, & en négligeant la quantité $- \frac{1}{3} . \rho^2$, ρ exprimera l'aplatiſſement de Jupiter. Il eſt aſſez remarquable que la valeur de V ſoit entièrement indépendante de la conſtitution intérieure de Jupiter. Comme cette valeur a une grande influence ſur les mouvemens des nœuds & des aphélies des orbites des ſatellites, ces mouvemens doivent donner l'aplatiſſement de Jupiter, avec une plus grande préciſion que les meſures aſtronomiques les plus exactes.

Repréſentons maintenant par v', v'', v''', Π, les longitudes du ſecond, du troiſième & du quatrième ſatellite, & du Soleil, ces longitudes étant comptées de l'axe des x; on aura, en négligeant les carrés des inclinaiſons de leurs orbites ſur celle de m,

$$x' = r' . \text{coſ. } v' ; \; x'' = r'' . \text{coſ. } v'' ; \; x''' = r''' . \text{coſ. } v''' ;$$
$$X = D . \text{coſ. } \Pi ;$$
$$y' = r' . \text{ſin. } v' ; \; y'' = r'' . \text{ſin. } v'' ; \; y''' = r''' . \text{ſin. } v''' ;$$
$$Y = D . \text{ſin. } \Pi ;$$

L'expreſſion de R, de l'article I. deviendra ainſi, en négligeant les termes multipliés par $\frac{m'.(\rho - \frac{1}{2}\varphi)}{r'^3}$, $\frac{m''.(\rho - \frac{1}{2}\varphi)}{r''^3}$, $\frac{m'''.(\rho - \frac{1}{2}\varphi)}{r'''^3}$, & $\frac{S r.(\rho - \frac{1}{2}\varphi)}{D^4}$, comme étant inſenſibles à cauſe de la petiteſſe de $\rho - \frac{1}{2}\varphi$,

$$R = -\frac{(1+m).(\rho - \frac{1}{2}\varphi)}{3 r^3} + \frac{m'.r}{r'^2}.\text{coſ.}(v'-v)$$

$$+ \frac{m''.r.}{r''^2}\text{coſ.}(v''-v) + \frac{m'''.r.}{r'''^2}\text{coſ.}(v'''-v)$$

$$+ \frac{S r}{D^2}.\text{coſ.}(\Pi - v)$$

$$- \frac{m'}{\sqrt{[r^2 - 2rr'.\text{coſ.}(v'-v) + r'^2]}} - \frac{m''}{\sqrt{[r^2 - 2rr''.\text{coſ.}(v''-v) + r''^2]}}$$

$$- \frac{m'''}{\sqrt{[r^2 - 2rr'''.\text{coſ.}(v'''-v) + r'''^2]}} - \frac{S}{\sqrt{[r^2 - 2rD.\text{coſ.}(\Pi - v) + D^2]}}$$

IV.

Des inégalités du mouvement des Satellites, indépendantes des excentricités & des inclinaiſons des orbites.

REPRENONS maintenant l'équation différentielle *(1)* de l'article II.

$$0 = \frac{\partial\partial.(r\delta r)}{\partial t^2} + \frac{(1+m).r\delta r}{r^3} + 2.\int d R + r\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right); (1)$$

Son intégration introduira deux conſtantes arbitraires qui rentrent dans celles du mouvement elliptique, & auxquelles on peut par cette raiſon, ſe diſpenſer d'avoir égard. Cependant l'excentricité de l'orbite étant fort petite, on pourra faire uſage de cette équation différentielle, pour déterminer la partie elliptique du rayon vecteur qui en dépend; mais alors, il faut conſerver

tous les termes dans lesquels $r \delta r$ est multiplié par des constantes dépendantes même des forces perturbatrices, parce que ces termes déterminent le mouvement de l'aphélie.

Si l'on néglige le carré de l'excentricité de l'orbite, la partie constante du rayon r, se réduit dans l'hypothèse elliptique, au demi-grand axe a. Soit δa le terme constant que les forces perturbatrices ajoutent au rayon r, l'équation précédente deviendra ainsi,

$$0 = \frac{\partial^2 . (r \delta r)}{\partial t^2} + \frac{(1 + m)}{a^3} . \left(1 - \frac{3 . \delta a}{a}\right) . r \delta r$$
$$+ 2 \int d R + r . \left(\frac{\partial R}{\partial r}\right).$$

En ne considérant que les termes dépendans de la figure de Jupiter, on a

$$R = - \frac{(1 + m) . (\rho - \frac{1}{2} \varphi)}{3 . r^3};$$

d'où l'on tire

$$\int d R = R; \quad r . \left(\frac{\partial R}{\partial r}\right) = - 3 R;$$

partant

$$2 \int d R + r . \left(\frac{\partial R}{\partial r}\right) = - R = \frac{(1 + m) . (\rho - \frac{1}{2} \varphi)}{3 r^3}.$$

En substituant $a^2 + 2 r \delta r$, au lieu de r^2, ou, ce qui revient au même, $a + \frac{r \delta r}{a}$, au lieu de r, on aura,

$$2 \int d R + r . \left(\frac{\partial R}{\partial r}\right) = \frac{(1 + m) . (\rho - \frac{1}{2} \varphi)}{3 a^3}$$
$$- (1 + m) . \frac{(\rho - \frac{1}{2} \varphi)}{a^5} . r \delta r.$$

Si l'on ne considère que les termes dépendans de l'action du second satellite, on a

$$R = \frac{m' . r}{r'^2} \text{ cos.} (v' - v) - m' . [r^2 - 2 r r' . \text{cos.} (v' - v) + r'^2]^{-\frac{1}{2}}.$$

Supposons que la fonction $[r^2 - 2rr'.\cos.(v'-v) + r'^2]^{-\frac{1}{2}}$, développée suivant les cosinus de $v'-v$ & de ses multiples, soit

$$\tfrac{1}{2}.B^{(0)} + B^{(1)}.\cos.(v'-v) + B^{(2)}.\cos.2(v'-v) + B^{(3)}.\cos.3(v'-v) + \&c.$$

Nommons $nt+\varepsilon$, & $n't+\varepsilon'$, les valeurs moyennes de v & de v', c'est-à-dire, les longitudes moyennes de v & de v', comptées de l'axe des x; en substituant au lieu de v & de v', ces valeurs dans l'expression de R, & en y changeant r & r', dans a & a', on aura

$$2\int dR = \frac{2K}{a} - \frac{2nm'}{n-n'}.\left\{\begin{array}{l}(B^{(1)} - \frac{a}{a'^2}).\cos.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)\\ + B^{(2)}.\cos.2(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)\\ + B^{(3)}.\cos.3(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)\\ + \&c.\end{array}\right\}$$

$\frac{K}{a}$ étant une constante ajoutée à l'intégrale $\int dR$. On aura ensuite,

$$r\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right) = -m'a.\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}.\left(\frac{\partial B^{(0)}}{\partial a}\right)\\ + \left[\left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial a}\right) - \frac{1}{a'^2}\right].\cos.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)\\ + \left(\frac{\partial B^{(2)}}{\partial a}\right).\cos.2(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)\\ + \&c.\end{array}\right\}$$

$B^{(0)}$, $B^{(1)}$, $B^{(2)}$, &c. étant fonctions de a & de a', dans ces deux formules.

Nous étant proposés de conserver les termes dans lesquels $r\,\delta r$ est multiplié par une constante, nous devons ajouter aux seconds membres de ces formules, les termes de ce genre, que renferment $\int dR$, & $r\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)$. Or si

dans le terme $-\frac{m'}{2} . B^{(0)}$, de R, on substitue $a + \frac{r\,\delta r}{a}$, au lieu de r, il en résultera le terme $-m' . \frac{r\,\delta r}{2a} . \left(\frac{\partial B^{(0)}}{\partial a}\right)$. la fonction $2 \int dR$, contient donc le terme $-m' . \frac{r\,\delta r}{a} . \left(\frac{\partial B^{(0)}}{\partial a}\right)$. En substituant pareillement $a + \frac{r\,\delta r}{a}$, au lieu de r, dans la fonction $r . \left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)$, on voit qu'elle contient le terme $-\frac{m' . r\,\delta r}{2a} . \left[\left(\frac{\partial B^{(0)}}{\partial a}\right) + a . \left(\frac{\partial \partial B^{(0)}}{\partial a^2}\right)\right]$.
Cela posé, si l'on rassemble tous ces termes dans l'équation différentielle (1), & qu'on la divise par a^2; si l'on observe de plus que l'on a $n^2 = \frac{1+m}{a^3}$, & si, pour abréger, on suppose

$$N^2 = n^2 . \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{3\,\delta a}{a} - \frac{(\rho - \frac{1}{3}\varphi)}{a^2} \\ - \frac{m' . a^2}{2} \left[3 . \left(\frac{\partial B^{(0)}}{\partial a}\right) + a \left(\frac{\partial \partial B^{(0)}}{\partial a^2}\right)\right] \end{array} \right\};$$

on aura

$$0 = \frac{\partial \partial . (r\,\delta r)}{a^2 . \partial t^2} + N^2 . \frac{r\,\delta r}{a^2} + 2\,n^2 K$$
$$+ \frac{n^2 . (\rho - \frac{1}{3}\varphi)}{3\,a^2} - \frac{m' . n^2 a^2}{2} . \left(\frac{\partial B^{(0)}}{\partial a}\right)$$
$$- m' . n^2 . \left[a^2 . \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial a}\right) - \frac{a^2}{a'^2} + \frac{2n}{n - n'} .\right.$$
$$\left.\left(a B^{(1)} - \frac{a^2}{a'^2}\right)\right] . \text{cos}. (n't - nt + \epsilon' - \epsilon)$$

$$- m' . n^2 . \left[a^2 . \left(\frac{\partial B^{(2)}}{\partial a} \right) + \frac{2 n}{n - n'} . a B^{(2)} \right] . \cos. 2 (n' t - n t + \varepsilon' - \varepsilon)$$

$$- m' . n^2 . \left[a^2 . \left(\frac{\partial B^{(3)}}{\partial a} \right) + \frac{2 n}{n - n'} . a B^{(3)} \right] . \cos. 3 . (n' t - n t + \varepsilon' - \varepsilon)$$

— &c.

L'action des autres satellites, & celle du Soleil, ne feront qu'ajouter à cette équation, & à l'expression de N^2, des termes semblables à ceux que produit l'action du satellite m'; il sera facile de les déterminer par analogie; ainsi nous en ferons abstraction ici, pour simplifier le calcul.

Si l'on intègre l'équation précédente, sans y ajouter de constantes, on aura

$$\frac{r \delta r}{a^2} = - \frac{n^2}{N^2} . \left[2 K + \frac{(\rho - \frac{1}{2} \varphi)}{3 a^2} - \frac{m' a^2 .}{2} \left(\frac{\partial B^{(0)}}{\partial a} \right) \right]$$

$$\frac{- m' . n^2}{(n - n')^2 - N^2} . \left[a^2 . \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial a} \right) - \frac{a^2}{a'^2} + \frac{2 n}{n - n'} . \left(a B^{(1)} - \frac{a^2}{a'^2} \right) \right] . \cos. (n' t - n t + \varepsilon' - \varepsilon)$$

$$\frac{- m' . n^2}{4 . (n - n')^2 - N^2} . \left[a^2 . \left(\frac{\partial B^{(2)}}{\partial a} \right) + \frac{2 n}{n - n'} . a . B^{(2)} \right] . \cos. 2 (n' t - n t + \varepsilon' - \varepsilon)$$

$$\frac{- m' . n^2}{9 . (n - n')^2 - N^2} . \left[a^2 . \left(\frac{\partial B^{(3)}}{\partial a} \right) + \frac{2 n}{n - n'} . a . B^{(3)} \right] . \cos. 3 (n' t - n t + \varepsilon' - \varepsilon)$$

— &c.

La partie constante de cette expression, est ce que nous avons désigné ci-dessus par $\frac{\delta a}{a}$; on aura donc, en observant que N^2 diffère extrêmement peu de n^2,

$$\frac{\delta a}{a} = -2K - \frac{(\rho - \frac{1}{2}\varphi)}{3a^2} + \frac{m'.a^2}{2}.\left(\frac{\partial B^{(0)}}{\partial a}\right).$$

Si l'on substitue les valeurs précédentes de $\int dR$, $r.\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)$, & de $\frac{r\delta r}{a^2}$, dans l'expression de δv, donnée par la formule (2) de l'*article II*; si l'on néglige les excentricités, & qu'ainsi l'on suppose $r = a$; on aura, après toutes les réductions,

$$\delta v = nt.\left[3K + \frac{(1+m).(\rho - \frac{1}{2}\varphi)}{a^2} - m'.a^2.\left(\frac{\partial B^{(0)}}{\partial a}\right)\right]$$

$$\frac{-n.m'}{n-n'}.\left\{\frac{n}{n-n'}.\left(aB^{(1)} - \frac{a^2}{a'^2}\right) + \frac{2N^2}{(n-n')^2 - N^2}\left[\begin{array}{l} a^2\left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial a}\right) - \frac{a^2}{a'^2} \\ + \frac{2n}{n-n'}.\left(aB^{(1)} - \frac{a^2}{a'^2}\right)\end{array}\right]\right\}.$$

$$\sin.(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$$

$$\frac{-n.m'}{2.(n-n')}.\left\{\frac{n}{n-n'}.aB^{(2)} + \frac{2N^2}{4.(n-n')^2 - N^2}.\left[a^2.\left(\frac{\partial B^{(2)}}{\partial a}\right) + \frac{2n}{n-n'}.aB^{(2)}\right]\right\}.$$

$$\sin.2(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$$

$$\frac{-n.m'}{3.(n-n')}.\left\{\frac{n}{n-n'}.aB^{(3)} + \frac{2N^2}{9.(n-n')^2 - N^2}.\left[a^2.\left(\frac{\partial B^{(3)}}{\partial a}\right) + \frac{2n}{n-n'}.aB^{(3)}\right]\right\}.$$

$$\sin.3.(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$$

— &c.

Cette expression de δv sera facile à réduire en nombres, lorsque l'on aura déterminé numériquement la valeur précédente de $\frac{r\delta r}{a^2}$.

nt étant supposé représenter le moyen mouvement du satellite m, son coéfficient dans la valeur de δv, doit être nul, cequi détermine la constante K; on aura donc

$$K = -\frac{(1+m).(\rho - \frac{1}{2}\varphi)}{3a^2} + \frac{1}{3}.m'.a^2.\left(\frac{\partial B^{(0)}}{\partial a}\right).$$

En substituant cette valeur de K, & celle de $\frac{\delta a}{a}$, dans

l'expression de N^2, elle deviendra

$$N^2 = n^2 . \left\{ 1 - 2 . \frac{(1+m).(\rho - \frac{1}{2}\varphi)}{a^3} - m' a^2 . \left[\left(\frac{\partial B^{(0)}}{\partial a} \right) + \frac{a}{2} . \left(\frac{\partial \partial B^{(0)}}{\partial a^2} \right) \right] \right\}.$$

On aura les expressions de $\frac{r' \delta r'}{a'^2}$, $\delta v'$; $\frac{r'' \delta r''}{a''^2}$, $\delta v''$; $\frac{r''' \delta r'''}{a'''^2}$, $\delta v'''$; en changeant dans les valeurs précédentes de $\frac{r \delta r}{a^2}$, & de δv, les quantités relatives au premier satellite, dans les quantités semblables relatives au second, au troisième & au quatrième satellite, & réciproquement,

Les rapports qu'ont entr'eux les moyens mouvemens des trois premiers satellites, donnent des valeurs considérables à quelques-uns des termes de ces expressions; ces termes méritent une attention particulière, en ce qu'ils sont la source des principales inégalités observées dans les mouvemens des deux premiers satellites.

V.

Le moyen mouvement du premier satellite de Jupiter, est à fort peu-près double de celui du second, qui lui-même est à très-peu-près double du moyen mouvement du troisième satellite. Il suit de-là que le terme de l'expression de $\frac{r \delta r}{a^2}$, qui dépend de l'angle $2 n' t - 2 n t + 2 \varepsilon - 2 \varepsilon$, doit devenir fort grand par son diviseur $4 (n - n')^2 - N^2$, ou $(2 n - 2 n' + N).(2 n - 2 n' - N)$; car N & $2 n'$ étant fort peu différens de n, le facteur $2 n - 2 n' - N$ est très-petit, & donne une valeur considérable au terme dont il s'agit. On voit en même temps, la nécessité de déterminer N avec précision, comme nous l'avons fait; parce que sa différence d'avec n, quoique très-petite, devient sensible dans le facteur $2 n - 2 n' - N$. Le terme $- 2 (1 + m). n^2 . \frac{(\rho - \frac{1}{2}\varphi)}{a^3}$,

de l'expreſſion de N^2, qui dépend de la figure de Jupiter, ſurpaſſe conſidérablement ceux qui dépendent des actions des ſatellites, comme on le verra ci-après; nous pouvons donc ſuppoſer ſans erreur ſenſible, $N = n . [1 - \frac{(\rho - \frac{1}{2}\varphi)}{a^2}]$, dans le facteur $2n - 2n' - N$, & faire $n = N$ dans tous les autres termes.

La partie de δv, qui dépend de l'angle $2n't - 2nt + 2\epsilon' - 2\epsilon$, eſt pareillement fort conſidérable, à cauſe du diviſeur $(2n - 2n' - N) . (2n - 2n' + N)$. En ſuppoſant donc

$$F = a^2 . (\frac{\partial B^{(2)}}{\partial a}) + \frac{2n}{n - n'} . a B^{(2)};$$

en faiſant enſuite $N = n$, & $2n' = n$, dans le facteur $2n - 2n' + N$; on aura, en n'ayant égard qu'à la partie de $\frac{r \delta r}{a^2}$, qui a pour diviſeur $2n - 2n' - N$;

$$\frac{r . \delta r}{a^2} = - \frac{n . m' . F}{2 . (2n - 2n' - N)} . \text{coſ.}\, 2 (nt - n't + \epsilon - \epsilon').$$

On aura dans les mêmes ſuppoſitions,

$$\delta v = \frac{n . m' . F}{2n - 2n' - N} . \text{ſin.}\, 2 (nt - n't + \epsilon - \epsilon').$$

Cette partie de δv, eſt la ſeule inégalité ſenſible dans le mouvement du premier ſatellite, & l'obſervation eſt en cela conforme à la théorie, puiſqu'elle n'indique que cette inégalité.

Si dans la théorie du ſecond ſatellite, on déſigne par N', la quantité qui correſpond à N, dans la théorie du premier; il eſt aiſé de voir que l'expreſſion de $\frac{r' \delta r'}{a'^2}$ renfermera le terme

$$\frac{- m . n'^2}{(n - n')^2 - N'^2} . [a'^2 . (\frac{\partial B^{(1)}}{\partial a'}) - \frac{a'^2}{a^2} + \frac{2n'}{n' - n} . (a' B^{(1)} - \frac{a'^2}{a^2})] . \text{coſ.}\, (nt - n't + \epsilon - \epsilon').$$

Le diviſeur $(n - n')^2 - N'^2$ eſt égal à $(n - n' - N').(n - n' + N')$; or N' étant fort peu différent de n', & n étant peu différent de $2\,n'$, le facteur $n - n' - N'$ eſt très-petit, ce qui donne au terme précédent, une valeur conſidérable; en ſuppoſant donc

$$G = a'^2.\left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial a'}\right) - \frac{a'^2}{a^2} - \frac{2\,n'}{n - n'}.\left(a' B^{(1)} - \frac{a''}{a^2}\right);$$

en faiſant enſuite $n = 2\,n'$, & $N' = n'$, dans le facteur $n - n' + N'$; on aura, en n'ayant égard qu'à la partie de $\frac{r'\,\delta\,r'}{a'^2}$, qui a pour diviſeur $n - n' - N'$, & qui dépend de l'action du premier ſatellite,

$$\frac{r'\,\delta\,r'}{a'^2} = \frac{-\,n'.\,m.\,G}{2.(n-n'-N')}\ .\ \text{coſ.}\,(n\,t - n'\,t + \epsilon - \epsilon').$$

on aura dans les mêmes ſuppoſitions,

$$\delta\,v' = \frac{n'.\,m.\,G}{n - n' - N'}\ .\ \text{ſin.}\,(n\,t - n'\,t + \epsilon - \epsilon').$$

Ces valeurs ne ſont relatives qu'à l'action du premier ſatellite; l'action du troiſième produit encore des termes ſenſibles dans les expreſſions de $\frac{r'\,\delta\,r'}{a'^2}$, & de $\delta\,v'$. En effet, le mouvement du ſecond ſatellite étant à fort peu-près double de celui du troiſième, il doit en réſulter dans ces expreſſions, des termes analogues à ceux que l'action du ſecond ſatellite produit dans les valeurs de $\frac{r\,\delta\,r}{a^2}$, & de $\delta\,v$. Nommons $B'^{(0)}$, $B'^{(1)}$, $B'^{(2)}$, &c. relativement au ſecond & au troiſième ſatellite, ce que nous avons déſigné par $B^{(0)}$, $B^{(1)}$, $B^{(2)}$, &c. relativement au premier & au ſecond; ſuppoſons enſuite

$$F = a'^2.\left(\frac{\partial B'^{(2)}}{\partial a'}\right) + \frac{2\,n'}{n' - n''}\ .\ a'.\ B'^{(2)};$$

nous aurons par l'action du troisième satellite,

$$\frac{r' \delta r'}{a'^2} = \frac{-n'.m''.F'}{2.(2n'-2n''-N')} . \text{cos.} 2 (n't - n''t + \varepsilon' - \varepsilon'').$$

$$\delta v' = \frac{n'.m''.F'}{2n'-2n''-N'} . \text{sin.} 2 (n't - n''t + \varepsilon' - \varepsilon'').$$

En réunissant ces valeurs aux précédentes, on aura tous les termes sensibles des expressions de $\frac{r' \delta r'}{a'^2}$ & de $\delta v'$.

Un rapport très-remarquable qui existe entre les moyens mouvemens des trois premiers satellites, réunit en un seul terme, les deux termes des expressions de $\frac{r' \delta r'}{a'^2}$ & de $\delta v'$, dûs aux actions du premier & du troisième satellites. Nous avons observé que le moyen mouvement du premier satellite est à peu-près double de celui du second, qui lui-même est double à peu-près du moyen mouvemeut du troisième satellite. Il en résulte que le moyen mouvement du premier satellite plus deux fois celui du troisième, est à peu-près égal à trois fois celui du second, ou, ce qui revient au même, que l'on a à peu-près, $n + 2n'' = 3n'$. Cette égalité est tellement approchée, que depuis plus d'un siècle, les observations n'y ont fait apercevoir aucune différence sensible, en sorte que l'on peut rejeter sur les erreurs des Tables, la différence très-petite qu'elles donnent à cet égard. Nous pouvons donc supposer, au moins dans l'espace d'un siècle, $n + 2n'' = 3n'$. Nous verrons dans la suite que cette égalité est rigoureuse.

Les observations donnent encore, à très-peu-près, depuis plus d'un siècle, la longitude moyenne du premier satellite, plus deux fois celle du troisième, moins trois fois celle du second, égale à 180^d; en sorte que dans l'intervalle d'un siècle, on peut supposer

$$nt - 3n't + 2n''t + \varepsilon - 3\varepsilon' + 2\varepsilon'' = 180^d;$$

& par conséquent

$2n't - 2n''t + 2\varepsilon' - 2\varepsilon'' = nt - n't + \varepsilon - \varepsilon' - 180^d.$

Nous verrons encore dans la ſuite que ces égalités ſont rigoureuſes. Les termes de $\frac{r'\delta r'}{a'^2}$ & de $\delta v'$, qui dépendent de l'action du troiſième ſatellite, deviennent ainſi,

$$\frac{r'\delta r'}{a'^2} = \frac{n'.m''.F'}{2(n-n'-N')} . \text{coſ.}(nt - n't + \varepsilon - \varepsilon').$$

$$\delta v' = \frac{-n'.m''.F'}{n-n'-N'} . \text{ſin.}(nt - n't + \varepsilon - \varepsilon').$$

Si l'on réunit ces valeurs à celles qui dépendent de l'action du premier ſatellite, on aura

$$\frac{r'\delta r'}{a'^2} = \frac{n'}{2.(n-n'-N')} . [m''F' - mG]. \text{coſ.}(nt - n't + \varepsilon - \varepsilon').$$

$$\delta v' = \frac{-n'}{n-n'-N'} . [m''F' - mG]. \text{ſin.}(nt - n't + \varepsilon - \varepsilon').$$

L'action du ſecond ſatellite produit dans la théorie du troiſième, des termes analogues à ceux que l'action du premier produit dans la théorie du ſecond; en faiſant donc

$$G' = a''^2.\left(\frac{\partial B'^{(1)}}{\partial a''}\right) - \frac{a''^2}{a'^2} - \frac{2.n''}{n'-n''}.\left[a''.B'^{(1)} - \frac{a''^2}{a'^2}\right];$$

on aura

$$\frac{r''\delta r''}{a''^2} = \frac{-n''.m'.G'}{2.(n'-n''-N'')} . \text{coſ.}(n't - n''t + \varepsilon' - \varepsilon'').$$

$$\delta v'' = \frac{n''.m'.G'}{n'-n''-N''} . \text{ſin.}(n't - n''t + \varepsilon' - \varepsilon'').$$

Les valeurs de $\frac{r''\delta r''}{a''^2}$, & de $\delta v''$, peuvent recevoir encore quelques termes ſenſibles, de l'action du quatrième ſatellite; mais ſon moyen mouvement étant ſenſiblement moindre que la moitié de celui du troiſième ſatellite,

ces termes doivent être peu considérables; nous y aurons cependant égard dans la suite.

Considérons présentement la loi des inégalités précédentes, dans les éclipses des satellites. Pour cela, nous donnerons aux valeurs précédentes de δv, $\delta v'$ & $\delta v''$, les formes suivantes:

$$\delta v = (\text{I}) \cdot \sin. 2\,(n t - n' t + \varepsilon - \varepsilon').$$
$$\delta v' = - (\text{II}) \sin. (n t - n' t + \varepsilon - \varepsilon').$$
$$\delta v'' = - (\text{III}) \cdot \sin. (n' t - n'' t + \varepsilon' - \varepsilon'').$$

Les coéfficiens (I), (II), (III), étant positifs, comme il résulte de ce que l'on verra ci-après. Au lieu de rapporter les angles $n t + \varepsilon$, $n' t + \varepsilon'$, $n'' t + \varepsilon''$, à une ligne fixe, nous pouvons les rapporter à un axe mobile, parce que la position de cet axe disparoît dans les angles $2\,(n t - n' t + \varepsilon - \varepsilon')$, $n t - n' t + \varepsilon - \varepsilon'$, & $n' t - n'' t + \varepsilon' - \varepsilon''$. Concevons que cet axe mobile soit le rayon vecteur de Jupiter supposé mû uniformément autour du Soleil; dans ce cas, les angles $n t$, $n' t$, $n'' t$, seront les moyens mouvemens synodiques des trois premiers satellites. Concevons de plus, que les angles ε & ε' soient nuls, c'est-à-dire, qu'à l'origine de t, les deux premiers satellites ayent été en conjonction; l'équation

$n t - 3 n' t + 2 n'' t + \varepsilon - 3 \varepsilon' + 2 \varepsilon'' = 180^d$, donnera $\varepsilon'' = 90^d$; les expressions de δv, $\delta v'$, $\delta v''$, deviendront ainsi,

$$\delta v = (\text{I}) \cdot \sin. 2\,(n t - n' t).$$
$$\delta v' = - (\text{II}) \cdot \sin. (n t - n' t).$$
$$\delta v'' = (\text{III}) \cdot \cos. (n' t - n'' t).$$

Dans les éclipses du premier satellite, au moment de la conjonction moyenne, $n t$ est nul ou multiple de 360^d; soit donc $2 n - 2 n' = n + \omega$, ou $n - 2 n' = \omega$, on aura,

$$\delta v = (\text{I}).\ \text{fin.}\ \omega t.$$

Dans les éclipſes du ſecond ſatellite, à l'inſtant de la conjonction moyenne, $n' t$ eſt nul ou multiple de 360^d; on aura donc alors

$$\delta v' = -(\text{II}).\ \text{fin.}\ \omega t.$$

Enfin, dans les éclipſes du troiſième ſatellite, à l'inſtant de la conjonction moyenne, $n'' t$ eſt nul ou multiple de 360^d; on aura donc alors, en vertu de l'équation $n - 2n' = n' - 2n''$,

$$\delta v'' = (\text{III}).\ \text{cof.}\ \omega t.$$

On voit ainſi que les valeurs de δv, $\delta v'$ & $\delta v''$, dans les éclipſes des ſatellites, dépendent du même angle ωt. La période de ces valeurs eſt par conſéquent la même, & égale à la durée de la révolution ſynodique du premier ſatellite, multipliée par $\frac{n}{n - 2n'}$, $n t$ & $n' t$ étant ici les moyens mouvemens ſynodiques des deux premiers ſatellites. En ſubſtituant pour n & n' leurs valeurs, on trouve que cette période eſt de $437^j\ 15^h\ 12'$. Tous ces réſultats ſont parfaitement conformes aux obſervations qui ont fait reconnoître les inégalités précédentes, avant qu'elles ayent été indiquées par la théorie.

VI.

LA détermination des inégalités précédentes n'a de difficulté, que celle de la formation des quantités $B^{(0)}$, $B^{(1)}$, $B^{(2)}$, &c. & de leurs différences. J'ai donné des formules pour cet objet, dans les *Mémoires de l'Académ. pour l'année 1785, pag. 64 & ſuivantes;* je vais rappeler ici les pincipales.

Soit $\frac{a}{a'} = \alpha$, & ſuppoſons que l'on ait

$$(1 - 2\alpha.\ \text{cof.}\ \theta + \alpha^2)^{-s} = \tfrac{1}{2}.\ b_s^{(0)} + b_s^{(1)}.\ \text{cof.}\ \theta + b_s^{(2)}.\ \text{cof.}\ 2\theta + b_s^{(3)}.\ \text{cof.}\ 3\theta + \&\text{c.}$$

on aura

on aura généralement

$$b_s^{(i)} = \frac{(i-1).(1+\alpha^2).b_s^{(i-1)} - (i+s-2).\alpha.b_s^{(i-2)}}{(i-s).\alpha};$$

$$b_{s+1}^{(i)} = \frac{\frac{(i+s)}{s}(1+\alpha^2).b_s^{(i)} - \frac{2(i-s+1)}{s}.\alpha.b_s^{(i+1)}}{(1-\alpha^2)^2}.$$

On pourra, au moyen de ces formules, déterminer $b_s^{(2)}$, $b_s^{(3)}$, &c. $b_{s+1}^{(0)}$, &c. lorſque $b_s^{(0)}$ & $b_s^{(1)}$ ſeront connus. On a enſuite :

$$\frac{\partial b_s^{(i)}}{\partial \alpha} = \left[\frac{i+(i+2s).\alpha^2}{\alpha.(1-\alpha^2)}\right].b_s^{(i)} - \frac{2.(i-s+1)}{1-\alpha^2}.b_s^{(i+1)}.$$

Cette équation différenciée donnera les différences ſecondes de $b_s^{(i)}$. Il ne s'agit donc que de déterminer $b_s^{(0)}$ & $b_s^{(1)}$.

Dans la théorie des ſatellites, $s = \frac{1}{2}$; & l'on aura de cette manière, les valeurs de $b_{\frac{1}{2}}^{(0)}$, & de $b_{\frac{1}{2}}^{(1)}$. On déterminera d'abord les quantités $b_{-\frac{1}{2}}^{(0)}$ & $b_{-\frac{1}{2}}^{(1)}$, au moyen des ſuites.

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 2.\left[1+\left(\tfrac{1}{2}\right)^2.\alpha^2 + \left(\frac{1.1}{2.4}\right)^2\alpha^4 + \left(\frac{1.1.3}{2.4.6}\right)^2.\alpha^6 + \left(\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}\right)^2.\alpha^8 + \text{\&c.}\right].$$

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = -2\alpha.\left[\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}.\frac{1.1}{2.4}.\alpha^2 - \frac{1.1}{2.4}.\frac{1.1.3}{2.4.6}.\alpha^4 - \frac{1.1.3}{2.4.6}.\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}.\alpha^6 - \text{\&c.}\right].$$

Ces deux ſuites ſont fort convergentes, & il ſuffit dans tous les cas, d'en prendre les dix ou onze premiers termes. Lorſque l'on aura ainſi déterminé $b_{-\frac{1}{2}}^{(0)}$ & $b_{-\frac{1}{2}}^{(1)}$,

on aura $b^{(0)}_{\frac{1}{2}}$, & $b^{(1)}_{\frac{1}{2}}$, au moyen des formules :

$$b^{(0)}_{\frac{1}{2}} = \frac{(1 + \alpha^2) \cdot b^{(0)}_{-\frac{1}{2}} + 6\,\alpha \cdot b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}}{(1 - \alpha^2)^2};$$

$$b^{(1)}_{\frac{1}{2}} = \frac{2\,\alpha \cdot b^{(0)}_{-\frac{1}{2}} + 3 \cdot (1 + \alpha^2) \cdot b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}}{(1 - \alpha^2)^2}.$$

Maintenant, on a généralement :

$$a \cdot B^{(i)} = \alpha\, b^{(i)}_{\frac{1}{2}}; \quad a^2 \cdot \left(\frac{\partial B^{(i)}}{\partial a}\right) = \alpha^2 \cdot \frac{\partial b^{(i)}_{\frac{1}{2}}}{\partial \alpha};$$

$$a^3 \cdot \left(\frac{\partial \partial B^{(i)}}{\partial a^2}\right) = \alpha^3 \cdot \frac{\partial \partial b^{(i)}_{\frac{1}{2}}}{\partial \alpha^2}; \text{ \&c.}$$

Quant aux différences partielles de $B^{(i)}$ prises relativement à a', on observera que $B^{(i)}$ est une fonction homogène de a & de a', de la dimension -1 ; or on a par la nature de ce genre de fonctions,

$$a' \cdot \left(\frac{\partial B^{(i)}}{\partial a'}\right) = -B^{(i)} - a \cdot \left(\frac{\partial B^{(i)}}{\partial a}\right);$$

d'où il est aisé de conclure les valeurs de $a\,a' \cdot \left(\frac{\partial \partial B^{(i)}}{\partial a \cdot \partial a'}\right)$, $a'^2 \cdot \left(\frac{\partial \partial B^{(i)}}{\partial a'^2}\right)$, &c. on pourra donc ainsi déterminer les valeurs de $B^{(0)}$, $B^{(1)}$, $B^{(2)}$, &c. & de leurs différences prises, soit relativement à a, soit relativement à a'.

VII.

Des inégalités du mouvement des Satellites, dépendantes des excentricités des orbites.

CONSIDÉRONS présentement les parties du rayon vecteur & de la longitude des satellites, qui dépendent

des excentricités des orbites. Pour cela nous reprendrons l'équation *(1)* de l'*article II*, en la mettant sous cette forme:

$$o = \frac{\partial\partial(r\delta r)}{a^2.\partial t^2} + \frac{(1+m).r\delta r}{a^2.r^3} + \frac{2\int.dR + r.\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)}{a^2}.$$

Les termes dans lesquels $r\delta r$ est multiplié par une constante, & ceux qui dépendent du sinus & du cosinus de l'angle $nt + \varepsilon$, méritent une attention particulière, en ce qu'ils déterminent les variations de l'aphélie & de l'excentricité de l'orbite; nous allons donc les discuter avec soin. Les termes dans lesquels $r\delta r$ est multiplié par une constante, ont été déjà déterminés dans l'*art. IV*; pour avoir ceux qui dépendent du sinus & du cosinus de l'angle $nt + \varepsilon$, considérons la partie

$$\frac{m'.r.\text{cof.}(v'-v)}{r'^2} - m'.B^{(1)}.\text{cof.}(v'-v)$$

de la fonction R; si l'on y substitue $a' + \frac{r'\delta r'}{a'}$, au lieu de r', $\delta r'$ étant ici la partie de r' qui dépend de l'excentricité de l'orbite du satellite m', cette substitution produira la quantité

$$-\frac{m'.r'\delta r'}{a'^2}.\left[\frac{2a}{a'^2} + a'.\left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial a'}\right)\right].\text{cof.}(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon);$$

or, en nommant e' l'excentricité de l'orbite de m', & ϖ' la longitude de son aphélie, on a, comme l'on sait, aux quantités près de l'ordre e'^2

$$\frac{r'\delta r'}{a'^2} = e'.\text{cof.}(n't + \varepsilon' - \varpi');$$

la quantité précédente donnera par conséquent un terme dépendant du cosinus de l'angle $nt + \varepsilon - \varpi'$; nous ne conserverons ici que ce terme.

Dans l'orbite elliptique, v' est égal à $n't + \varepsilon' - 2e'.\text{fin.}(n't + \varepsilon' - \varpi')$, ou ce qui revient

au même, à $n' t + \varepsilon' + \frac{2 \partial . r' \delta r'}{a'^2 . n' . \partial t}$; en substituant cette valeur dans la fonction

$$\frac{m' r.}{r'^2} \text{cos.} (v' - v) - m' . B^{(1)} . \text{cos.} (v' - v);$$

il en résultera le terme

$$- \frac{2 m' . \partial . r' \delta r'}{a'^2 . n' \partial t} . \left[\frac{a}{a'^2} - B^{(1)} \right] . \text{sin.} (n' t - n t + \varepsilon' - \varepsilon);$$

nous ne retiendrons encore dans ce terme, que la partie qui dépend de l'angle $n t + \varepsilon - \varpi'$.

On s'assurera facilement que les termes précédens sont les seuls qui dans le développement de la fonction R, dépendent du sinus & du cosinus de l'angle $n t + \varepsilon$, du moins en n'ayant égard qu'aux premières puissances des excentricités; de plus, on a évidemment, en n'ayant égard qu'à ces termes, $\int d R = R$; partant

$$2 . \int d R + r \left(\frac{\partial R}{\partial r} \right) = - \frac{m' . r' \delta r'}{a'^2} . \left[\frac{6 a}{a'^2} + 2 a' . \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial a'} \right) + a a' . \left(\frac{\partial \partial B^{(1)}}{\partial a . \partial a'} \right) \right] . \text{cos.} (n' t - n t + \varepsilon' - \varepsilon)$$

$$- \frac{2 m' . \partial . r' \delta r'}{a'^2 . n' \partial t} . \left[\frac{3 a}{a'^2} - 2 B^{(1)} - a \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial a} \right) \right] . \text{sin.} (n' t - n t + \varepsilon' - \varepsilon);$$

l'équation différentielle en $\frac{r \delta r}{a^2}$, deviendra ainsi, en n'y considérant que les termes multipliés par $r \delta r$, & par le sinus & le cosinus de l'angle $n t + \varepsilon$, & en y substituant n^2, au lieu de $\frac{1}{a^3}$,

$$0 = \frac{\partial^2 . (r \delta r)}{a^2 . n' \partial t} + N^2 . \frac{r \delta r}{a^2} - m' n^2 . \frac{r' \delta r'}{a'^2} . \left[\frac{6 a^2}{a'^2} + 2 a a' . \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial a'} \right) + a^2 a' . \left(\frac{\partial \partial B^{(1)}}{\partial a . \partial a'} \right) \right] . \text{cos.} (n' t - n t + \varepsilon' - \varepsilon)$$

$$- \frac{2 m' n^2 . \partial . r' \delta r'}{a'^2 . n' \partial t} . \left[\frac{3 a^2}{a'^2} - 2 a B^{(1)} - a^2 \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial a} \right) \right] . \text{ſin.} (n' t - n t + \varepsilon' - \varepsilon).$$

Suppoſons

$$\frac{r \delta r}{a^2} = h . \text{ coſ.} (n t + \varepsilon - g t - \Gamma);$$

$$\frac{r' \delta r'}{a'^2} = h' . \text{ coſ.} (n' t + \varepsilon' - g t - \Gamma);$$

g étant un très-petit coéfficient dépendant des forces perturbatrices. En ſubſtituant ces valeurs dans l'équation différentielle précédente, & en négligeant les carrés & les produits des forces perturbatrices, la comparaiſon des coéfficiens de coſ. $(n t + \varepsilon - g t - \Gamma)$, donnera en mettant pour N^2, ſa valeur trouvée dans l'*article IV*.

$$0 = h \left\{ \frac{g}{n} - \frac{(\rho - \frac{1}{2} \varphi)}{a^2} - \frac{m'}{2} . \left[a^2 . \left(\frac{\partial B^{(0)}}{\partial a} \right) + \frac{1}{2} . a^3 . \left(\frac{\partial \partial B^{(0)}}{\partial a^2} \right) \right] \right\}$$

$$- \frac{1}{2} m' h' . \left[2 a . B^{(1)} + a^2 . \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial a} \right) + a a' . \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial a'} \right) + \frac{1}{2} a^2 a' . \left(\frac{\partial \partial B^{(1)}}{\partial a . \partial a'} \right) \right].$$

Pour donner à cette équation la forme la plus ſimple dont elle eſt ſuſceptible, nous obſerverons que l'on a par l'*article précédent*,

$$a' . \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial a'} \right) = - B^{(1)} - a . \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial a} \right);$$

d'où l'on tire,

$$a' . \left(\frac{\partial \partial B^{(1)}}{\partial a . \partial a'} \right) = - 2 . \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial a} \right) - a . \left(\frac{\partial \partial B^{(1)}}{\partial a^2} \right).$$

En ſubſtituant ces valeurs dans l'équation précédente, & en y mettant, au lieu de $B^{(0)}$, $B^{(1)}$, & de leurs différences

relatives à a, les valeurs déterminées par l'*art. précédent*, on aura :

$$0 = h.\left\{\frac{g}{n} - \frac{(\rho - \frac{1}{2}\varphi)}{a^2} - \frac{m'.\alpha^2}{2}.\left[\frac{\partial b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{\partial \alpha} + \frac{1}{2}\alpha.\frac{\partial\partial b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{\partial \alpha^2}\right]\right\}$$

$$- \frac{1}{2} m' h'.\left[\alpha.b^{(1)}_{\frac{1}{2}} - \alpha^2.\frac{\partial b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{\partial \alpha} - \frac{1}{2}\alpha^3.\frac{\partial\partial b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{\partial \alpha^2}\right].$$

Si l'on ſubſtitue au lieu de $\frac{\partial b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial\partial b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{\partial \alpha^2}$, $b^{(1)}_{\frac{1}{2}}$, $\frac{\partial b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{\partial \alpha}$ & $\frac{\partial\partial b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{\partial \alpha^2}$, leurs valeurs en $b^{(0)}_{-\frac{1}{2}}$, & $b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}$, qu'il eſt facile de conclure des formules de l'*art. précédent*, on trouvera

$$\alpha^2.\frac{\partial b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{\partial \alpha} + \frac{1}{2}.\alpha^3.\frac{\partial\partial b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{\partial \alpha^2} = - \frac{3\alpha^2.b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}}{2.(1 - \alpha^2)^2};$$

$$\alpha b^{(1)}_{\frac{1}{2}} - \alpha^2.\frac{\partial b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{\partial \alpha} - \frac{1}{2}\alpha^3.\frac{\partial\partial b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{\partial \alpha^2} = \frac{\frac{3}{2}\alpha^2.b^{(0)}_{-\frac{1}{2}} + 3\alpha.(1 + \alpha^2).b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}}{(1 - \alpha^2)^2}.$$

Soit maintenant T, la durée d'une année Julienne ; nT ſera le moyen mouvement du ſatellite m, dans cet intervalle ; multiplions l'équation précédente entre h & h' par nT, & ſuppoſons $gT = f$, en ſorte que f ſoit le mouvement de l'aphélie durant une année Julienne ; ſuppoſons encore

$$(0) = \frac{(\rho - \frac{1}{2}\varphi)}{a^2}.nT;$$

$$(0,1) = - \frac{3m'.nT}{4}.\frac{\alpha^2.b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}}{(1 - \alpha^2)^2};$$

$$\overline{\underline{|0,1|}} = -\frac{3m'.nT}{2} \cdot \frac{\left[\frac{\alpha^2}{2} \cdot b^{(0)}_{-\frac{1}{2}} + \alpha.(1+\alpha^2).b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}\right];}{(1-\alpha^2)^2}$$

l'équation entre h & h', prendra cette forme très-simple,

$$0 = h.[f - (0) - (0,1)] + \overline{\underline{|0,1|}}.h'.$$

Il est visible que les actions des satellites m'', m''', sur m, ajoutent au second membre de cette équation, des termes analogues à ceux que produit l'action de m'. Soient donc $(0,2)$ & $\overline{\underline{|0,2|}}$, ce que deviennent $(0,1)$ & $\overline{\underline{|0,1|}}$, lorsque l'on y change m' & a' dans m'' & a''; soient pareillement $(0,3)$ & $\overline{\underline{|0,3|}}$, ce que deviennent les mêmes quantités, lorsque l'on y change m' & a' dans m''' & a'''; enfin, nommons h'' & h''', ce que devient h relativement à m'' & m'''; on aura, en vertu des actions réunies de Jupiter & des satellites,

$$0 = h.[f - (0) - (0,1) - (0,2) - (0,3)]$$
$$+ \overline{\underline{|0,1|}}.h' + \overline{\underline{|0,2|}}.h'' + \overline{\underline{|0,3|}}.h'''.$$

L'action du Soleil sur le satellite m, ajoute encore un terme au second membre de cette équation. Pour le déterminer, nous considèrerons le Soleil comme un satellite de Jupiter. Dans ce cas, si l'on nomme D' la moyenne distance de Jupiter au Soleil, on aura $\alpha = \frac{a}{D'}$, & les valeurs de $b^{(0)}_{-\frac{1}{2}}$ & $b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}$ de l'*article précédent* deviendront,

$$b^{(0)}_{-\frac{1}{2}} = 2.\left[1 + \frac{a^2}{4D'^2} + \&c.\right]; b^{(1)}_{-\frac{1}{2}} = -\frac{a}{D'}.\left[1 - \frac{a^2}{8D'^2} - \&c.\right].$$

La distance D' étant incomparablement plus grande que a, nous pouvons négliger les termes divisés par D'^4; la fonction $(0,1)$ devient ainsi, en y changeant m' dans S, & a' dans D'

$$(0,1) = \frac{3\,S.\,nT}{4} \cdot \frac{a^3}{D^3};$$

& la fonction $\overline{\underline{|0,1|}}$ est nulle. Soit présentement MT le moyen mouvement sidéral de Jupiter, on aura à très-peu-près, $M^2 = \frac{S}{D'^3}$; on a ensuite $n^2 = \frac{1}{a^3}$; on aura donc, relativement au Soleil,

$$(0,1) = \frac{3\,M^2.\,T}{4\,n};$$

nous désignerons cette dernière fonction par $\overline{\underline{|0|}}$. On aura, cela posé, en vertu des actions réunies de Jupiter, des Satellites & du Soleil,

$$0 = h.\{f - (0) - \overline{\underline{|0|}} - (0,1) - (0,2) - (0,3)\}; \quad (i)$$
$$+ \overline{\underline{|0.1|}}.h' + \overline{\underline{|0,2|}}.h'' + \overline{\underline{|0,3|}}.h'''.$$

Si l'on considère pareillement les perturbations du mouvement de m', il est visible qu'il en résultera une nouvelle équation semblable à la précédente, & qui s'en déduit en y changeant les quantités relatives à m, dans celles qui sont relatives à m', & réciproquement. Soient (1), $\overline{\underline{|1|}}$, $(1,0)$, $\overline{\underline{|1,0|}}$, $(1,2)$, $\overline{\underline{|1,2|}}$, $(1,3)$, $\overline{\underline{|1,3|}}$ ce que deviennent (0), $\overline{\underline{|0|}}$, $(0,1)$, $\overline{\underline{|0,1|}}$, $(0,2)$, $\overline{\underline{|0,2|}}$, $(0,3)$, $\overline{\underline{|0,3|}}$, en vertu de ces changemens; on aura,

$$0 = h'.\{f - (1) - \overline{\underline{|1|}} - (1,0) - (1,2) - (1,3)\}; \quad (i')$$
$$+ \overline{\underline{|1,0|}}.h + \overline{\underline{|1,2|}}.h'' + \overline{\underline{|1,3|}}.h'''.$$

Si l'on désigne semblablement par (2), $\overline{\underline{|2|}}$, $(2,1)$, $\overline{\underline{|2,1|}}$, $(2,0)$, $\overline{\underline{|2,0|}}$, $(2,3)$, $\overline{\underline{|2,3|}}$, ce que deviennent les

quantités

quantités (0), $\overline{|0|}$, $(0,1)$, $\overline{|0,1|}$, $(0,2)$, $\overline{|0,2|}$, $(0,3)$, $\overline{|0,3|}$, lorſque l'on y change ce qui eſt relatif à m, dans ce qui eſt relatif à m'', & réciproquement; ſi l'on déſigne encore par (3), $\overline{|3|}$, $(3,1)$, $\overline{|3,1|}$, $(3,2)$, $\overline{|3,2|}$, $(3,0)$, $\overline{|3,0|}$, ce que deviennent les mêmes quantités, lorſque l'on y change ce qui eſt relatif à m, dans ce qui eſt relatif à m''', & réciproquement, on aura les deux équations

$$0 = h''.\{f - (2) - \overline{|2|} - (2,0) - (2,1) - (2,3)\}; \quad (i'')$$
$$+ \overline{|2,0|}.h + \overline{|2,1|}.h' + \overline{|2,3|}.h'''$$

$$0 = h'''.\{f - (3) - \overline{|3|} - (3,0) - (3,1) - (3,2)\}; \quad (i''')$$
$$+ \overline{|3,0|}.h + \overline{|3,1|}.h' + \overline{|3,2|}.h''.$$

Il exiſte entre les fonctions $(0,1)$ & $(1,0)$, $(0,2)$ & $(2,0)$, &c. des rapports remarquables qui peuvent ſervir à déterminer ces fonctions les unes par les autres. On a, par ce qui précède,

$$(0,1) = -\frac{3\,m'.nT}{4}.\frac{\alpha^2.b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}}{(1-\alpha^2)^2}.$$

On a enſuite, par l'*article précédent*,

$$(a^2 - 2\,a\,a'.\,\text{coſ.}\,\theta + a'^2)^{\frac{1}{2}} = a'.$$
$$[\tfrac{1}{2}.b^{(0)}_{-\frac{1}{2}} + b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}.\ \text{coſ.}\,\theta + b^{(2)}_{-\frac{1}{2}}.\ \text{coſ.}\ 2\,\theta + \text{\&c.}].$$

Suppoſons qu'en développant le premier membre de cette équation, ſuivant les coſinus de l'angle θ & de ſes multiples, on ait la ſérie, $\frac{1}{2}.(a, a') + (a, a')^1.\text{coſ.}\,\theta + \text{\&c.}$ on aura

$$b^{(0)}_{-\frac{1}{2}} = \frac{(a,a')}{a'};\ b^{(1)}_{-\frac{1}{2}} = \frac{(a,a')^1}{a'}, \text{\&c.}$$

partant, $(0,1) = -\frac{3m'.nT.}{4} \cdot \frac{a^2 a'.(a, a')'}{(a'^2 - a^2)^2}$.

En changeant dans cette expreffion de $(0,1)$, les quantités m', n, a & a', dans m, n', a' & a, on aura l'expreffion de $(1,0)$; mais $(a, a')'$ refte toujours le même après ce changement; on aura donc

$$(1,0) = -\frac{3mn'T}{4} \cdot \frac{a'^2 a.(a, a')'}{(a'^2 - a^2)^2};$$

d'où l'on tire

$$(0,1).mn'a' = (1,0).m'na.$$

On a $n = \frac{1}{\sqrt{(a^3)}}$, $n' = \frac{1}{\sqrt{(a'^3)}}$;

partant, $(0,1).m\sqrt{(a)} = (1,0).m'\sqrt{(a')}$.

On aura donc $(1,0)$, au moyen de $(0,1)$, en multipliant cette dernière quantité par $\frac{m}{m'} \cdot \sqrt{(a)}$.

Il eft clair que l'on aura pareillement les relations fuivantes,

$(0,2).m.\sqrt{(a)} = (2,0).m''\sqrt{(a'')}$; $(0,3).m.\sqrt{(a)} = (3,0).m'''.\sqrt{(a''')}$;
$(1,2).m'.\sqrt{(a')} = (2,1).m''.\sqrt{(a'')}$; $(1,3).m'.\sqrt{(a')} = (3,1).m'''.\sqrt{(a''')}$;
$(2,3).m''.\sqrt{(a'')} = (3,2).m'''.\sqrt{(a''')}$.

On s'affurera d'une manière femblable, que les mêmes relations fubfiftent entre $\overline{\underline{|0,1|}}$, & $\overline{\underline{|1,0|}}$; $\overline{\underline{|0,2|}}$, & $\overline{\underline{|2,0|}}$, &c. en forte que l'on peut dans les relations précédentes, changer les crochets ronds en crochets carrés.

Si dans les équations (i), (i'), (i''), (i'''), on élimine les arbitraires h, h', h'', h'''; on aura une équation en f du quatrième degré. On aura de plus les valeurs de h', h'', h''', au moyen de h, fous cette forme.

$$h' = \text{\textbeta}'.h; \quad h'' = \text{\textbeta}''.h; \quad h''' = \text{\textbeta}'''.h;$$

ζ', ζ'', ζ''' étant des fonctions de f, & la constante h étant arbitraire,

Soient f, f_1, f_2, f_3, les quatre racines de l'équation en f; on aura par la nature des équations linéaires,

$$\frac{r\delta r}{a^2} = h.\text{cof.}(nt + \varepsilon - ft - \Gamma) + h_1.\text{cof.}(nt + \varepsilon - f_1 t - \Gamma_1)$$
$$+ h_2.\text{cof.}(nt + \varepsilon - f_2.t - \Gamma_2) + h_3.\text{cof.}(nt + \varepsilon - f_3 t - \Gamma_3);$$

$h, h_1, h_2, h_3, \Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ étant des constantes arbitraires, & t désignant ici le nombre des années juliennes écoulées depuis l'époque où l'on fixe l'origine du temps.

Si l'on nomme $\zeta'_1, \zeta''_1, \zeta'''_1$; $\zeta'_2, \zeta''_2, \zeta'''_2$; $\zeta'_3, \zeta''_3, \zeta'''_3$; ce que deviennent ζ', ζ'', ζ''', lorsqu'on y change successivement f dans f_1, f_2, f_3, on aura

$$\frac{r'\delta r'}{a'^2} = \zeta'.h.\text{cof.}(n't + \varepsilon' - ft - \Gamma) + \zeta'_1.h_1.\text{cof.}(n't + \varepsilon' - f_1 t + \Gamma_1)$$
$$+ \zeta'_2.h_2.\text{cof.}(n't + \varepsilon' - f_2 t - \Gamma_2) + \zeta'_3.h_3.\text{cof.}(n''t + \varepsilon'' - f_3 t - \Gamma_3);$$
$$\frac{r''\delta r''}{a''^2} = \zeta''.h.\text{cof.}(n''t + \varepsilon'' - ft - \Gamma) + \zeta''_1.h_1.\text{cof.}(n''t + \varepsilon'' - f_1 t - \Gamma_1)$$
$$+ \zeta''_2.h_2.\text{cof.}(n''t + \varepsilon'' - f_2 t - \Gamma_2) + \zeta''_3.h_3.\text{cof.}(n''t + \varepsilon'' - f_3 t - \Gamma_3);$$
$$\frac{r'''\delta r'''}{a'''^2} = \zeta'''.h.\text{cof.}(u'''t + \varepsilon''' - ft - \Gamma) + \zeta_1'''.h_1.\text{cof.}(n'''t + \varepsilon''' - f_1 t - \Gamma_1)$$
$$+ \zeta_2'''.h_2.\text{cof.}(n'''t + \varepsilon''' - f_2 t - \Gamma_2) + \zeta_3'''.h_3.\text{cof.}(n'''t + \varepsilon''' - f_3 t - \Gamma_3).$$

Toutes ces expressions sont complettes, puisqu'elles renferment deux fois autant d'arbitraires qu'il y a d'équations différentielles du second ordre en $r\delta r$, $r'\delta r'$, $r''\delta r''$, $r'''\delta r'''$.

La formule (2) de l'*article II* donne, en négligeant

le carré des excentricités & leur produit par les forces perturbatrices,

$$\delta v = 2 \cdot \frac{\partial\left(\frac{r\delta r}{a^2}\right)}{n\,\partial t};$$

d'où il ſuit que f étant très-petit relativement à n, on aura l'expreſſion de δv correſpondante à l'expreſſion précédente de $\frac{r\delta r}{a^2}$, en changeant dans celle-ci les coſinus en ſinus, & en la multipliant par -2. Les mêmes opérations ſur les valeurs de $\frac{r'\delta r'}{a'^2}$, $\frac{r''\delta r''}{a''^2}$, $\frac{r'''\delta r'''}{a'''^2}$, donneront les valeurs correſpondantes de $\delta v'$, $\delta v''$ & $\delta v'''$.

On peut conſidérer ces différentes valeurs, comme étant relatives à des orbes elliptiques, dont les excentricités & les poſitions des aphélies ſeroient variables; en comparant les valeurs données par cette ſuppoſition, à celles que nous venons de trouver, on aura facilement les variations des excentricités & des aphélies. Tout ſe réduit donc à former & à réſoudre les équations (i), (i'), (i'') & (i'''); mais nous verrons dans la ſuite que ces équations ſont incomplettes, & que les rapports qui exiſtent entre les moyens mouvemens des trois premiers Satellites, leur ajoutent de nouveaux termes ſenſibles, quoique dépendans des carrés & des produits des forces perturbatrices.

VIII.

Le moyen mouvement du premier Satellite étant, à fort peu-près, double de celui du ſecond; & le moyen mouvement du ſecond étant, à fort peu-près, double de celui du troiſième; il eſt viſible que les termes qui dépendent des angles $nt - 2n't + \varepsilon - 2\varepsilon'$, $n't - 2n''t + \varepsilon' - 2\varepsilon''$, & qui ſubiſſent deux intégrations, doivent conſidérablement augmenter par ces intégrations; il eſt donc important de les

déterminer avec soin. Si l'on considère les équations (1) & (2) de l'*article II*, on voit que les termes dont il s'agit résultent dans l'expression de δv, de la double intégrale $3a\int n\partial t.\int\partial R$. Pour les obtenir, considérons d'abord la partie

$$\frac{m'.r.\text{cos.}(v'-v)}{r'^2} - m'.B^{(1)}.\text{cos.}(v'-v),$$

de l'expression de R, donnée dans l'*article II*. Si l'on y substitue $a'.[1+h'.\text{cos.}(n't+\varepsilon'-ft-\Gamma)]$, au lieu de r', & $n't+\varepsilon'-2h'.\text{sin.}(n't+\varepsilon'-ft-\Gamma)$, au lieu de v', il en résultera le terme

$$-m'h'.\left[\frac{2a}{a'^2}-B^{(1)}+\tfrac{1}{2}a'.\left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial a'}\right)\right].$$
$$\text{cos.}(nt-2n't+\varepsilon-2\varepsilon'+ft+\Gamma).$$

On a par l'*article V*,

$$G=a'^2.\left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial a'}\right)-\frac{2n'}{n-n'}.a'.B^{(1)}+\left(\frac{2n'}{n-n'}-1\right).\frac{a'^2}{a^2};$$

or n étant à très-peu-près égal à $2n'$, $4a^3$ diffère très-peu de a'^3, & par conséquent $\frac{a'^2}{a^2}$, diffère peu de $\frac{4a}{a'}$; on pourra donc sans erreur sensible, substituer $\frac{G}{2a'}$, au lieu de $\frac{2a}{a'^2}-B^{(1)}+\frac{1}{2}a'.\left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial a'}\right)$; le terme précédent devient ainsi

$$-\frac{m'.G.h'}{2a'}.\text{cos.}(nt-2n't+\varepsilon-2\varepsilon'+ft+\Gamma).$$

Considérons maintenant le terme $-m'.B^{(2)}.\text{cos.}\,2(v'-v)$, de l'expression de R. Si l'on y substitue $a.[1+h.\text{cos.}(nt+\varepsilon-ft-\Gamma)]$, au lieu de r, & $nt+\varepsilon-2h.\text{sin.}(nt+\varepsilon-ft-\Gamma)$, au lieu de v; il en résultera le terme

$$-\frac{m'h}{2}.[a.(\frac{\partial B^{(2)}}{\partial a})+4B^{(2)}].\text{cof.}(nt-2n't+\varepsilon-2\varepsilon'+ft+\Gamma).$$

On a par l'*art. V*,

$$F=a^2.(\frac{\partial B^{(2)}}{\partial a})+\frac{2n}{n-n'}.a.B^{(2)};$$

d'où il ſuit que n étant à fort peu-près égal à 2 n', on peut ſubſtituer $\frac{F}{a}$, au lieu de $a.(\frac{\partial B^{(2)}}{\partial a})+4B^{(2)}$; le terme précédent ſe réduit par cette ſubſtitution, à celui-ci,

$$-\frac{m'.Fh}{2a}.\text{cof.}(nt-2n't+\varepsilon-2\varepsilon'+ft+\Gamma).$$

On s'aſſurera facilement que ſi l'on n'a égard qu'à l'action du ſatellite m', la fonction R ne renferme point d'autres termes dépendans de l'angle $nt-2n't+\varepsilon-2\varepsilon'$, & que l'action du Soleil & des autres ſatellites ſur m, n'en produit point de ſemblables, en ayant même égard au rapport qui exiſte entre les moyens mouvemens des trois premiers ſatellites, & dont nous avons parlé dans l'*article V.* En ne conſidérant donc que les termes affectés du double ſigne intégral, & qui dépendent de l'angle $nt-2n't+\varepsilon-2\varepsilon'$, & en négligeant les carrés des excentricités des orbites, l'équation (2) de l'*art. II* donnera

$$\delta v=\frac{-3n^2m'}{2.(n-2n'+f)^2}.[Fh+\frac{a}{a'}.Gh'].$$
$$\text{ſin.}(nt-2n't+\varepsilon-2\varepsilon'+ft+\Gamma).$$

Il eſt facile d'en conclure la partie de $\delta v'$ qui dépend du même angle. Pour cela, nous obſerverons que ſi l'on réunit les deux valeurs de δv & de $\delta v'$ qui réſultent de la formule (2) de l'*article II:* ſi l'on n'a égard qu'aux termes qui renferment de doubles intégrales, & que l'on néglige les carrés des excentricités des orbites, on aura

$$\frac{\delta v}{a n m'} + \frac{\delta v'}{a' n' m} = 3 \int dt. \left[\frac{dR}{m'} + \frac{d' R'}{m} \right];$$

R' étant ce que devient R relativement au second satellite, & la caractéristique différentielle d', se rapportant aux seules coordonnées de ce Satellite.

Si dans l'expression de R, de l'*article I*, on n'a égard qu'à l'action de Jupiter & du Satellite m', on aura, en négligeant le produit de m' par V', & ses différences partielles,

$$\int \frac{dR}{m'} = -\frac{(1 + m).V}{m'} + \int \frac{(x' \partial x + y' \partial y + z' \partial z)}{r'^3}$$
$$- \int d. [(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]^{-\frac{1}{2}};$$

or, on a à très-peu-près,

$$\frac{x'}{r'^3} = -\frac{\partial\partial x'}{\partial t^2}; \quad \frac{y'}{r'^3} = -\frac{\partial\partial y'}{\partial t^2}; \quad \frac{z'}{r'^3} = -\frac{\partial\partial z'}{\partial t^2};$$

partant,

$$\int \frac{dR}{m'} = -\frac{(1 + m).V}{m'} - \int \left[\frac{\partial x.\partial\partial x' + \partial y.\partial\partial y' + \partial z.\partial\partial z'}{\partial t^2} \right]$$
$$- \int d. [(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]^{-\frac{1}{2}}.$$

On trouvera de la même manière, en n'ayant égard qu'à l'action de Jupiter & du Satellite m sur m',

$$\int \frac{d'.R'}{m} = -\frac{(1 + m')}{m}.V' - \int \left[\frac{\partial x'.\partial\partial x + \partial y'.\partial\partial y + \partial z'.\partial\partial z}{\partial t^2} \right]$$
$$- \int d'. [(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]^{-\frac{1}{2}};$$

partant,

$$\int \left[\frac{dR}{m'} + \frac{d' R'}{m} \right] = -\frac{(1 + m)}{m'}.V - \frac{(1 + m')}{m}.V' - \left[\frac{\partial x.\partial x' + \partial y.\partial y' + \partial z.\partial z'}{\partial t^2} \right]$$
$$- [(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]^{-\frac{1}{2}}.$$

Si l'on substitue cette valeur, dans l'expression précédente de $\frac{\delta v}{a n m'} + \frac{\delta v'}{a' n' m}$; il est visible qu'il ne peut en résulter de termes divisés par $(n - 2 n' + f)^2$; en n'ayant donc égard qu'aux termes qui ont ce diviseur, on aura,

$$\frac{\delta v}{a n m'} + \frac{\delta v'}{a' n' m} = 0;$$

& par conséquent,

$$\delta v' = -\frac{a' n' m}{a n m'} \cdot \delta v = -\frac{a' m}{2 a m'} \cdot \delta v;$$

à cause de $n = 2 n'$ à très-peu-près. Partant,

$$\delta v' = \frac{3 n'^2 \cdot m}{(n - 2 n' + f)^2} \cdot \frac{a'}{a} \cdot \left[F h + \frac{a}{a'} \cdot G h' \right] .$$
$$\text{sin.} (n t - 2 n' t + \varepsilon - 2 \varepsilon' + f t + \Gamma).$$

Le second satellite étant relativement au troisième, ce que le premier est relativement au second; on aura la partie de $\delta v'$ qui dépend de l'angle $n' t - 2 n'' t + \varepsilon' - 2 \varepsilon'' + f t + \Gamma$, en changeant dans l'expression précédente de δv, les quantités m', n, n', ε, ε', a, a', F, G, h & h' dans m'', n', n'', ε', ε'', a', a'', F', G', h' & h''; ce qui donne

$$\delta v' = -\frac{3 m'' . n'^2}{2 . (n' - 2 n'' + f)^2} \cdot \left[F' h' + \frac{a'}{a''} \cdot G' h'' \right] .$$
$$\text{sin.} (n' t - 2 n'' t + \varepsilon' - 2 \varepsilon'' + f t + \Gamma).$$

On peut réunir dans un seul terme les deux parties de $\delta v'$, au moyen des relations données dans l'*article V*, entre les moyens mouvemens & les époques des longitudes moyennes des trois premiers Satellites; on a en vertu de ces relations,

$$n' - 2 n'' = n - 2 n'; \; n' t - 2 n'' t + \varepsilon' - 2 \varepsilon''$$
$$= n t - 2 n' t + \varepsilon - 2 \varepsilon' - 180^d;$$

on aura ainsi, après cette réunion,

$$\delta v' = \frac{3 n'^2}{(n - 2 n' + f)^2} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{m a'}{a} \cdot (F h + \frac{a}{a'} \cdot G h') \\ + \frac{m''}{2} \cdot (F' h' + \frac{a'}{a''} \cdot G' h'') \end{array} \right\} .$$
$$\text{sin.} (n t - 2 n' t + \varepsilon - 2 \varepsilon' + f t + \Gamma).$$

Enfin,

Enfin, la partie de $\delta v'$ due à l'action du premier Satellite sur le second, donnera pour la valeur correspondante de $\delta v''$, due à l'action du second satellite sur le troisième,

$$\delta v'' = - \frac{3 m' . n''^2}{(n - 2n' + f)^2} . \frac{a''}{a'} . [F' h' + \frac{a'}{a''} . G' h''] . \sin. (nt - 2n't + \epsilon' - 2\epsilon'' + ft + \Gamma).$$

Ces valeurs de δv, $\delta v'$ & $\delta v''$ sont les seuls termes sensibles, parmi ceux qui dépendent à la fois des excentricités des orbites & des forces perturbatrices. Il est clair que les racines f_1, f_2, f_3, de l'équation en f, donneront des termes semblables dans les expressions de δv, $\delta v'$, $\delta v''$; & que pour avoir les valeurs complettes de ces quantités, il faut réunir ensemble ces différens termes.

I X.

Des inégalités des Satellites, qui dépendent de l'action du Soleil.

Il est facile de conclure des formules que nous avons données précédemment, les perturbations des satellites, qui dépendent de leur élongation au Soleil; mais la lenteur du mouvement de Jupiter dans son orbite, donne une valeur sensible à quelques inégalités dépendantes de l'action du Soleil, & d'une espèce différente de celles que nous avons considérées jusqu'ici. Nous allons donc examiner particulièrement les inégalités des Satellites, dues à l'action du Soleil, en les tirant immédiatement des équations différencielles de l'*art. II.*

Si l'on n'a égard qu'à l'action du Soleil, on a par l'*article I,*

$$R = S . \frac{(x . X + y . Y + z . Z)}{D^3} - S . [D^2 - 2(xX + yY + zZ) + r^2]^{-\frac{1}{2}}.$$

En réduisant cette expression de R en série, & en négligeant les termes de l'ordre $\frac{1}{D^4}$, on aura

$$R = \frac{S}{2D^3} \cdot \left[r^2 - 3 \cdot \frac{(x.X + y.Y + z.Z)^2}{D^2} \right] - \frac{S}{D}.$$

Si l'on néglige les carrés des inclinaiſons des orbites, & qu'ainſi l'on ſuppoſe,

$$X = D \,.\, \text{coſ.}\, \Pi; \quad Y = D \,.\, \text{ſin.}\, \Pi;$$
$$x = r \,.\, \text{coſ.}\, v; \quad y = r \,.\, \text{ſin.}\, v;$$

on aura

$$R = -\frac{S}{D} - \frac{S r^2}{4 D^3} \cdot [1 + 3 \,.\, \text{coſ.}\, 2\,(v - \Pi)];$$

& l'équation différentielle (1) de l'*article II* deviendra

$$0 = \frac{\partial\partial.\,(r\delta r)}{\partial t^2} + \frac{(1+m)\,.\,r\delta r}{r^3} - \frac{S}{2}\int d.\left[\frac{r^2}{D^3} + \frac{3\,.\,r^2}{D^3} \,.\, \text{coſ.}\, 2(v - \Pi)\right]$$
$$- \frac{S r^2}{2 D^3} \cdot [1 + 3 \,.\, \text{coſ.}\, 2\,(v - \Pi)].$$

Si dans cette équation, on ſubſtitue au lieu de Π, la longitude moyenne du Soleil vu de Jupiter, & qui eſt égale à $180^d + Mt - A$, $Mt + A$ étant la longitude moyenne de Jupiter; ſi l'on ſubſtitue encore $a \,.\, [1 + h \,.\, \text{coſ.}\, (nt + \varepsilon - ft - \Gamma)]$, au lieu de r; & $nt + \varepsilon - 2h \,.\, \text{ſin.}\, (nt + \varepsilon - ft - \Gamma)$, au lieu de v: on aura un terme dépendant de l'angle $nt + \varepsilon - 2Mt - 2A + ft + \Gamma$, & qui acquérant, par l'intégration, un très-petit diviſeur, peut devenir ſenſible, quoique multiplié par h; il eſt donc néceſſaire d'y avoir égard. Ainſi, en négligeant M, relativement à n; en nommant D' la moyenne diſtance de Jupiter au Soleil, & en obſervant que l'on a, à très-peu-près, $M^2 = \frac{S}{D'^3}$, l'équation différentielle précédente deviendra

$$0 = \frac{\partial\partial(r\delta r)}{a^2 \,.\, \partial t^2} + M^2 \,.\, \frac{r\delta r}{a^2} - \tfrac{1}{2}M^2 - 3M^2 .\text{coſ.}\, 2(nt - Mt + \varepsilon - A)$$
$$- 9M^2 .h .\text{coſ.}\, (nt - 2Mt + ft + \varepsilon - 2A + \Gamma).$$

Nous n'aurons égard dans la valeur de $\frac{r\,\delta r}{a^2}$, qu'aux termes qui dépendent des deux angles $2\,nt - 2\,Mt + 2\,\varepsilon - 2\,A$, & $nt - 2\,Mt + ft + \varepsilon - 2\,A + \Gamma$, parce que nous avons déjà considéré dans les *articles précédens*, les termes de cette valeur, qui sont constans, & ceux qui contribuent aux variations de l'excentricité & de l'aphélie. Cela posé, on aura, en intégrant l'équation précédente, & en négligeant M, f & $N - n$ vis-à-vis de n,

$$\frac{r\,\delta r}{a^2} = -\frac{M^2}{n^2}\,.\,\text{cos.}\,2\,(nt - Mt + \varepsilon - A)$$

$$+\frac{9\,.\,M^2\,.\,h}{2\,n\,.\,(2\,M + N - n - f)}\,.\,\text{cos.}\,(nt - 2\,Mt + ft + \varepsilon - 2\,A + \Gamma).$$

Si l'on substitue cette valeur dans la formule (2) de l'*article II*, on trouvera, en n'ayant égard qu'aux mêmes argumens,

$$\delta v = \frac{11}{8}\,.\,\frac{M^2}{n^2}\,.\,\text{sin.}\,(2\,nt - 2\,Mt + 2\,\varepsilon - 2\,A)$$

$$-\frac{9\,M^2\,h}{n\,.\,(2\,M + N - n - f)}\,.\,\text{sin.}\,(nt - 2\,Mt + ft + \varepsilon - 2\,A + \Gamma).$$

La valeur de δv renferme encore un terme sensible dépendant de l'excentricité de l'orbite de Jupiter. En effet, si dans le terme $-\frac{S\,r^2}{4\,D^3}$ de l'expression de R, on substitue au lieu de D, sa valeur $D'.\,[1 + E\,.\,\text{cos.}\,(Mt + A - B)]$, E étant l'excentricité de l'orbite de Jupiter, & B étant la longitude de son aphélie; ce terme deviendra

$$-\frac{M^2\,.\,r^2}{4}\,.\,[1 - 3\,E\,.\,\text{cos.}\,(Mt + A - B)].$$

La partie $2\,an\int\partial t\,.\,r\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)$ de l'expression de δv de l'*article II*, produira donc le terme

$$\frac{3\,M}{n}\,.\,E\,.\,\text{sin.}\,(Mt + A - B).$$

En rassemblant ces différens termes, on aura par l'action du Soleil,

$$\delta v = \frac{11 . M^2}{8 . n^2} . \text{fin.} (2 nt - 2 Mt + 2 \epsilon - 2 A)$$
$$- \frac{9 M^2 . h}{n . (2 M + N - n - f)} . \text{fin.} (nt - 2 Mt + ft + \epsilon - 2 A + \Gamma)$$
$$+ \frac{3 M}{n} . E . \text{fin.} (Mt + A - B).$$

Le premier de ces termes répond à la variation dans la théorie de la Lune; le second terme répond à l'évection, & le troisième terme répond à l'équation annuelle.

L'action du Soleil sur les Satellites, produit encore dans leurs mouvemens, des inégalités sensibles dépendantes des variations séculaires de l'orbite & de l'équateur de Jupiter; ces inégalités sont analogues à celle que j'ai reconnue dans le moyen mouvement de la Lune, & dont j'ai donné les loix & la cause dans nos Mémoires pour l'*année 1786:* on pourra les déterminer par l'analyse dont j'ai fait usage dans les Mémoires cités; mais comme dans l'intervalle de deux ou trois siècles, elles se confondent avec les moyens mouvemens des Satellites, il est présentement inutile d'y avoir égard.

X.

Du mouvement des Satellites en latitude.

POUR déterminer ce mouvement, nous reprendrons l'équation (3) de l'*article II.*

$$0 = \frac{\partial \partial z}{\partial t^2} + \frac{(1 + m) . z}{r^3} + \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right).$$

Si l'on néglige les produits de trois dimensions de z & de z', & celui de V' par m'; on aura par l'*article I,* en n'ayant égard qu'à l'action de Jupiter & du Satellite m',

$$\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right) = \frac{m' z'}{r'^3} - \frac{m' . (z' - z)}{[r^2 - 2 r r' . \text{cof.} (v' - v) + r'^2]^{\frac{3}{2}}} - (1 + m) . \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right).$$

Pour déterminer $(\frac{\partial V}{\partial z})$, nous obſerverons que l'on a, par l'*article III*,

$$V = -\frac{(\rho - \frac{1}{2}\varphi) \cdot (\mu^2 - \frac{1}{3})}{r^3}.$$

Suppoſons que z_1 ſoit ce que devient z, dans la ſuppoſition où le Satellite m ſeroit mû ſur le plan même de l'équateur de Jupiter, on aura $z - z_1 = r\mu$; & par conſéquent

$$V = -\frac{(\rho - \frac{1}{2}\varphi) \cdot (z - z_1)^2}{r^5} + \frac{(\rho - \frac{1}{2}\varphi)}{3\,r^3};$$

ce qui donne, en obſervant que $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, & en négligeant les termes de l'ordre z^3,

$$(\frac{\partial V}{\partial z}) = \frac{(\rho - \frac{1}{2}\varphi) \cdot (2 \cdot z_1 - 3 \cdot z)}{r^5},$$

l'équation différentielle en z deviendra ainſi,

$$0 = \frac{\partial\partial z}{\partial t^2} + \frac{(1 + m) \cdot z}{r^3} \cdot \left[1 + 3\,\frac{(\rho - \frac{1}{2}\varphi)}{r^2}\right] - 2\,\frac{(1 + m) \cdot (\rho - \frac{1}{2}\varphi) \cdot z_1}{r^5}$$

$$+ \frac{m' z'}{r'^3} + \frac{m' \cdot (z - z')}{[r^2 - 2rr' \cdot \text{coſ.}\,(v' - v) + r'^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Nous négligerons ici les termes dépendans à la fois des excentricités & des inclinaiſons des orbites; nous ſuppoſerons conſéquemment dans l'équation précédente,

$r = a + \delta r;\; r' = a';\; v = nt + \varepsilon;\; v' = n't + \varepsilon';$
nous ſuppoſerons enſuite, $z = rs;\; z_1 = rs_1;\; z' = r's';$ en ſorte que s & s' ſeront les ſinus des latitudes des Satellites m & m' au-deſſus du plan fixe, ſinus que l'on pourra confondre avec les latitudes elles-mêmes, à cauſe de leur petiteſſe; s_1 ſera la latitude de la projection du Satellite m ſur le plan de l'Équateur. Cela poſé, l'équation différentielle précédente ſe changera dans la ſuivante, en y ſubſtituant n^2, au lieu de $\frac{1 + m}{a^3}$,

$$0 = \frac{\partial\partial s}{\partial t^2} + n^2 s . \left[1 - 3\,\frac{\delta r}{a} + 3 . \frac{(\rho - \frac{1}{2}\varphi)}{a^2} \right] + \frac{2\partial s . \partial . \delta r}{a\partial t^2} + \frac{s . \partial\partial . \delta r}{a\partial t^2} - \frac{2n^2 . (\rho - \frac{1}{2}\varphi)}{a^2} . s_1$$

$$+ \frac{n^2 . m' a^2}{a'^2} . s' + \frac{n^2 . m' . a^3 . \left(s - \frac{a' s'}{a}\right)}{[a^2 - 2aa' . \text{cof.}(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + a'^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Nous ſuivrons pour déterminer s, s_1, s', le même procédé qui nous a ſervi dans l'*article VII*, à déterminer $\frac{r\delta r}{a^2}$, $\frac{r'\delta r'}{a'^2}$, &c. Ainſi nous n'aurons d'abord égard qu'aux termes qui dépendent du ſinus & du coſinus de l'angle $nt + \varepsilon$. Pour cela, il faut conſerver dans l'équation différentielle les termes dans leſquels s & s_1 ſont multipliés par des conſtantes; il faut retenir encore ceux dans leſquels s' eſt multiplié par coſ. $(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$, parce que le produit de ces deux quantités donne un terme dépendant de l'angle $nt + \varepsilon$.

Maintenant, ſi l'on ſuppoſe $\frac{a}{a'} = \alpha$, on a par l'*art. VI*,

$$\frac{1}{(a^2 - 2aa' . \text{cof.}(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + a'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a'^3} .$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} . b_{\frac{3}{2}}^{(0)} + b_{\frac{3}{2}}^{(1)} . \text{cof.}\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \\ + b_{\frac{3}{2}}^{(2)} . \text{cof.}\,2\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + \&c. \end{array} \right\}$$

l'équation différentielle en s, deviendra donc,

$$0 = \frac{\partial\partial s}{\partial t^2} + n^2 s . \left[1 - \frac{3\delta a}{a} + 3 . \frac{(\rho - \frac{1}{2}\varphi)}{a^2} + \frac{m'\alpha^3}{2} . b_{\frac{3}{2}}^{(0)} \right] - 2n^2 . \frac{(\rho - \frac{1}{2}\varphi)}{a^2} . s_1$$

$$- n^2 . m' . \alpha^2 . b_{\frac{3}{2}}^{(1)} . s' . \text{cof.}\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon).$$

Or on a par l'*art. IV*,

$$\frac{3\delta a}{a} = \frac{(\rho - \frac{1}{2}\varphi)}{a^2} - \frac{1}{2} \cdot m' \cdot \alpha^2 \cdot \frac{\partial b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{\partial \alpha};$$

partant,

$$o = \frac{\partial \partial s}{\partial t^2} + n^2 s \cdot \left[1 + 2 \cdot \frac{(\rho - \frac{1}{2}\varphi)}{a^2} + \frac{1}{2} \cdot m' \alpha^2 . (\alpha b^{(0)}_{\frac{1}{2}} + \frac{\partial b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{\partial \alpha})\right]$$

$$- 2n^2 \cdot \frac{(\rho - \frac{1}{2}\varphi)}{a^2} \cdot s_{1} - n^2 m' \alpha^2 \cdot b^{(1)}_{\frac{1}{2}} \cdot s' . \text{cof.}(n' t - n t + \varepsilon' - \varepsilon).$$

Pour intégrer cette équation différentielle, ſuppoſons,

$s = l$. ſin. $(n t + \varepsilon + p t - \Lambda)$;

$s' = l'$. ſin. $(n' t + \varepsilon' + p t - \Lambda)$;

$s_{1} = L$. ſin. $(n t + \varepsilon + p t - \Lambda)$;

la comparaiſon des coéfficiens de ſin. $(n t + \varepsilon + p t - \Lambda)$, donnera,

$$o = l \cdot \left[\frac{p}{n} - \frac{(\rho - \frac{1}{2}\varphi)}{a^2} - \frac{1}{4} m' \alpha^2 \cdot (\alpha b^{(0)}_{\frac{1}{2}} + \frac{\partial b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{\partial \alpha})\right]$$

$$+ \frac{(\rho - \frac{1}{2}\varphi)}{a^2} \cdot L + \frac{m' \alpha^2 \cdot b^{(1)}_{\frac{1}{2}} \cdot l'}{4}.$$

On trouvera facilement par l'*art. VI*,

$$\alpha\, b^{(0)}_{\frac{1}{2}} + \frac{\partial b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{\partial \alpha} = - \frac{3\, b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}}{(1 - \alpha^2)^2} = b^{(1)}_{\frac{1}{2}};$$

en multipliant donc par $n\, T$, l'équation précédente entre l, l' & L, T étant la durée d'une année julienne ; on aura

$$o = l \cdot \left[p\, T - \frac{(\rho - \frac{1}{2}\varphi)}{a^2} \cdot n T + \frac{3 m' n T}{4} \cdot \frac{\alpha^2 \cdot b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}}{(1 - \alpha^2)^2}\right]$$

$$+ \frac{(\rho - \frac{1}{2}\varphi)}{a^2} \cdot n T L - \frac{3 m' n T}{4} \cdot \frac{\alpha^2 b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}}{(1 - \alpha^2)^2} \cdot l'.$$

On a par l'*art. VII*,

$$\frac{(\rho - \frac{1}{2}\varphi)}{a^2} \cdot n T = (0); \quad - \frac{3 m' n T}{4} \cdot \frac{\alpha^2 \cdot b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}}{(1 - \alpha^2)^2} = (0,1);$$

ainſi, en ſuppoſant $p\,T = q$, on aura

$$o = l.[q - (0) - (0,1)] + (0)\,L + (0,1).\,l'.$$

L'action des Satellites m'', m''', & celle du Soleil, ajoutent à cette équation, des termes analogues à ceux que produit l'action de m', & l'on trouvera comme dans l'*article VII*, que ſi l'on nomme l'', l''' & L', relativement aux Satellites m'', m''' & au Soleil, ce que l & l' ſont relativement à m & m', on aura en vertu des actions réunies de Jupiter, des Satellites & du Soleil,

$$o = l.\,[q - (0) - \boxed{0} - (0,1) - (0,2) - (0,3)] + (0).L + (0,1).\,l' + (0,2)\,l'' + (0,3)\,l''' + \boxed{0}\,.\,L'; \; (k).$$

On trouvera de la même manière

$$o = l'.[q - (1) - \boxed{1} - (1,0) - (1,2) - (1,3)] + (1).L + (1,0).\,l + (1,2)\,l'' + (1,3).\,l''' + \boxed{1}\,.\,L'; \; (k')$$

$$o = l''.[q - (2) - \boxed{2} - (2,0) - (2,1) - (2,3)] + (2).L + (2,0).\,l + (2,1).\,l' + (2,3).\,l''' + \boxed{2}\,.\,L'; \; (k'')$$

$$o = l'''.[q - (3) - \boxed{3} - (3,0) - (3,1) - (3,2)] + (3).L \; (3,0).\,l + (3,1).\,l' + (3,2).\,l'' + \boxed{3}\,.\,L'; \; (k''')$$

Il exiſte encore entre les quantités l, l', l'', l''', L, L' & q, d'autres équations qu'il eſt néceſſaire de conſidérer. La valeur de L' dépend du déplacement de l'orbite de Jupiter; or, il eſt clair que les Satellites & la figure de Jupiter, ne peuvent influer que d'une manière inſenſible ſur ce déplacement. Ainſi les équations qui déterminent L', ſont indépendantes de l, l', l'', l''', & nous pouvons ſuppoſer $L' = o$, lorſque nous déterminerons les valeurs des quantités précédentes, relatives à l'action de Jupiter & des Satellites.

La valeur de L dépend du déplacement de l'équateur de Jupiter;

Jupiter ; or ce plan change en vertu des actions réunies du Soleil & des Satellites ; L dépend donc des quantités l, l', l'', l''' & L'. Je trouve, par une analyse qu'il feroit trop long d'expofer ici, que fi l'on fuppofe

$$E = \frac{3\chi \cdot \int \square \cdot R^2 \cdot \partial R}{2 \cdot \int \square \cdot R^4 \cdot \partial R},$$

χ étant le rapport de la durée de la rotation de Jupiter à la durée de fa révolution fydérale, $\square$ étant la denfité d'une couche de Jupiter dont le rayon eft R, & les intégrales étant prifes depuis $R = 0$, jufqu'à R égal au rayon de l'équateur de Jupiter, que nous prendrons pour unité de diftance ; on a

$$0 = qL - E \cdot (\rho - \tfrac{1}{2}\varphi) \cdot MT \cdot (L - L') - \frac{n \cdot a\sqrt{(a)} \cdot E}{M} \cdot \left\{ \begin{matrix} m \cdot (0) \cdot \sqrt{(a)} \cdot (L - l) \\ + m' \cdot (1) \cdot \sqrt{(a')} \cdot (L - l') \\ + m'' \cdot (2) \cdot \sqrt{(a'')} \cdot (L - l'') \\ + m''' \cdot (3) \cdot \sqrt{(a''')} \cdot (L - l''') \end{matrix} \right\} ; \quad (k^{\text{iv}})$$

équation dans laquelle on doit obferver que T eft la durée d'une année Julienne ; que MT eft le moyen mouvement fidéral de Jupiter dans cet intervalle ; & que $\frac{n}{M}$ eft le rapport de la durée d'une révolution fidérale de Jupiter, à la durée d'une révolution fidérale du Satellite m.

Confidérons d'abord les valeurs de l, l', l'', l''', qui font relatives au déplacement de l'orbite & de l'équateur de Jupiter. Pour cela, nous donnerons aux équations (k), (k'), (k''), (k'''), les formes fuivantes,

$$0 = (L - l) \cdot [q - (0) - \boxed{0} - (0,1) - (0,2) - (0,3)] - qL$$
$$+ (0,1) \cdot (L - l') + (0,2) \cdot (L - l'') + (0,3) \cdot (L - l''') + \boxed{0} \cdot (L - L').$$

$$0 = (L - l') \cdot [q - (1) - \boxed{1} - (1,0) - (1,2) - (1,3)] - qL$$
$$+ (1,0) \cdot (L - l) + (1,2) \cdot (L - l'') + (1,3) \cdot (L - l''') + \boxed{1} \cdot (L - L').$$

$$0 = (L - l'') \cdot [q - (2) - \boxed{2} - (2,0) - (2,1) - (2,3)] - qL$$
$$+ (2,0) \cdot (L - l) + (2,1) \cdot (L - l') + (2,3) \cdot (L - l''') + \boxed{2} \cdot (L - L').$$

$$0 = (L - l''').\,[q - (3) - \overline{|3|} - (3,0) - (3,1) - (3,2)] - q\,L$$
$$+ (3,0).(L - l) + (3,1).(L - l') + (3,2).(L - l'') + \overline{|3|}.(L - L').$$

Si l'on ſubſtitue dans ces équations, au lieu de $q\,L$, ſa valeur donnée par l'équation (k^{IV}), on aura quatre équations entre les indéterminées, $L - l$, $L - l'$, $L - l''$, $L - l'''$, $L - L'$, & q.

Suppoſons maintenant que la valeur de q ſoit relative au déplacement de l'orbite de Jupiter & au mouvement moyen des équinoxes de ſon équateur. Cette valeur eſt conſidérablement plus petite que (0), (1), (2), (3), (0.1), &c. parce que l'orbite & les équinoxes de Jupiter meuvent avec beaucoup plus de lenteur que les orbites des Satellites, comme on le verra ci-après. On peut donc alors négliger q vis-à-vis de (0), (1), &c. On peut encore négliger ſans erreur ſenſible, vis-à-vis des mêmes quantités, & même relativement à

$$\overline{|0|},\quad \overline{|1|},\quad \overline{|2|}\ \&\ \overline{|3|},$$

les quantités ſuivantes $E.(p - \frac{1}{2}\varphi).MT;\ \frac{n\,a\,\sqrt{(a)}}{M}.$ $E.m.(0).\sqrt{(a)};\ \frac{n\,a\,\sqrt{(a)}}{M}.E.m'.(1).\sqrt{(a')}$, &c. Cela poſé, ſi l'on fait

$$L - l = v.(L - L');$$
$$L - l' = v'.(L - L');$$
$$L - l'' = v''.(L - L');$$
$$L - l''' = v'''.(L - L');$$

on aura pour déterminer v, v', v'', v''', les quatre équations ſuivantes,

$$\left.\begin{aligned}
0 &= \nu.[(0) + \boxed{0} + (0,1) + (0,2) + (0,3)] \\
&\quad - (0,1).\nu' - (0,2).\nu'' - (0,3).\nu''' - \boxed{0}. \\
0 &= \nu'.[(1) + \boxed{1} + (1,0) + (1,2) + (1,3)] \\
&\quad - (1,0).\nu - (1,2).\nu'' - (1,3).\nu''' - \boxed{1}. \\
0 &= \nu''.[(2) + \boxed{2} + (2,0) + (2,1) + (2,3)] \\
&\quad - (2,0).\nu - (2,1).\nu' - (2,3).\nu''' - \boxed{2}. \\
0 &= \nu'''.[(3) + \boxed{3} + (3,0) + (3,1) + (3,2)] \\
&\quad - (3,0).\nu - (3,1).\nu' - (3,2).\nu'' - \boxed{3}.
\end{aligned}\right\} ;\ (L)$$

La latitude du Satellite m au-deſſus de l'orbite de Jupiter, eſt égale à $\Sigma.(l - L').\text{ſin.}(nt + \varepsilon + pt - \Lambda)$; la caractériſtique intégrale Σ ſervant ici à déſigner la ſomme de tous les termes de la forme $(l - L').\text{ſin.}(nt + \varepsilon + pt - \Lambda)$ qui entrent dans l'expreſſion de la latitude du Satellite au-deſſus de l'orbite de Jupiter. Si l'on n'a égard qu'aux termes qui dépendent du déplacement de l'orbite & de l'équateur de Jupiter, on a $L - l = \nu.(L - L')$, & par conſéquent $l - L' = (1 - \nu).(L - L')$; ainſi, en n'ayant égard qu'à ces termes, on aura

$$\Sigma.(l - L').\text{ſin.}(nt + \varepsilon + pt - \Lambda) = (1 - \nu).\Sigma.(L - L').\text{ſin.}(nt + \varepsilon + pt - \Lambda).$$

Si le Satellite m étoit mû dans le plan de l'équateur de Jupiter, ſa latitude au-deſſus du plan de l'orbite de Jupiter ſeroit $\Sigma.(L - L').\text{ſin.}(nt + \varepsilon + pt - \Lambda)$; l'expreſſion $(1 - \nu).\Sigma.(L - L').\text{ſin.}(nt + \varepsilon + pt - \Lambda)$ de la latitude du Satellite au-deſſus de l'orbite de Jupiter, eſt donc la même que ſi le Satellite étoit mû ſur un plan qui paſſeroit entre les plans de l'équateur & de l'orbite de Jupiter, par la commune interſection de ces deux derniers

plans, & dont l'inclinaiſon ſur le plan de l'orbite ſeroit à l'inclinaiſon de l'équateur ſur l'orbite, dans le rapport de $1 - v$, à l'unité. Soit donc Ψ l'inclinaiſon de l'équateur de Jupiter ſur le plan de ſon orbite, & I la longitude de ſon nœud aſcendant ſur cette orbite, cette longitude étant rapportée à l'axe fixe des x; la latitude du Satellite m, au-deſſus de l'orbite de Jupiter, ſera, en n'ayant égard qu'aux termes qui dépendent du déplacement de l'équateur & de l'orbite de cette planète,

$$(1 - v) \,.\, \Psi \,.\, \text{ſin.}\, (nt + \varepsilon - I).$$

Conſidérons les valeurs de l, l', l'', l''' & q, qui dépendent de l'action de Jupiter & de ſes Satellites; la valeur de q eſt alors beaucoup plus grande que les quantités $E \,.\, (\rho - \frac{1}{2}\varphi) \,.\, M\Gamma$, $\frac{n\,a\,\sqrt{(a)}}{M} \,.\, E \,.\, m.(0) \,.\, V(a)$, &c.; ainſi la valeur de L eſt, en vertu de l'équation (k^{iv}), extrêmement petite; d'où il ſuit que le mouvement de l'équateur de Jupiter dépendant du mouvement des orbites des Satellites, eſt inſenſible. On peut donc dans les équations (k), (k'), (k''), (k'''), ſuppoſer $q\,L = 0$, & $L' = 0$; ſi de plus on y ſuppoſe,

$$l' = \lambda\, l,\; l'' = \lambda'\, l,\; l''' = \lambda''\, l;$$

on aura quatre équations entre les indéterminées λ, λ', λ'' & q, d'où l'on tirera q, au moyen d'une équation du quatrième degré. Soient q, q_1, q_2, q_3, les quatre racines de cette équation, & déſignons par

$$\lambda_1,\ \lambda_1',\ \lambda_1'';\ \lambda_2,\ \lambda_2',\ \lambda_2'';\ \lambda_3,\ \lambda_3',\ \lambda_3'';$$

ce que deviennent λ, λ', λ'', lorſque l'on y change ſucceſſivement q, dans q_1, q_2 & q_3; ſuppoſons enfin que s, s', s'', s''', au lieu d'exprimer comme ci-deſſus, les latiudes des Satellites m, m', m'', m''', au-deſſus du plan fixe, expriment leurs latitudes au-deſſus de l'orbite de Jupiter, latitudes qu'il nous importe de connoître

dans le calcul des éclipses; nous aurons

$$s = (1 - v) . \Psi . \text{fin.} (nt + \varepsilon - I)$$
$$+ l . \text{fin.} (nt + \varepsilon + qt - \Lambda)$$
$$+ l_1 . \text{fin.} (nt + \varepsilon + q_1 t - \Lambda_1)$$
$$+ l_2 . \text{fin.} (nt + \varepsilon + q_2 t - \Lambda_2)$$
$$+ l_3 . \text{fin.} (nt + \varepsilon + q_3 t - \Lambda_3).$$

$$s' = (1 - v) . \Psi . \text{fin.} (n' t + \varepsilon' - I)$$
$$+ \lambda . l . \text{fin.} (n' t + \varepsilon' + qt - \Lambda)$$
$$+ \lambda_1 . l_1 . \text{fin.} (n' t + \varepsilon' + q_1 t - \Lambda_1)$$
$$+ \lambda_2 . l_2 . \text{fin.} (n' t + \varepsilon' + q_2 t - \Lambda_2)$$
$$+ \lambda_3 . l_3 . \text{fin.} (n' t + \varepsilon' + q_3 t - \Lambda_3).$$

$$s'' = (1 - v'') . \Psi . \text{fin.} (n'' t + \varepsilon'' - I)$$
$$+ \lambda' . l . \text{fin.} (n'' t + \varepsilon'' + qt - \Lambda)$$
$$+ \lambda'_1 . l_1 . \text{fin.} (n'' t + \varepsilon'' + q_1 t - \Lambda_1)$$
$$+ \lambda'_2 . l_2 . \text{fin.} (n'' t + \varepsilon'' + q_2 t - \Lambda_2)$$
$$+ \lambda'_3 . l_3 . \text{fin.} (n'' t + \varepsilon'' + q_3 t - \Lambda_3).$$

$$s''' = (1 - v''') . \Psi . \text{fin.} (n''' t + \varepsilon''' - I)$$
$$+ \lambda'' . l . \text{fin.} (n''' t + \varepsilon''' + qt - \Lambda)$$
$$+ \lambda''_1 . l_1 . \text{fin.} (n''' t + \varepsilon''' + q_1 t - \Lambda_1)$$
$$+ \lambda''_2 . l_2 . \text{fin.} (n''' t + \varepsilon''' + q_2 t - \Lambda_2)$$
$$+ \lambda''_3 . l_3 . \text{fin.} (n''' t + \varepsilon''' + q_3 t - \Lambda_3).$$

t étant ici le nombre des années Juliennes écoulées depuis l'époque où l'on fixe l'origine du temps.

Les valeurs de l, Λ; l_1, Λ_1; l_2, Λ_2; l_3, Λ_3, sont constantes & arbitraires; mais les valeurs de Ψ & de I, changent par le mouvement de l'orbite & des points

équinoxiaux de Jupiter. Pour déterminer ces variations, nous obſerverons que l'on a par ce qui précède,

$$\Psi . \text{ſin.}\, I = - \Sigma . (L - L') . \text{ſin.} (qt - \Lambda);$$
$$\Psi . \text{coſ.}\, I = \Sigma . (L - L') . \text{coſ.} (qt - \Lambda);$$

ce qui donne

$$\frac{\partial . (\Psi\, \text{ſin.}\, I)}{\partial t} = - \Sigma q . (L - L') . \text{coſ.} (qt - \Lambda).$$
$$\frac{\partial . (\Psi . \text{coſ.}\, I)}{\partial t} = - \Sigma q . (L - L') . \text{ſin.} (qt - \Lambda).$$

Mais ſi l'on nomme Ψ' l'inclinaiſon dé l'orbite de Jupiter ſur le plan fixe, & I', la longitude de ſon nœud aſcendant ſur ce plan, on a

$$\Psi' . \text{ſin.}\, I' = - \Sigma . L' . \text{ſin.} (qt - \Lambda);$$
$$\Psi' . \text{coſ.}\, I' = - \Sigma . L' . \text{coſ.} (qt - \Lambda);$$

ce qui donne

$$\frac{\partial . (\Psi' . \text{ſin.}\, I')}{\partial t} = - \Sigma q . L' . \text{coſ.} (qt - \Lambda);$$
$$\frac{\partial . (\Psi' . \text{coſ.}\, I')}{\partial t} = - \Sigma q\, L' . \text{ſin.} (qt - \Lambda);$$

de plus, le ſyſtème des équations (k), (k'), (k''), (k''') & (k^{IV}), donne pour $q\,L$, une expreſſion de cette forme,

$$q\,L = \text{Є} . (L - L');$$

on aura donc

$$\frac{\partial . (\Psi . \text{ſin.}\, I)}{\partial t} = - \text{Є} . \Psi . \text{coſ.}\, I - \frac{\partial . (\Psi' . \text{ſin.}\, I')}{\partial t};$$
$$\frac{\partial . (\Psi . \text{coſ.}\, I)}{\partial t} = \text{Є} . \Psi . \text{ſin.}\, I - \frac{\partial . (\Psi' . \text{coſ.}\, I')}{\partial t};$$

d'où l'on tire

$$\frac{\partial . \Psi}{\partial t} = - \frac{\partial \Psi'}{\partial t} . \text{coſ.} (I' - I) + \Psi' . \frac{\partial I'}{\partial t} . \text{ſin.} (I' - I)$$
$$\Psi . \frac{\partial I}{\partial t} = - \text{Є}\Psi - \frac{\partial \Psi'}{\partial t} . \text{ſin.} (I' - I) - \Psi' . \frac{\partial I'}{\partial t} . \text{coſ.} (I' - I)$$

t exprimant le nombre des années Juliennes écoulées depuis l'origine du temps. Au moyen de ces équations, on aura les variations différentielles de Ψ & de I, par celles de Ψ', I', qui sont données par la théorie de Jupiter; on pourra donc ainsi déterminer les variations séculaires du nœud & de l'inclinaison de l'équateur de Jupiter sur son orbite. Pour déterminer Є, l'équation (k^{iv}) donne

$$\text{Є} = E.(\rho - \tfrac{1}{2}\varphi).MT + \frac{n a \sqrt{(a)}}{M}.E.$$
$$[m v.(0).\sqrt{(a)} + m' v'.(1).\sqrt{(a')} + m'' v''.(2).\sqrt{(a'')} + m''' v'''.(3).\sqrt{(a''')}].$$

Si l'on multiplie les quatre équations (L) respectivement par $m\sqrt{(a)}$, $m'\sqrt{(a')}$, $m''\sqrt{(a'')}$, $m'''\sqrt{(a''')}$, & qu'ensuite on les ajoute, on aura en vertu des relations trouvées dans l'*art. VII*, entre les quantités (0,1) & (1,0), (0,2) & (2,0), &c.

$$m v.(0).\sqrt{(a)} + m' v'.(1).\sqrt{(a')} + m'' v''.(2).\sqrt{(a'')} + m'''.v'''.(3).\sqrt{(a''')}$$
$$= m\,\boxed{0}\,.\sqrt{(a)}.(1 - v) + m'.\boxed{1}\,.\sqrt{(a')}.(1 - v')$$
$$+ m''.\boxed{2}\,.\sqrt{(a'')}.(1 - v'') + m'''\,\boxed{3}\,.\sqrt{(a''')}.(1 - v''');$$

on a ensuite, par l'*art. VII*,

$$\boxed{0}\,.\sqrt{(a)} = \frac{3 M^2 T}{4 n}.\sqrt{(a)} = \frac{3 M^2 T}{4}.a^2,$$

& l'on trouvera des expressions semblables pour $\boxed{1}\,.\sqrt{(a')}$, $\boxed{2}\,.\sqrt{(a'')}$, &c. on aura, cela posé, cette expression fort simple de Є,

$$\text{Є} = \frac{3 E.MT}{4}.\left\{\begin{array}{l}\frac{4}{3}(\rho - \frac{1}{2}\varphi) + m.(1 - v).a^2 + m'.(1 - v').a'^2 \\ + m''.(1 - v'').a''^2 + m'''.(1 - v''').a'''^2.\end{array}\right\}.$$

XI.

CONSIDÉRONS présentement les inégalités périodiques du mouvement des Satellites en latitude. Pour cela, nous reprendrons l'équation différentielle en s, de l'*article précédent*,

$$0 = \frac{\partial \partial s}{\partial t^2} + n^2 s . \left[1 - \frac{3 \delta r}{a} + \frac{3 . (\rho - \frac{1}{2} \varphi)}{a^2} \right]$$

$$+ \frac{2 \partial s . \partial \delta r}{a \partial t^2} + \frac{s . \partial \partial . \delta r}{a \partial t^2} - 2 n^2 . \frac{(\rho - \frac{1}{2} \varphi)}{a^2} . s,$$

$$+ \frac{n^2 . m' . a^2}{a'^2} . s' + \frac{n^2 . m' . a^3 . [s - \frac{a' s'}{a}]}{[a^2 - 2 a a' . \text{cof.} (n' t - n t + \varepsilon' - \varepsilon) + a'^2]^{\frac{3}{2}}} .$$

Si l'on prend pour plan fixe, celui de l'orbite primitive de m, alors s fera de l'ordre des forces perturbatrices, & en négligeant les produits de deux dimenfions de ces forces, l'équation précédente deviendra

$$0 = \frac{\partial \partial s}{\partial t^2} + N^2 . s - 2 n^2 . \frac{(\rho - \frac{1}{2} \varphi)}{a^2} . s,$$

$$+ \frac{n^2 . m' . a^2}{a'^2} . s' - \frac{n^2 . m' a^3 . a' . s'}{[a^2 - 2 a a' . \text{cof.} (n' t - n t + \varepsilon' - \varepsilon) + a'^2]^{\frac{3}{2}}};$$

s' étant ici la latitude de m' au-deffus de l'orbite primitive de m, & N^2 étant égal au coéfficient conftant de s, dans l'équation différentielle en s, en forte que nous pourrons fuppofer à fort peu-près ici,

$$N = n . \left[1 + \frac{(\rho - \frac{1}{2} \varphi)}{a^2} \right].$$

Cela pofé, les termes de l'équation différentielle, qui dépendent de l'angle $3 n t - 4 n' t + 3 \varepsilon - 4 \varepsilon'$, acquièrent un grand divifeur par les intégrations, & peuvent par-là devenir fenfibles. En n'ayant égard qu'à ces termes, la fonction

$$\frac{- n^2 . m' . a^2 a' . s'}{[a^2 - 2 a a' . \text{cof.} (n' t - n t + \varepsilon' - \varepsilon) + a'^2]^{\frac{3}{2}}}$$

devient

devient

$$- n^2 m' . \frac{a^2}{a'^2} . b_{\frac{1}{2}}^{(3)} . s' . \text{cof. } 3 (nt - n't + \varepsilon - \varepsilon');$$

or on a $s' = (l' - l) . \text{fin.} (n't + \varepsilon' + qt - \text{A});$
la fonction précédente donnera donc le terme

$$\frac{n^2 . m' . a^2}{2 a'^2} . (l' - l) . b_{\frac{1}{2}}^{(3)} . \text{fin.} (3nt - 4n't + 3\varepsilon - 4\varepsilon' - qt + \text{A}).$$

En le substituant dans l'équation différentielle en s, on aura après les intégrations,

$$s = \frac{n^2 . m' . a^2 . (l' - l) . b_{\frac{1}{2}}^{(3)} . \text{fin.} (3nt - 4n't + 3\varepsilon - 4\varepsilon' - qt + \text{A})}{2 a'^2 . [(3n - 4n' - q)^2 - N^2]}.$$

Il est clair que les différentes valeurs de q, & de $l' - l$, donneront dans l'expression de s, autant de termes semblables au précédent.

Le diviseur $(3n - 4n' - q)^2 - N^2$ est égal à $(3n - 4n' - N - q) . (3n - 4n' + N - q)$. q étant fort petit relativement à n, N étant très-peu différent de n, & n étant à peu-près égal à $2n'$; le facteur $3n - 4n' - N - q$, est fort petit, & le facteur $3n - 4n' + N - q$, est à peu-près égal à $2n$; en sorte que le diviseur précédent se réduit à peu-près à $2n . (3n - 4n' - N - q)$; ce qui donne

$$s = \frac{m' a^2 . n . (l' - l) . b_{\frac{1}{2}}^{(3)} . \text{fin.} (3nt - 4n't + 3\varepsilon - 4\varepsilon' - qt + \text{A})}{4 a'^2 . (3n - 4n' - N - q)}.$$

Ces inégalités de s surpassent considérablement toutes les autres qui résultent de l'action des Satellites sur m, à cause de la petitesse du diviseur $3n - 4n' - N - q$; ce sont par conséquent les seules dues à cette action, auxquelles il soit nécessaire d'avoir égard; mais l'action du Soleil produit dans la valeur de s, une inégalité que

la petiteſſe de ſon diviſeur peut rendre ſenſible. Pour la déterminer, nous obſerverons que la fonction

$$\frac{-n^2 . m' . a^2 . a' . s'}{[a^2 - 2aa' . \text{coſ.}(n't - nt + \epsilon - \epsilon') + a'^2]^{\frac{3}{2}}}$$

devient relativement au Soleil,

$$-\frac{n^2 . S . a^2 . s'}{D'^2} . \left[1 + \frac{3a}{D'} . \text{coſ.}(nt - Mt + \epsilon - A)\right];$$

or on a ici $s' = (L' - l) . \text{ſin.}(Mt + A + qt - \Lambda)$; on a de plus, $n^2 . a^3 = 1$ & $\frac{S}{D'^3} = M^2$; la fonction précédente donnera donc le terme

$$\frac{3}{2} : M^2 . (L' - l) . \text{ſin.}(nt - 2Mt + \epsilon - 2A - qt + \Lambda);$$

en le ſubſtituant dans l'équation différentielle en s, on aura après les intégrations,

$$s = \frac{3M^2 . (L' - l) . \text{ſin.}(nt - 2Mt + \epsilon - 2A - qt + \Lambda)}{2 . [(n - 2M - q)^2 - N^2]};$$

or on a

$$(n - 2M - q)^2 - N^2 = (n - 2M - N - q) .$$
$$(n - 2M + N - q).$$

Le facteur $n - 2M - N - q$, eſt très-petit, & le facteur $n - 2M + N - q$, eſt à fort peu-près égal à $2n$; en réuniſſant donc les parties périodiques de s, qui ſont dues à l'action des Satellites & du Soleil, & qui peuvent être ſenſibles, on aura

$$s = \frac{m' . a^2 . n . (l' - l) . b_{\frac{3}{2}}^{(3)} . \text{ſin.}(3nt - 4n't + 3\epsilon - 4\epsilon' - qt + \Lambda)}{4a'^2 . (3n - 4n' - N - q)}$$
$$+ \frac{3M^2 . (L' - l) . \text{ſin.}(nt - 2Mt + \epsilon - 2A - qt + \Lambda)}{4n . (n - 2M - N - q)}.$$

Cette valeur de s eſt la partie périodique de la latitude du Satellite m, au-deſſus de ſon orbite primitive; il eſt clair qu'en l'ajoutant à la valeur de s, déterminée dans

l'*article précédent;* on aura l'expreſſion complète de la latitude du premier Satellite au-deſſus de l'orbite de Jupiter. On déterminera la valeur de $b_{\frac{1}{2}}^{(3)}$ au moyen de la formule

$$b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = \frac{7.(1+\alpha^2).b_{\frac{1}{2}}^{(3)} - 14\alpha.b_{\frac{1}{2}}^{(4)}}{(1-\alpha^2)^2},$$

qu'il eſt aiſé de conclure des formules de l'*art. VI.*

Conſidérons de la même manière les inégalités périodiques du mouvement en latitude du ſecond Satellite, au-deſſus du plan de ſon orbite primitive. L'équation différentielle en s, deviendra relativement au ſecond Satellite, en n'ayant égard qu'à l'action du premier;

$$0 = \frac{\partial\partial s'}{\partial t^2} + N'^2.s' - \frac{2n'^2.(\rho - \frac{1}{2}\varphi)}{a'^2}.s',$$

$$+ \frac{n'^2.ma'^2}{a^2}.s' - \frac{n'^2.ma'^2.a.s}{[a^2 - 2aa'.\text{cof.}(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + a'^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

N' étant à très-peu-près égal à $n'.\left[1 + \frac{(\rho - \frac{1}{2}\varphi)}{a'^2}\right]$.

Les termes de cette équation différentielle, qui dépendent de l'angle $2nt - 3n't + 2\varepsilon - 3\varepsilon'$, acquièrent un grand diviſeur par les intégrations, & méritent par cette raiſon d'être conſervés. En ne conſidérant que ces termes, on trouvera

$$s' = \frac{ma.n'.(l-l').b_{\frac{1}{2}}^{(3)}}{4a'.(2n-3n'-N'-q)}.\text{ſin.}(2nt - 3n't + 2\varepsilon - 3\varepsilon' - qt + \Lambda).$$

L'action du troiſième Satellite ajoute encore à l'expreſſion de s', un terme qui peut devenir ſenſible par ſon grand diviſeur, & qui eſt analogue à celui que l'action de m' ſur m, produit dans l'expreſſion de s; en nommant donc $b'^{(3)}_{\frac{1}{2}}$, ce que devient $b_{\frac{1}{2}}^{(3)}$, relativement au ſecond & au

troiſième Satellite, on aura pour la partie de s', dépendante de l'action de m'',

$$s' = \frac{m'' a'^2 . n' . (l'' - l') . b'^{(3)}_{\frac{3}{2}} . \text{fin.} (3 n' t - 4 n'' t + 3 \varepsilon' - 4 \varepsilon'' - q t + \Lambda)}{4 a''^2 . (3 n' - 4 n'' - N' - q)}.$$

On a par l'*art. IV*,

$$2 n - 3 n' = 3 n' - 4 n'';$$

$$\text{fin.} (2 n t - 3 n' t + 2 \varepsilon - 3 \varepsilon' - q t + \Lambda)$$
$$= \text{fin.} (3 n' t - 4 n'' t + 3 \varepsilon' - 4 \varepsilon'' - q t + \Lambda);$$

on pourra donc ainſi réduire dans un ſeul, les deux termes de l'expreſſion de s', qui dépendent de l'action du premier & du troiſième Satellite; & en y joignant le terme qui dépend de l'action du Soleil, on aura pour l'expreſſion complète des inégalités périodiques du mouvement du ſecond Satellite en latitude,

$$s' = n' . \frac{\left[\frac{m . a}{a'} . (l - l') . b^{(3)}_{\frac{3}{2}} + m'' . \frac{a'^2}{a''^2} . (l'' - l') . b'^{(3)}_{\frac{3}{2}} \right]}{4 . (2 n - 3 n' - N' - q)}.$$
$$\text{fin.} (2 n t - 3 n' t + 2 \varepsilon - 3 \varepsilon' - q t + \Lambda).$$
$$+ \frac{3 M^2 . (L' - l') . \text{fin.} (n' t - 2 M t + \varepsilon' - 2 A - q t + \Lambda)}{4 n' . (n' - 2 M - N' - q)}.$$

On trouvera de la même manière, pour la partie périodique de s'', qui peut être ſenſible,

$$s'' = \frac{m' a' . n'' . (l' - l'') . b'^{(3)}_{\frac{3}{2}}}{4 a'' . (2 n' - 3 n'' - N'' - q)}.$$
$$\text{fin.} (2 n' t - 3 n'' t + 2 \varepsilon' - 3 \varepsilon'' - q t + \Lambda)$$
$$+ \frac{3 M^2 . (L' - l'') . \text{fin.} (n'' t - 2 M t + \varepsilon'' - 2 A - q t + \Lambda)}{4 n'' . (n'' - 2 M - N'' - q)};$$

N'' pouvant être ſuppoſé à très-peu-près égal à

$$n'' . \left[1 + \frac{(\rho - \frac{1}{2} \varphi)}{a''^2} \right].$$

Enfin, on aura pour la partie périodique ſenſible de s''',

$$s''' = \frac{3 M^2 . (L' - l''') . \text{ſin.} (n''' t - 2 M t + \varepsilon''' - 2 A - q t + \Lambda)}{4 n''' . (n''' - 2 M - N''' - q)};$$

N''' pouvant être ſuppoſé à très-peu-près égal à

$$n''' . \left[1 + \frac{(\rho - \frac{1}{2} \varphi)}{a'''^2} \right].$$

X I I.

De la durée des Éclipſes des Satellites.

Nous n'obſervons point immédiatement le mouvement des Satellites de Jupiter autour de cette planète; leur élongation vue de la Terre eſt ſi petite, que les plus légères erreurs dans les obſervations en produiſent de pluſieurs degrés dans leurs mouvemens jovicentriques; mais leurs éclipſes offrent un moyen incomparablement plus exact pour déterminer ces mouvemens, & c'eſt à l'obſervation de ces phénomènes, que nous devons la connoiſſance de leurs inégalités. Jupiter projette derrière lui, relativement au Soleil, un cône d'ombre dans lequel les Satellites ſe plongent près de leur conjonction; les orbites des trois premiers Satellites ſont toujours inclinées à l'orbite de Jupiter, de manière que ces Satellites s'éclipſent à chaque révolution; mais le quatrième ceſſe ſouvent de s'éclipſer, & cela joint à la durée de ſa révolution, rend ſes éclipſes plus rares que celles des autres Satellites.

Un Satellite diſparoît à nos yeux avant qu'il ſoit entièrement plongé dans l'ombre de Jupiter. Sa lumière affoiblie par la pénombre, & parce que ſon diſque s'enfonce de plus en plus dans l'ombre de la planète, devient inſenſible avant qu'il ſoit totalement éclipſé. Au moment où nous ceſſons de le voir, ſon centre eſt donc à une certaine diſtance du cône d'ombre de Jupiter, & ſi l'on conçoit à cette diſtance, un nouveau cône d'ombre qui ait le même axe que le cône réel, & qui s'appuie comme lui ſur

Jupiter; l'entrée du Satellite dans ce cône fictif, & sa sortie, détermineront pour nous son immersion & son émersion.

Ce cône fictif n'est pas le même pour tous les Satellites; il dépend de leur distance apparente à Jupiter, de l'aptitude plus ou moins grande à réfléchir la lumière dont jouissent les parties du disque que nous voyons les dernières dans l'immersion, & celles que nous voyons les premières dans l'émersion; il dépend des distances de Jupiter au Soleil & à la Terre, distances qui par leurs variations, changent l'intensité de la lumière que nous recevons des Satellites; enfin, il peut dépendre des variations de l'atmosphère de Jupiter. La plus grande durée des éclipses d'un Satellite ne peut donc point nous faire connoître exactement celles des autres Satellites; mais la comparaison de ces durées doit nous éclairer sur l'influence des diverses causes que nous venons d'indiquer. La force des instrumens dont se sert l'observateur, l'élévation de Jupiter sur l'horizon, la pureté de l'atmosphère terrestre, font varier encore les cônes d'ombre fictifs. Toutes ces causes répandent de l'incertitude sur les observations des éclipses des Satellites, & principalement sur celles du troisième & du quatrième. Heureusement, on peut observer assez fréquemment l'immersion & l'émersion de ces deux Satellites, dans les mêmes éclipses, ce qui donne l'instant de leur conjonction d'une manière assez précise, & indépendante de la plupart des causes dont nous venons de parler.

Maintenant, soit 2α la plus grande largeur du cône d'ombre fictif d'un Satellite, dans la partie où il est traversé par ce Satellite; soit au moment de la conjonction, Z la hauteur du Satellite au-dessus de l'orbite de Jupiter, & r sa distance au centre de cette planète; si dans cet instant on fait passer par le centre du Satellite, un plan perpendiculaire à l'orbite de Jupiter & à l'axe du cône d'ombre, la section de ce cône par ce plan sera, à fort peu-près, une ellipse semblable au méridien de Jupiter dont on

peut ſuppoſer ici l'équateur confondu avec le plan de ſon orbite, à cauſe du peu d'inclinaiſon reſpective de ces deux plans. Il réſulte de l'*art. III*, que le rayon de l'équateur de Jupiter étant pris pour unité, ſon demi-petit axe eſt à fort peu-près $1 - \rho$; ainſi α ſera le demi-grand axe de la ſection précédente, & $(1 - \rho).\alpha$ ſera ſon demi-petit axe. Soient x, y, z, les trois coordonnées du Satellite au moment de ſon émerſion, le plan des x & des y étant celui de l'orbite de Jupiter, & l'axe des x étant l'axe même du cône d'ombre; on aura à très-peu-près,

$$(1 - \rho)^2 . (\alpha^2 - y^2) = z^2.$$

La valeur de α dans cette équation, n'eſt pas rigoureuſement la même que la plus grande largeur de la ſection qui paſſe par le Satellite au moment de ſon émerſion, mais la différence eſt inſenſible, comme nous le verrons bientôt.

Nommons $v_{,}$, l'angle décrit autour de Jupiter par le Satellite, depuis ſa conjonction juſqu'à ſon émerſion, en vertu de ſon mouvement ſynodique; le rayon vecteur r, variant fort peu dans cet intervalle, on aura

$$y^2 + (Z - z)^2 = r^2 . \text{ſin.}\, v_{,}^2;$$

mais on a à très-peu-près,

$$z = Z + \text{ſin.}\, v_{,} . \left(\frac{\partial Z}{\partial v}\right);$$

en négligeant donc les quantités de l'ordre $Z^2 . \text{ſin.}\, v_{,}^2$, on aura $y^2 = r^2 . \text{ſin.}\, v_{,}^2$, & par conſéquent,

$$(1 - \rho)^2 . (\alpha^2 - r^2 . \text{ſin.}\, v_{,}^2) = Z^2 + 2Z . \left(\frac{\partial Z}{\partial v}\right) . \text{ſin.}\, v_{,};$$

d'où l'on tire,

$$\text{ſin.}\, v_{,} = - \frac{Z . \left(\frac{\partial Z}{\partial v}\right)}{(1 - \rho)^2 . r^2} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{\alpha}{r} + \frac{Z}{(1 - \rho) . r}\right) . \left(\frac{\alpha}{r} - \frac{Z}{(1 - \rho) . r}\right)\right]}.$$

s étant le ſinus de la latitude du Satellite au-deſſus de l'orbite de Jupiter, à l'inſtant de la conjonction, on a $Z = rs$; on aura donc

$$\text{ſin. } v_{,} = -\frac{s.\partial s}{(1-\rho)^2.\partial v} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{\alpha}{r} + \frac{s}{1-\rho}\right).\left(\frac{\alpha}{r} - \frac{s}{1-\rho}\right)\right]};$$

cette expreſſion priſe avec le ſigne +, indique le ſinus de l'arc décrit par le Satellite, en vertu de ſon mouvement ſynodique, depuis la conjonction juſqu'à l'émerſion; avec le ſigne —, cette expreſſion indique le ſinus de ce même arc, depuis l'immerſion juſqu'à la conjonction, pris négativement.

Soit T le temps que le Satellite emploie à décrire la demi-largeur α, du cône d'ombre, en vertu de ſon moyen mouvement ſynodique; & t le temps qu'il met à décrire l'angle $v_{,}$; la vîteſſe angulaire du Satellite étant $\frac{\partial v}{\partial t}$, nous ferons $\frac{\partial v}{n \partial t} = 1 - X$, X étant une très-petite quantité. De plus, a étant la moyenne diſtance du Satellite à Jupiter, $\frac{\alpha}{a}$ eſt le ſinus de l'angle ſous lequel la demi-largeur α ſeroit vue à cette diſtance; ſoit β cet angle, on aura à très-peu-près,

$$t = \frac{T.v_{,}}{\beta}.(1 + X).$$

Si l'on ſubſtitue dans cette expreſſion, au lieu de $v_{,}$, ſon ſinus qui en diffère très-peu; au lieu de ſin. $v_{,}$, ſa valeur précédente, & β au lieu de $\frac{\alpha}{a}$; on aura

$$t = T.(1 + X).\left\{\frac{-s.\frac{\partial s}{\partial v}}{(1-\rho)^2.\beta} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{a}{r} + \frac{s}{(1-\rho).\beta}\right).\left(\frac{a}{r} - \frac{s}{(1-\rho).\beta}\right)\right]}\right\}.$$

Si l'on

Si l'on n'a égard qu'aux équations du centre des Satellites, on a, comme l'on fait, $r = a.(1 + \frac{1}{2}X)$. Il résulte encore de l'*article V*, qu'en ayant égard aux principales inégalités des Satellites, la même équation subsiste toujours; on aura donc à très-peu-près,

$$t = T.(1 + X).\left\{\frac{-s.\frac{\partial s}{\partial v}}{(1-\rho)^2.\mathcal{E}}\right.$$

$$\left.\pm \sqrt{\left[\left(1 - \frac{1}{2}X + \frac{s}{(1-\rho).\mathcal{E}}\right).\left(1 - \frac{1}{2}X - \frac{s}{(1-\rho).\mathcal{E}}\right)\right]}\right\}.$$

Si l'on nomme t', la durée entière de l'éclipse, on aura,

$$t' = 2T.(1 + X).\sqrt{\left[\left(1 - \frac{1}{2}X + \frac{s}{(1-\rho).\mathcal{E}}\right).\right.}$$

$$\left.\left(1 - \frac{1}{2}X - \frac{s}{(1-\rho).\mathcal{E}}\right)\right];$$

d'où l'on tire

$$s = \frac{(1-\rho).\mathcal{E}.\sqrt{[4T^2.(1+X) - t'^2]}}{2T.(1+X)}.$$

Cette équation servira à déterminer les constantes arbitraires que renferme l'expression de s, au moyen des durées observées des éclipses.

Les durées des éclipses des Satellites étant un des points les plus importans de leur théorie, nous allons discuter particulièrement les formules précédentes. La demi largeur α du cône d'ombre, aux points où il est traversé par le Satellite, doit varier avec les distances du Satellite à Jupiter & de Jupiter au Soleil. Soit j le diamètre de Jupiter, & S celui du Soleil; la distance du centre de Jupiter au sommet du cône d'ombre sera $\frac{jD}{S-j}$; le diamètre de la section de ce cône, par un plan perpendiculaire à son axe, & qui passe par le centre du Satellite, sera donc $j.\left[1 - \frac{(S-j)}{j}.\frac{r}{D}\right]$. Soit $r = a + \delta r$; $D = D' + \delta D$, a & D' étant les moyennes distances

du Satellite à Jupiter & de Jupiter au Soleil ; il eſt clair que la variation de 2 α, due aux variations de r & de D, ſera

$$(S - j) \cdot \left(\frac{a . \delta D}{D'^2} - \frac{\delta r}{D'} \right).$$

Pour avoir la variation qui en réſulte dans la durée 2 T, nous obſerverons que cette quantité exprimant la durée entière de l'éclipſe du Satellite, lorſqu'il eſt dans ſes nœuds, elle eſt à fort peu-près proportionnelle à $j . \left[1 - \frac{(S-j)}{j} . \frac{a}{D'} \right]$; la variation de 2 T, correſpondante à celle de 2 α, ſera donc à fort peu-près

$$2\,T . \frac{(S-j)}{j} . \left(\frac{a\,\delta D}{D'^2} - \frac{\delta r}{D'} \right),$$

la fraction $\frac{(S-j)}{j} . \frac{a}{}$, étant fort petite, & pouvant être négligée vis-à-vis de l'unité. Conſidérons d'abord le terme

$$2\,T . \frac{(S-j)}{j} \; \frac{a . \delta D}{D'^2} .$$

δD eſt égal à D', multiplié par l'excentricité de l'orbite de Jupiter, & par le coſinus de ſon anomalie moyenne ; & ſi l'on nomme A^I cette anomalie, on aura

$$\delta D = 0{,}0480767 . D' . \text{coſ.}\ A^I.$$

Le diamètre de Jupiter réduit à la moyenne diſtance du Soleil à la Terre, eſt de 203″, à fort peu-près, & celui du Soleil obſervé à la même diſtance, eſt de 1924″ ; le terme précédent devient ainſi,

$$2\,T . 0{,}40759 . \frac{a}{D'} . \text{coſ.}\ A^I.$$

Relativement au quatrième Satellite,

$$2\,T = 4^h\ 46' = 17160''.$$

La plus grande élongation du quatrième Satellite, réduite à la moyenne diſtance de Jupiter au Soleil, a été trouvée

par Pound, de 8′ 16″, ce qui donne $\frac{a}{D}$ = tang. 8′ 16″; le terme précédent devient ainsi, 16″,8 . cos. A'; c'est la quantité qu'il faut ajouter à la valeur moyenne de $2T$.

Il faut corriger encore cette valeur par cette considération, que le temps employé à décrire 2α est proportionnel à cette quantité divisée par la vîtesse angulaire synodique du Satellite. Cette vîtesse est $\frac{\partial v_{,}}{dt}$, & elle est égale à $\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial \Pi}{\partial t}$, $\frac{\partial \Pi}{\partial t}$ étant la vîtesse angulaire de Jupiter autour du Soleil; en substituant pour $\frac{\partial v}{\partial t}$ sa valeur moyenne n, & pour $\frac{\partial \Pi}{\partial t}$ sa valeur approchée $M . (1 - 2E . \text{cos.} A')$, E étant l'excentricité de l'orbite de Jupiter, on aura

$$\frac{\partial v_{,}}{\partial t} = n - M + 2EM . \text{cos.} A';$$

le terme $2T$ sera donc proportionnel à

$$\frac{2\alpha}{n - M + 2EM . \text{cos.} A'};$$

il faudra par conséquent ajouter à la valeur moyenne de $2T$ la quantité

$$- 2T . \frac{2M}{n - M} . E . \text{cos.} A'.$$

Cette quantité pour le quatrième Satellite, est égale à − 6″,4 . cos. A'; en l'ajoutant à + 16″,8 cos. A', on aura + 10″,4 , cos. A' pour la correction que la valeur de $2T$ doit subir à raison de l'excentricité de l'orbite de Jupiter; mais les erreurs des observations étant beaucoup plus grandes que cette correction, on peut se dispenser d'y avoir égard. Cette correction est insensible relativement aux autres Satellites.

Quant au terme

$$- 2T . \frac{(S - j)}{j} . \frac{\delta r}{D'},$$

on trouvera qu'en y ſubſtituant les valeurs de δr, que nous donnerons dans la ſuite, cette correction eſt inſenſible.

Les variations de l'angle ζ ſont très-ſenſibles vers les limites où le quatrième Satellite commence & ceſſe de s'éclipſer, mais les obſervations de ces durées étant fort incertaines, il eſt inutile, dans l'expreſſion de ces durées, d'avoir égard aux changemens que ζ reçoit de la variation des diſtances de Jupiter au Soleil.

Nous avons ſuppoſé dans ce qui précède, que la largeur de la ſection du cône d'ombre par un plan perpendiculaire à ſon axe, & qui paſſe par le Satellite au moment de ſon émerſion, étoit à peu-près la même que la largeur de la ſection qui paſſe par le Satellite au moment de ſa conjonction. Le plan de la ſection eſt dans le premier cas, plus rapproché de Jupiter que dans le ſecond cas, d'une quantité égale au produit de la diſtance du Satellite à Jupiter, par le ſinus verſe de l'arc qu'il décrit depuis ſa conjonction juſqu'à ſon émerſion. En nommant q ce ſinus, la correction de la valeur de $2T$, relative à cette différence de largeur des deux ſections, ſera

$$+ 2T . \left(\frac{S - j}{j}\right) . \frac{a . q}{D'},$$

& l'on trouve qu'elle eſt inſenſible.

Nous avons encore dans ce qui précède, confondu l'arc v_1 avec ſon ſinus; mais on a à très-peu-près $v_1 = \text{ſin.}\, v_1 + \frac{1}{6} . \text{ſin.}\, v_1^3$. Il en réſulte que la valeur précédente de t' doit être multipliée par $1 + \frac{1}{6} . \text{ſin.}\, v_1^2$. Relativement au premier Satellite, v_1 eſt d'environ 9 degrés, ce qui rend ſenſible le produit de t' par $\frac{1}{6} . \text{ſin.}\, v_1^2$; mais cette erreur eſt corrigée en grande partie, par la ſuppoſition que nous

avons faite de $\frac{\alpha}{a} = \beta$, car $\frac{\alpha}{a} = \text{fin.}\,\beta$; nous aurions dû par conféquent fuppofer $\frac{\alpha}{a} = \beta - \frac{1}{6}.\,\text{fin.}\,\beta^3$, ce qui revient à peu-près à multiplier la valeur de t' par $1 - \frac{1}{6}.\,\text{fin.}\,\beta_1^2$, parce que le terme $\frac{-s^2}{(1-\rho)^2.\,\beta^2}$ compris fous le radical de l'expreffion de t' étant une petite fraction dans la théorie du premier Satellite, on peut négliger fon produit par $\frac{1}{6}.\,\text{fin.}\,\beta^2$. La valeur de t', déterminée par la formule précédente, doit donc être multipliée par $1 + \frac{1}{6}.\,\text{fin.}\,v_1^2 - \frac{1}{6}.\,\text{fin.}\,\beta^2$. L'arc v_1 différant toujours fort peu de β relativement au premier Satellite, le produit de t' par $\frac{1}{6}(\text{fin.}\,v_1^2 - \text{fin.}\,\beta^2)$ eft infenfible. On voit ainfi que les expreffions précédentes de t & de t' ont la précifion convenable, & peuvent être employées dans la théorie des quatre Satellites, fans crainte d'aucune erreur fenfible, fur-tout fi l'on prend pour s la latitude même du Satellite.

XIII.

Des inégalités des Satellites, dependantes des carrés & des produits des forces perturbatrices.

Nous n'avons eu égard jufqu'à préfent, qu'aux inégalités des Satellites qui dépendent de la première puiffance des forces perturbatrices; mais les rapports qui exiftent entre les moyens mouvemens des trois premiers Satellites, donnent une valeur fenfible à plufieurs inégalités dépendantes des carrés & des produits de ces forces: c'eft dans les inégalités de cet ordre, qu'il faut chercher la caufe des deux rapports finguliers dont nous avons fait mention dans l'*article V*, & qui confiftent, 1.° en ce que le moyen mouvement du premier Satellite, plus deux fois celui du troifième, eft égal à trois fois le moyen mouvement du fecond Satellite; 2.° en ce que la longitude moyenne du

premier Satellite, moins trois fois celle du second, plus deux fois celle du troisième, est exactement & constamment égale à 180 degrés. Ces deux théorèmes sont donnés par les observations d'une manière si approchée, qu'il y a tout lieu de croire qu'ils sont rigoureux, & que l'on doit rejeter sur l'incertitude des tables des Satellites, la différence très-petite qu'elles offrent à cet égard. Il est contre toute vraisemblance de supposer qu'à l'origine, les trois premiers Satellites ayent été placés exactement aux distances que ces théorèmes exigent : il est donc extrêmement probable qu'ils sont le résultat de l'action mutuelle des Satellites ; & comme les premières puissances de leurs forces attractives ne donnent aucun terme d'où ils puissent résulter, il est naturel d'en chercher la cause dans les carrés & les produits de ces forces. Nous allons donc déterminer avec soin toutes les inégalités de cet ordre, qui peuvent influer d'une manière sensible sur le mouvement des Satellites.

Considérons les deux équations suivantes auxquelles nous sommes parvenus dans l'*article II.*

$$0 = \frac{\partial^2 . r^2}{\partial t^2} - 2 . \frac{(1+m)}{r} + 2 . \frac{(1+m)}{a} + 4 . \int d R$$
$$+ 2 . \left[x \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) + y . \left(\frac{d R}{\partial y}\right) + z . \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)\right];$$

$$0 = \frac{r . \partial\partial r - r^2 \partial v^2}{\partial t^2} + \frac{(1+m)}{r} + x . \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) + y . \left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)$$
$$+ z . \left(\frac{\partial R}{d z}\right).$$

Supposons qu'en vertu des perturbations, r se change dans $r + \delta r + \delta' r$, r étant dans cette dernière quantité, le rayon vecteur relatif au mouvement elliptique, δr étant la partie du rayon vecteur, due à la première puissance des forces perturbatrices, & $\delta' r$ étant la partie de ce rayon, due aux carrés & aux produits de ces forces. Supposons encore que ∂v se change dans $\partial v + \partial . \delta v + \partial . \delta' v$, ∂v étant dans cette dernière quantité, relatif

au mouvement elliptique, $\partial\,\delta\,v$ étant la partie de $\partial\,v$ due à la première puiſſance des forces perturbatrices, & $\partial\,.\,\delta'\,v$ étant la partie de $\partial\,v$ due aux carrés & aux produits de ces forces. Si l'on ſubſtitue pour r & $\partial\,v$ ces valeurs dans les deux équations différentielles précédentes, & ſi l'on obſerve que par la nature du mouvement elliptique & des fonctions $\delta\,r$ & $\partial\,.\,\delta\,v$, les termes indépendans des forces perturbatrices, & ceux qui ne dépendent que de la première puiſſance de ces forces, doivent diſparoître d'eux-mêmes, on aura

$$0 = \frac{\partial^2.(r\delta' r + \frac{1}{2}.\delta r^2)}{\partial t^2} + \frac{(1+m).r.\delta' r}{r^3} - \frac{(1+m).\delta r^2}{r^3}$$
$$+ 2.\int d.R + x.\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) + y.\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) + z.\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right).$$

$$0 = \frac{\begin{array}{c} r.\partial\partial.\delta' r + \delta' r.\partial\partial r + \delta r.\partial\partial.\delta r - 2r^2\partial v.\partial\delta' v - 2r\delta' r.\partial v^2 \\ - r^2(\partial\delta v)^2 - 4r\partial v.\delta r.\partial\delta v - \delta r^2\partial v^2 \end{array}}{\partial t^2}$$
$$- \frac{(1+m).r.\delta' r}{r^3} + \frac{(1+m).\delta r^2}{r^3} + x.\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)$$
$$+ y.\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) + z.\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right),$$

en obſervant de ne conſerver dans les fonctions $\int d\,R$ & $x.\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) + y.\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) + z.\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)$, que les termes dépendans des carrés & des produits des forces perturbatrices.

Les propriétés du mouvement elliptique donnent

$$\frac{r^2.\partial v}{\partial t} = \sqrt{[(1+m).a.(1-e^2)]};$$
$$\frac{r.\partial v^2}{\partial t^2} = \frac{\partial\partial r}{\partial t^2} + \frac{1+m}{r^2};$$

en ſubſtituant ces valeurs dans la ſeconde des deux équations différentielles précédentes, & en y mettant, au lieu de $\frac{(1+m).r\delta r'}{r^3}$, ſa valeur tirée de la première;

ou aura

$$\frac{2\,\partial.\,\delta' v}{\partial t}\,.\,\sqrt{[(1+m)\,.\,a\,.\,(1-e^2)]}$$

$$= \frac{\partial.\,(r.\,\partial.\,\delta' r - \delta' r.\,\partial r)}{\partial t^2} + 3\,.\,\frac{\partial^2.\,(r\,\delta' r + \frac{1}{2}.\,\delta r^2)}{\partial t^2}$$

$$- \frac{2.\,(1+m).\,\delta r^2}{r^3} + 6\,.\int d R + 4\,.\,[x\,.\,(\frac{\partial R}{\partial x})$$

$$+ y\,.\,(\frac{\partial R}{\partial y}) + z\,.\,(\frac{\partial R}{\partial z})]$$

$$+ \frac{\delta r.\partial\partial.\,\delta r - r^2.(\partial.\,\delta v)^2 - 4 r\,\partial v.\delta r.\partial\,\delta v - \partial v^2.\,\delta r^2}{\partial t^2}.$$

Considérons dans cette expreſſion de $\frac{\partial\,.\,\delta' v}{\partial t}$, les termes qui dépendent de l'angle $n\,t - 3\,n'\,t + 2\,n''\,t$. Il eſt viſible que les termes de ce genre renfermés dans la différentielle $d\,R$, acquièrent par l'intégration, le diviſeur $n - 3\,n' + 2\,n''$, dans l'intégrale $\int d\,R$. Il en réſulte dans l'expreſſion de $\frac{\partial\,.\,\delta' v}{\partial t}$, des termes dépendans du même angle, & qui ont le même diviſeur; ce qui donne dans $\delta' v$, des termes qui ayant pour diviſeur $(n - 3\,n' + 2\,n'')^2$, peuvent devenir très-conſidérables, & méritent une grande attention. Analyſons ces différens termes.

Il eſt clair par la ſeule inſpection de l'équation différentielle en $r\,\delta' r$, que $\delta' r$ renferme des termes dépendans de l'angle $n\,t - 3\,n'\,t + 2\,n''\,t$, & qui ont pour diviſeur $n - 3\,n' + 2\,n''$; on peut s'aſſurer encore qu'en négligeant les carrés & les produits des excentricités des orbites, $\delta\,r'$ ne contient point de termes qui ayent pour diviſeur $(n - 3\,n' + 2\,n'')^2$; en ſubſtituant les termes de ſon expreſſion, qui ont pour diviſeur $n - 3\,n' + 2\,n''$, dans la fonction, $\frac{\partial\,(r\,\partial\,.\,\delta' r - \delta' r\,.\,\partial r)}{\partial t^2}$, ce diviſeur diſparoît; on peut donc négliger cette fonction dans l'expreſſion

l'expreſſion de $\frac{\partial \,.\, \delta' v}{\partial t}$. On peut négliger par la même raiſon, la fonction $\frac{3 \,.\, \partial^2 (r \delta' r + \frac{1}{2} \,.\, \delta r^2)}{\partial t^2}$.

La fonction $4 \,.\, [x \,.\, (\frac{\partial R}{\partial x}) + y \,.\, (\frac{\partial R}{\partial y}) + z \,.\, (\frac{\partial R}{\partial z})]$, contient des termes dépendans de l'angle $nt - 3n't + 2n''t$; mais ces termes n'ayant point pour diviſeur $n - 3n' + 2n''$, ils diſparoiſſent devant ceux du même genre, que renferme l'intégrale $\int dR$, & qui ont ce diviſeur.

La fonction

$$- \frac{2 \,.\, (1 + m) \,.\, \delta r^2}{r^3} + \frac{\delta r \,.\, \partial\partial \delta r - r^2 \,.\, (\partial \delta v)^2 - 4 r \,.\, \partial v \,.\, \delta r \,.\, \partial \delta v - \delta r^2 \,.\, \partial v^2}{\partial t^2}$$

ne renferme aucun terme qui ait pour diviſeur $n - 3n' + 2n''$, puiſque les termes de ce genre ne ſe rencontrent point dans les expreſſions de δr & de δv. Dans la théorie du ſecond ſatellite, cette fonction devient

$$- \frac{2 (1 + m') \,.\, \delta r'^2}{r'^3} + \frac{\delta r' \,.\, \partial\partial \,.\, \delta r' - r'^2 \,.\, (\partial \delta v')^2 - 4 r' \,.\, \partial v' \,.\, \delta r' \,.\, \partial \delta v' - \delta r'^2 \,.\, \partial v'^2}{\partial t^2}.$$

On a vu dans l'*art. V*, que la valeur de $\delta r'$ eſt compoſée de deux termes, dont le premier dépend du coſinus de l'angle $nt - n't + \varepsilon - \varepsilon'$, & a pour diviſeur $n - n' - N'$, & dont le ſecond dépend du coſinus de l'angle $2n't - 2n''t + 2\varepsilon' - 2\varepsilon''$, & a pour diviſeur $2n' - 2n'' - N'$: il ſuit de-là que $\delta r'^2$ contient un terme dépendant du coſinus de l'angle $nt - 3n't + 2n''t + \varepsilon - 3\varepsilon' + 2\varepsilon''$, & qui a pour diviſeur $(n - n' - N') \,.\, (2n' - 2n'' - N')$. Ce diviſeur étant très-petit, ce terme devient aſſez ſenſible pour y avoir égard. On trouvera pareillement que $\frac{(\partial \,.\, \delta v')^2}{\partial t^2}$ renferme un terme ſemblable, ayant le même diviſeur, & que la même choſe a lieu pour les différens termes

de la fonction précédente; mais on doit observer que l'on a, à-très-peu-près, par l'*art. V*,

$$\frac{\partial \delta v'}{\partial t} = -\frac{2 n' . \delta r'}{a'}; \quad \frac{\partial \partial \delta r'}{\partial t^2} = -n'^2 . \delta r';$$

en substituant ces valeurs dans la fonction précédente, & en y faisant $r' = a'$; $\frac{\partial v'}{\partial t} = n'$; $\frac{1 + m'}{a'^3} = n'^2$; on trouvera qu'elle se réduit à zéro.

On voit ainsi qu'en n'ayant égard qu'aux termes dépendans de l'angle $n t - 3 n' t + 2 n'' t$, & qui ont pour diviseur $n - 3 n' - 2 n''$, & en négligeant les carrés & les produits des excentricités des orbites; l'expression de $\frac{\partial . \delta' v}{\partial t}$ se réduit à la suivante :

$$\frac{\partial . \delta' v}{\partial t} = \frac{3 . \int d R}{\sqrt{[(1 + m) . a]}};$$

d'où l'on tire, en négligeant m vis-a-vis de l'unité, & en observant que $n^2 = \frac{1}{a^3}$,

$$\frac{\partial \partial . \delta' v}{\partial t^2} = \frac{3 a n . d R}{\partial t}.$$

Développons maintenant les différens termes de $d R$, qui dépendent de l'angle $n t - 3 n' t + 2 n'' t + \varepsilon - 3 \varepsilon' + 2 \varepsilon''$; & pour abréger, désignons cet angle par φ. Si l'on n'a égard qu'à l'action du second Satellite sur le premier, on a par l'*art. IV*,

$$R = -\frac{m'}{2} . B^{(0)} + m' . \left(\frac{r}{r'^2} - B^{(1)}\right).$$
$$\text{cos.}\,(v' - v) - m' B^{(2)} . \text{cos.}\, 2\,(v' - v) - \&c.$$

Le terme $m' . \left(\frac{r}{r'^2} - B^{(1)}\right) . \text{cos.}\,(v' - v)$ de cette expression de R, produit dans $d R$, la fonction différentielle,

$$m' . \partial r . \left[\frac{1}{r'^2} - \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial r} \right) \right] . \text{cof.} (v' - v)$$

$$+ m' . \partial v . \left(\frac{r}{r'^2} - B^{(1)} \right) . \text{fin.} (v' - v).$$

Il faut ſubſtituer dans cette fonction, au lieu de r, r', v & v', les quantités $a + \frac{r \delta r}{a}$, $a' + \frac{r' \delta r'}{a'}$, $nt + \varepsilon + \delta v$, & $nt + \varepsilon' + \delta v'$. La ſubſtitution de $a + \frac{r \delta r}{a}$, au lieu de r, & de $nt + \varepsilon + \delta v$, au lieu de v, ne donnera aucun terme dépendant de l'angle φ; il faudroit pour cela, que $\frac{r \delta r}{a}$ & δv, renfermaſſent des termes dépendans de l'angle $2n't - 2n''t + 2\varepsilon' - 2\varepsilon''$; parce que ces termes, en ſe combinant avec ceux qui dépendent de l'angle $nt - n't + \varepsilon - \varepsilon'$, dans la fonction précédente, en produiroient d'autres dépendans de l'angle φ; or il eſt viſible par l'*art. IV*, que les valeurs de $\frac{r \delta r}{a}$ & de δv, ne renferment point de termes dépendans de l'angle $2n't - 2n''t + 2\varepsilon' - 2\varepsilon''$; leur ſubſtitution dans la fonction différentielle précédente ne donnera donc point de termes dépendans de l'angle φ.

Il n'en eſt pas de même de la ſubſtitution de $a' + \frac{r' \delta r'}{a'}$, au lieu de r', & de $n't + \varepsilon' + \delta v'$, au lieu de v'. En faiſant cette ſubſtitution dans le terme $m' \partial v . \left(\frac{r}{r^2} - B^{(1)} \right) . \text{fin.} (v' - v)$, il en réſulte les deux termes ſuivans,

$$- m' . n \partial t . \frac{r' \delta r'}{a'^2} . \left[\frac{2a}{a'^3} + a' . \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial a'} \right) \right] .$$
$$\text{fin.} (n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$$

$$+ m' . n \partial t . \delta v' . \left(\frac{a}{a'^2} - B^{(1)} \right).$$
$$\text{cof.} \left(n' t - n t + \varepsilon' - \varepsilon \right).$$

On a par l'*article V*, en vertu de l'action du troisième Satellite,

$$\frac{r' \delta r'}{a'^2} = \frac{- n' . m'' . F'}{2 . (n - n' - N')} . \text{cof.}\, 2 \left(n'' t - n' t + \varepsilon'' - \varepsilon' \right);$$

$$\delta v' = \frac{- n' m'' F'}{n - n' - N'} . \text{fin.}\, 2 \left(n'' t - n' t + \varepsilon'' - \varepsilon' \right);$$

ces valeurs fubftituées dans les deux termes précédens, donnent le terme

$$\frac{- n\, n' . m' . m'' . F'}{2 . (n - n' - N')} . \left[\frac{2 a}{a'^2} - B^{(1)} + \tfrac{1}{2} a' . \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial a'} \right) \right] . \partial t . \text{fin.}\, \varphi .$$

On a par l'*art. V*,

$$\frac{G}{2 a'} = \frac{2 a}{a'^2} - B^{(1)} + \tfrac{1}{2} . a' . \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial a'} \right);$$

le terme précédent deviendra ainfi, en y fubftituant $2 n'$, au lieu de n qui en diffère très-peu,

$$- \frac{n'^2 . m' . m'' . F' . G . \partial t . \text{fin.}\, \varphi}{2 a' . (n - n' - N')} .$$

Ce terme acquiert une valeur fenfible, par fon très-petit divifeur $n - n' - N'$.

En difcutant de la même manière les autres termes de l'expreffion de R, qui dépendent de l'action de m', on trouvera qu'ils ne produifent aucun terme fenfible dépendant de l'angle φ; on trouvera pareillement que les termes de R qui dépendent de l'action des Satellites m'', m''', du Soleil & de la figure de Jupiter, ne produifent aucun terme fenfible du même genre ; on aura donc, en n'ayant égard qu'à ces termes, & en changeant n dans $2 n'$,

$$\frac{\partial \partial . \delta' v}{\partial t^2} = - \frac{3 a n'^3 . m' . m'' . F' G . \text{fin.}\, \varphi .}{a' . (n - n' - N')} .$$

Relativement au fecond Satellite, on a

$$\frac{\partial \partial \delta' v'}{\partial t^2} = \frac{3 a' n' . d' R'}{\partial t^2} ,$$

R' étant ce que devient R par rapport à ce Satellite, & la caractéristique différentielle d', se rapportant aux seules coordonnées du même Satellite. Si l'on n'a égard qu'à l'action de m sur m', on a

$$R' = -\frac{m}{2} \cdot B^{(0)} + m \cdot \left(\frac{r'}{r^2} - B^{(1)}\right) \cdot \text{cos.}\,(v' - v) - m\,B^{(2)} \cdot \text{cos.}\,2\,(v' - v) - \&c.$$

Le terme $m \cdot \left(\frac{r'}{r^2} - B^{(1)}\right) \cdot \text{cos.}\,(v' - v)$ de cette expression de R', produit dans $d'\,R'$ la fonction différentielle

$$m\,\partial r' \cdot \left[\frac{1}{r^2} - \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial r'}\right)\right] \cdot \text{cos.}\,(v' - v) - m\,\partial v' \cdot \left(\frac{r'}{r^2} - B^{(1)}\right) \cdot \text{sin.}\,(v' - v),$$

& cette fonction développée renferme la suivante,

$$m \cdot \frac{\partial (r' \delta r')}{a'^2} \cdot \left[\frac{a'}{a^2} - a' \cdot \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial a'}\right)\right] \cdot \text{cos.}\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$$

$$- m\,n'\,\partial t \cdot \frac{r'\,\delta r'}{a'^2} \cdot \left[\frac{a'}{a^2} - a'\left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial a'}\right)\right] \cdot \text{sin.}\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$$

$$- m\,\partial \cdot \delta v' \cdot \left(\frac{a'}{a^2} - B^{(1)}\right) \cdot \text{sin.}\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$$

$$- m\,n'\,\partial t \cdot \delta v' \cdot \left(\frac{a'}{a^2} - B^{(1)}\right) \cdot \text{cos.}\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon).$$

En substituant pour $\frac{r'\,\delta r'}{a'^2}$ & $\delta v'$, leurs valeurs dues à l'action du troisième Satellite, & que nous avons données ci-dessus; en observant de plus que $2\,n' - 2\,n''$ est très-peu différent de n'; on trouvera que la fonction précédente renferme la quantité

$$\frac{n'^2 . m . m'' . F'}{n - n' - N'} . \left[\frac{a'}{2a^2} - B^{(1)} + \tfrac{1}{2} a' . \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial a'} \right) \right] . \partial t . \text{fin.}\, \varphi ;$$

mais on a à très-peu-près, $n^2 = 4n'^2$, & par conféquent $4a^3 = a'^3$, ou $\frac{a'}{2a^2} = \frac{2a}{a'^2}$; le terme précédent deviendra ainfi

$$\frac{n'^2 . m . m'' . F' G . \partial t . \text{fin.}\, \varphi}{2a' . (n - n' - N')} .$$

On s'affurera facilement que ce terme eft le feul fenfible que produife la partie de $d' R'$ relative à l'action du premier Satellite.

La partie de R' relative à l'action du troifième Satellite, eft

$$R' = - \tfrac{1}{2} . m'' . B'^{(0)} + m'' . \left(\frac{r'}{r''^2} - B'^{(1)} \right).$$
$$\text{cof.}\, (v'' - v') - m'' . B'^{(2)} . \text{cof.}\, 2\,(v'' - v') - \&c.$$

Si l'on n'a égard qu'au terme $- m'' B'^{(2)} . \text{cof.}\, 2\,(v'' - v')$ de cette expreffion, on aura

$$d' R' = - m'' . \partial r' . \left(\frac{d B'^{(2)}}{\partial r'} \right) . \text{cof.}\, 2\,(v'' - v')$$
$$- 2m'' . B'^{(2)} \partial v' . \text{fin.}\, 2\,(v'' - v').$$

Cette fonction différentielle renferme la fuivante,

$$- m'' . \frac{\partial (r' \delta r')}{a'^2} . a' . \left(\frac{\partial B'^{(2)}}{\partial a'} \right) . \text{cof.}\, 2\,(n'' t - n' t + \varepsilon'' - \varepsilon')$$
$$- 2m'' . n' \partial t . \frac{r' . \delta r'}{a'^2} . a' . \left(\frac{\partial B'^{(2)}}{\partial a'} \right) . \text{fin.}\, 2\,(n'' t - n' t + \varepsilon'' - \varepsilon')$$
$$- 2m'' . B'^{(2)} . \partial \delta v' . \text{fin.}\, 2\,(n'' t - n' t + \varepsilon'' - \varepsilon')$$
$$+ 4m'' . B'^{(2)} . n' \partial t . \delta v' . \text{cof.}\, 2\,(n'' t - n' t + \varepsilon'' - \varepsilon').$$

Mais par l'*article V*, l'action de m fur m' donne

$$\frac{r' \delta r'}{a'^2} = - \frac{n' m G}{2 . (n - n' - N')} . \text{cof.}\, (nt - n' t + \varepsilon - \varepsilon');$$

$$\delta v' = \frac{n'm \,.\, G}{n - n' - N'} \,.\, \text{sin.}\, (nt - n't + \varepsilon - \varepsilon');$$

la fonction différentielle précédente donnera ainsi le terme

$$\frac{n'^2 \,.\, m \,.\, m'' \,.\, G}{2 \,.\, (n - n' - N')} \,.\, \left[2B'^{(2)} + \tfrac{1}{2} a' \,.\, \left(\frac{\partial B'^{(2)}}{\partial a'}\right)\right] \,.\, \partial t \,.\, \text{sin.}\, \varphi,$$

en observant que $n - n' = n'$ à fort peu-près. Or on a par l'*art*, *V*,

$$F' = a'^2 \,.\, \left(\frac{\partial B'^{(2)}}{\partial a'}\right) + \frac{2n'}{n' - n''} \,.\, a' \,.\, B'^{(2)};$$

on aura donc à très-peu-près,

$$\frac{F'}{2a'} = 2B'^{(2)} + \tfrac{1}{2} a' \,.\, \left(\frac{\partial B'^{(2)}}{\partial a'}\right),$$

ce qui change le terme précédent dans celui-ci,

$$\frac{n'^2 \,.\, m\, m'' \,.\, F'\, G}{4a' \,.\, (n - n' - N')} \,.\, \partial t \,.\, \text{sin.}\, \varphi.$$

On s'assurera facilement que ce terme est le seul sensible que produise la partie de $d' R'$ relative à l'action du troisième Satellite. Enfin, on trouvera que ni l'action de Jupiter, ni celles du quatrième Satellite & du Soleil, ne produisent aucun terme de ce genre dans la valeur de $d' R'$, en sorte qu'en réunissant les deux termes relatifs à l'action du premier & du troisième Satellite, on aura

$$d' R' = \frac{3\, n'^2 \,.\, m\, m'' \,.\, F\, G}{4\, a' \,.\, (n - n' - N')} \,.\, \partial t \,.\, \text{sin.}\, \varphi;$$

d'où l'on tire,

$$\frac{\partial \partial \delta v'}{\partial t^2} = \frac{9\, n'^3 \,.\, m\, m'' \,.\, F\, G \,.\, \text{sin.}\, \varphi}{4 \,.\, (n - n' - N')}.$$

Il nous reste présentement à considérer la valeur de $\frac{\partial \partial \delta v''}{\partial t^2}$. On a

$$\frac{\partial \partial \delta v''}{\partial t^2} = \frac{3\, a'' \,.\, n'' \, d''\, R''}{\partial t};$$

R'' étant ce que devient R, relativement au troisième satellite, & la caractéristique différentielle d'' étant uni-

quement relative aux coordonnées de ce satellite. Si l'on n'a égard qu'à l'action du second satellite sur le troisième, on a

$$R'' = -\frac{m'}{2} \cdot B'^{(0)} + m' \cdot \left(\frac{r''}{r'^2} - B'^{(1)}\right) \cdot \text{cos.}(v'' - v') - m' \cdot B'^{(2)} \cdot \text{cos.}\,2\,(v'' - v') - \&c.$$

En ne considérant que le terme $-m' \cdot B'^{(2)} \cdot \text{cos.}\,2\,(v'' - v')$ de cette expression, on aura

$$d'' \cdot R'' = -m' \cdot \left(\frac{\partial B'^{(2)}}{\partial r''}\right) \cdot \partial r'' \cdot \text{cos.}\,2\,(v'' - v') + 2\,m' \cdot B'^{(2)} \cdot \partial v'' \cdot \text{sin.}\,2\,(v'' - v').$$

Cette fonction différentielle renferme celle-ci,

$$2\,m' \cdot \frac{r'\,\delta r'}{a'^2} \cdot a' \cdot \left(\frac{\partial B'^{(2)}}{\partial a'}\right) \cdot n''\partial t \cdot \text{sin.}\,2\,(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon') - 4\,m' \cdot \delta v' \cdot n''\partial t \cdot B'^{(2)} \cdot \text{cos.}\,2\,(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon').$$

En substituant pour $\frac{r'\,\delta r'}{a'^2}$ & $\delta v'$, les parties de ces valeurs qui sont dues à l'action de m sur m'; la fonction précédente donnera cette quantité,

$$\frac{-n' \cdot m \cdot m' \cdot G}{2 \cdot (n - n' - N')} \cdot \left[a' \cdot \left(\frac{\partial B'^{(2)}}{\partial a'}\right) + 4\,B'^{(2)}\right] \cdot n''\partial t \cdot \text{sin.}\,\varphi,$$

$$= \frac{-n' \cdot m \cdot m'\,F' \cdot G}{2\,a'\,(n - n' - N')} \cdot n''\,\partial t \cdot \text{sin.}\,\varphi.$$

On s'assurera aisément que ce terme est le seul sensible que produise la partie de $d''\,R''$ relative à l'action du second satellite, & que les actions de Jupiter, du Soleil, du premier & du quatrième satellite, n'en produisent point de la même nature, qui soient sensibles ; on aura donc en observant que $n' = 2\,n''$ à fort peu-près,

$$\frac{\partial\partial\delta \cdot v''}{\partial t^2} = -\frac{3\,a'' \cdot n'^3 \cdot m \cdot m' \cdot F'\,G \cdot \text{sin.}\,\varphi}{8\,a' \cdot (n - n' - N')}.$$

Quant à la valeur de $\frac{\partial\partial\delta \cdot v'''}{\partial t^2}$, elle ne renferme point

de termes

de termes ſemblables. Cela poſé, on aura

$$\frac{\partial\partial \,.\, \delta' \,.\, (v' - 3\,v' + 2\,v'')}{\partial t^2} = -\frac{3\,n'^3 \,.\, F'G}{n - n' - N'} \,.$$

$$\left(\frac{a}{a'} \,.\, m'\,m'' + \frac{9}{4} \,.\, m\,m'' + \frac{a''}{4\,a'} \,.\, m\,m'\right) \,.\, \text{ſin.}\, \varphi.$$

Dans le ſecond membre de cette équation, φ eſt égal à $n\,t - 3\,n'\,t + 2\,n''\,t + \varepsilon - 3\,\varepsilon' + 2\,\varepsilon''$; or cette dernière quantité ne diffère de $v - 3\,v' + 2\,v''$ que par des termes qui dépendent ſoit des excentricités & des inclinaiſons des orbites, ſoit des forces perturbatrices; en négligeant donc ces termes, nous pouvons ſuppoſer $\varphi = v - 3\,v' + 2\,v''$: dans ce cas, $\partial\partial \,.\, \delta' \,.\, (v - 3\,v' + 2\,v'') = \partial\partial\varphi$; ainſi, en faiſant, pour abréger,

$$k = -\frac{3\,n'\,F'G}{n - n' - N'} \,.\left(\frac{a}{a'} \,.\, m'm'' + \frac{9}{4} \,.\, m\,m'' + \frac{a''}{4\,a'} \,.\, m\,m'\right);$$

on aura

$$\frac{\partial\partial\varphi}{\partial t^2} = k \,.\, n'^2 \,.\, \text{ſin.}\, \varphi.$$

XIV.

L'ÉQUATION précédente donne, en l'intégrant,

$$\partial t = \frac{\pm\,\partial\varphi}{\sqrt{(c - 2\,k \,.\, n'^2 \,.\, \text{coſ.}\,\varphi)}},$$

c étant une conſtante arbitraire dont la valeur peut donner lieu à trois cas différens que nous allons conſidérer.

1.° La conſtante c peut ſurpaſſer $2\,k\,n'^2$, abſtraction faite du ſigne ; alors elle eſt néceſſairement poſitive ; l'angle $\pm\,\varphi$ croît indéfiniment & devient ſucceſſivement égal à une, deux, trois, &c. circonférences.

2.° La conſtante c peut être moindre que $2\,k\,n'^2$, k étant poſitif. Dans ce cas, le radical $\sqrt{(c - 2\,k \,.\, n'^2\ \text{coſ.}\,\varphi)}$ devient imaginaire, lorſque l'angle $\pm\,\varphi$ eſt égal à zéro, à une, deux, &c. circonférences; il ne peut donc alors qu'oſciller autour de 180^d, en ſorte que ſa valeur moyenne eſt 180^d.

3.° La conſtante c peut être moindre que $-2kn'^2$, k étant négatif. Dans ce cas, le radical $\sqrt{(c - 2kn'^2 . \text{coſ.}\,\varphi)}$ devient imaginaire, lorſque $\pm \varphi'$ eſt égal à 180^d, & en général à un nombre impair de demi-circonférences ; l'angle φ ne peut donc alors qu'oſciller autour de zéro, en ſorte que ſa valeur moyenne eſt nulle. Voyons lequel de ces trois cas a lieu dans la nature.

Nous trouverons dans la ſuite que k eſt une quantité poſitive; ainſi le troiſième cas n'exiſte point, & l'angle φ doit ou croître indéfiniment, ou oſciller autour de 180^d. Suppoſons $\varphi = 180^d \pm \varpi$; le ſigne de ϖ étant le même que celui du radical $\sqrt{(c - 2kn'^2 . \text{coſ.}\,\varphi)}$, on aura

$$\partial t = \frac{\partial \varpi}{\sqrt{(c + 2kn'^2 . \text{coſ.}\,\varpi)}}.$$

Si les angles φ & ϖ croiſſent indéfiniment, c eſt poſitif & plus grand que $2k . n'^2$; on a donc dans l'intervalle compris depuis $\varpi = 0$, juſqu'à $\varpi = 90^d$, $\partial t < \frac{\partial \varpi}{n' . \sqrt{(2k)}}$, & par conſéquent $t < \frac{\varpi}{n' \sqrt{(2k)}}$; ainſi le temps t que l'angle ϖ emploîroit à parvenir de zéro à 90^d, ſeroit moindre que $\frac{90^d}{n' . \sqrt{(2k)}}$. Nous verrons dans la ſuite que ce temps eſt au-deſſous d'une année : or, depuis la découverte des Satellites, cet angle a toujours paru nul, ou du moins très-petit; il ne croît donc point indéfiniment, il ne fait qu'oſciller autour de zéro, en ſorte que ſa valeur moyenne eſt nulle. C'eſt ce que l'obſervation confirme; & en cela, elle fournit une nouvelle preuve de l'action mutuelle des ſatellites de Jupiter.

De-là réſultent pluſieurs conſéquences intéreſſantes.

L'équation $v - 3v' + 2v'' = 180^d \pm \varpi$, donne, en égalant ſéparément les quantités qui ne ſont pas périodiques, $nt - 3n't + 2n''t + \varepsilon - 3\varepsilon' + 2\varepsilon'' = 180^d$,

d'où l'on tire $n - 3n' + 2n'' = 0$; ainsi, 1.° le moyen mouvement du premier Satellite, plus deux fois celui du troisième, est rigoureusement égal à trois fois celui du second. 2.° La longitude moyenne du premier Satellite, moins trois fois celle du second, plus deux fois celle du troisième, est exactement & constamment égale à 180^d. Nous avons déjà remarqué dans l'*article V*, que ces deux théorèmes sont donnés d'une manière extrêmement approchée par les observations; nous pouvons maintenant assurer qu'ils sont rigoureux.

On a vu dans l'*article V*, que les inégalités du second Satellite, produites par l'action du premier & du troisième, se réunissent en vertu de ces théorèmes, dans un seul terme qui forme la grande inégalité que les observations ont indiquée dans le mouvement du second Satellite; ces inégalités seront donc toujours réunies, & il n'est point à craindre que, dans la suite des siècles, elles se séparent.

Sans l'action mutuelle des Satellites, les deux équations $n - 3n' + 2n'' = 0$; $\varepsilon - 3\varepsilon' + 2\varepsilon'' = 180^d$, n'auroient aucune liaison entre elles; d'ailleurs il faudroit supposer qu'à l'origine, les époques & les moyens mouvemens des Satellites ont été ordonnés de manière à satisfaire à ces équations, ce qui est infiniment peu vraisemblable, & dans ce cas même, la force la plus légère, telle que l'attraction des planètes & des comètes, auroit fini par changer ces rapports; mais l'action réciproque des Satellites fait disparoître ces invraisemblances, & donne de la stabilité aux rapports précédens. En effet, on a par ce qui précède, à l'origine du mouvement,

$$\frac{\partial v}{n'\partial t} - \frac{3 \cdot \partial v'}{n'\partial t} + \frac{2\partial v''}{n'\partial t} = \pm \sqrt{\left[\frac{c}{n'^2} - 2k\cos.(\varepsilon - 3\varepsilon' + 2\varepsilon'')\right]},$$

c étant moindre que $2k \cdot n'^2$; il suffit donc pour l'exactitude des théorèmes précédens, qu'à l'origine, la fonction

$\frac{\partial v}{n' \partial t} - \frac{3 . \partial v'}{n' \partial t} + \frac{2 \partial v''}{n' \partial t}$, ait été comprise entre les limites,

$+ 2 \sqrt{(k)} . \text{sin.} \frac{1}{2} (\varepsilon - 3 \varepsilon' + 2 \varepsilon'')$, &

$- 2 \sqrt{(k)} . \text{sin.} \frac{1}{2} . (\varepsilon - 3 \varepsilon' + 2 \varepsilon'')$;

& pour la stabilité de ces théorèmes, il suffit que les attractions étrangères laissent toujours la fonction précédente dans ces limites.

Les observations nous apprennent que l'angle ϖ est très-petit, & qu'ainsi l'on peut, sans erreur sensible, supposer cos. $\varpi = 1 - \frac{1}{2} \varpi^2$; soit donc $\frac{c + 2 k n'^2}{k n'^2} = \beta^2$, β étant arbitraire à cause de l'arbitraire c qu'il renferme; l'équation différentielle entre ϖ & t donnera

$$\varpi = \beta . \text{sin.} [n' t . \sqrt{(k)} + A],$$

A étant une nouvelle arbitraire.

Le mouvement des Satellites de Jupiter étant déterminé par douze équations différentielles du second ordre, leur théorie doit renfermer vingt-quatre constantes arbitraires. Quatre de ces constantes sont relatives aux moyens mouvemens des Satellites, ou à leurs moyennes distances; quatre sont relatives aux époques des longitudes moyennes; huit dépendent des excentricités & des aphélies, & huit autres dépendent des inclinaisons & des nœuds des orbites. Les théorèmes précédens établissent deux relations entre les moyens mouvemens & les époques des longitudes moyennes des Satellites, ce qui réduit à vingt-deux ces vingt-quatre arbitraires; c'est pour y suppléer que l'expression de ϖ renferme deux nouvelles arbitraires.

Si l'on reprend les valeurs de $\frac{\partial \partial \delta' v}{\partial t^2}$, $\frac{\partial \partial \delta' v'}{\partial t^2}$ & $\frac{\partial \partial \delta' v''}{\partial t^2}$, trouvées dans l'*article précédent*, on voit qu'elles ont des rapports constans entr'elles & avec la

valeur de $\frac{\partial \partial \varpi}{\partial t^2}$, en ſorte que ſi l'on fait

$$\delta' v = P \,.\, \text{ſin.}\, [n' t \surd(k) + A],$$

on aura

$$\delta' v' = - \frac{3\, a'\, m}{4\, a\, m'} \,.\, P \,.\, \text{ſin.}\, [n' t \surd(k) + A]$$

$$\delta' v'' = \frac{a''\, m}{8\, a\, m''} \,.\, P \,.\, \text{ſin.}\, [n' t \surd(k) + A];$$

de plus, comme on a $\delta' v - 3\, \delta' v' + 2\, \delta' v'' = 180^d \pm \varpi$; on aura

$$\mathcal{C} = \pm P \,.\, (1 + \frac{9\, a'\, m}{4\, a\, m'} + \frac{a''\, m}{4\, a\, m''}).$$

Les trois premiers Satellites de Jupiter ſont donc aſſujettis à une inégalité dépendante de l'angle $n' t \surd(k) + A$; les obſervations peuvent ſeules fixer ſa quantité & l'inſtant où elle eſt nulle. Cette inégalité mérite une attention particulière de la part des aſtronomes; on peut la conſidérer comme une libration des mouvemens des trois premiers Satellites, en vertu de laquelle ces mouvemens oſcillent ſans ceſſe autour des rapports précédens, & par cette raiſon, nous la déſignerons dans la ſuite ſous le nom de *libration des ſatellites de Jupiter.*

Nous avons obſervé dans l'*article IX*, que les mouvemens des Satellites de Jupiter ſont aſſujettis à des inégalités conſidérables dépendantes des variations ſéculaires de l'orbite & de l'équateur de Jupiter, & l'on peut croire que ces inégalités peuvent à la longue, changer les rapports trouvés ci-deſſus entre les époques & les longitudes moyennes des trois premiers Satellites. Nous allons faire voir que ces rapports ſubſiſtent toujours, malgré ces inégalités ſéculaires qui ſe coordonnent ſans ceſſe de manière à y ſatisfaire, en ſorte que l'inégalité ſéculaire du premier Satellite, moins trois fois celle du ſecond, plus deux fois celle du troiſième, eſt conſtamment égale à zéro. Pour cela, nommons Ψ, Ψ', Ψ'', les inégalités ſéculaires du

premier, du ſecond & du troiſième Satellite, qui auroient lieu ſans leur action mutuelle, quelle qu'en ſoit la cauſe, ſoit que ces inégalités dépendent des variations ſéculaires de l'orbite & de l'équateur de Jupiter, ſoit qu'elles viennent de la réſiſtance d'un fluide éthéré; il en réſultera dans la fonction différentielle $\partial\partial v - 3\partial\partial v' + 2\partial\partial v''$, la quantité $\partial\partial\Psi - 3\partial\partial\Psi' + 2\partial\partial\Psi''$, & l'équation différentielle en φ, que nous avons trouvée dans l'*article précédent*, deviendra

$$\frac{\partial\partial\varphi}{\partial t^2} = kn'^2 \cdot \text{ſin.}\,\varphi + \frac{\partial\partial\Psi}{\partial t^2} - \frac{3 \cdot \partial\partial\Psi'}{\partial t^2} + 2 \cdot \frac{\partial\partial\Psi''}{\partial t^2}.$$

Si l'on fait $\varphi = 180^d + \varpi$, & que l'on ſuppoſe ϖ très-petit, on aura

$$\frac{\partial\partial\varpi}{\partial t^2} + k \cdot n'^2 \varpi = \frac{\partial\partial\Psi - 3 \cdot \partial\partial\Psi' + 2 \cdot \partial\partial\Psi''}{\partial t^2}:$$

or, les quantités Ψ, Ψ', Ψ'' étant ſuppoſées varier avec une extrême lenteur, en ſorte que la période de leurs variations embraſſe un grand nombre de ſiècles, la partie de $\frac{\partial\partial\varpi}{\partial t^2}$ relative à ces quantités, ſera très-petite par rapport à $kn'^2\omega$, parce que la période de l'angle $n't \cdot \sqrt{(k)}$, n'eſt, comme on le verra ci-après, que d'un petit nombre d'années; on aura donc, en n'ayant égard qu'à la partie de ϖ qui dépend des quantités Ψ, Ψ' & Ψ'',

$$\varpi = \frac{\partial\partial\Psi - 3 \cdot \partial\partial\Psi' + 2 \cdot \partial\partial\Psi''}{kn'^2 \cdot \partial t^2}.$$

Cette partie de ϖ eſt inſenſible, parce que Ψ, Ψ', Ψ'' croiſſant avec une extrême lenteur, leurs différences ſecondes diviſées par $kn'^2 \cdot \partial t^2$, ſont à très-peu-près nulles; on peut donc ſuppoſer $\varpi = 0$, en n'ayant égard qu'à ces quantités, & alors les théorèmes énoncés précédemment ſur les moyens mouvemens & ſur les longitudes moyennes des trois premiers Satellites, ſubſiſtent en entier.

Voyons maintenant comment les inégalités ſéculaires

des trois premiers Satellites se coordonnent entr'elles. Si l'on suppose

$$b = \frac{1}{1 + \frac{9\,a'\,m}{4\,a\,m'} + \frac{a''\,m}{4\,a\,m''}},$$

on aura par l'*art. précédent*,

$$\frac{\partial\partial v}{\partial t^2} = -\,b\,k\,n'^2\,.\,\varpi + \frac{\partial\partial \Psi}{\partial t^2}.$$

En substituant pour ϖ sa valeur précédente, on aura

$$\frac{\partial\partial v}{\partial t^2} = (1 - b)\,.\,\frac{\partial\partial \Psi}{\partial t^2} + 3\,b\,.\,\frac{\partial\partial \Psi'}{\partial t^2} - 2\,b\,.\,\frac{\partial\partial \Psi''}{\partial t^2};$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$v = (1 - b)\,.\,\Psi + 3\,b\,.\,\Psi' - 2\,b\,.\,\Psi''.$$

On trouvera pareillement

$$v' = \frac{3\,a'\,m\,.\,b}{4\,a\,m'}\,.\,\Psi + \left(1 - \frac{9\,a'\,m}{4\,a\,m'}\,.\,b\right).\,\Psi' + \frac{3\,a'\,m}{2\,a\,m'}\,.\,b\,.\,\Psi'';$$

$$v'' = -\frac{a''\,.\,m}{8\,a\,.\,m''}\,.\,b\,\Psi + \frac{3\,a''\,.\,m}{8\,a\,m''}\,.\,b\,.\,\Psi' + \left(1 - \frac{a''\,m}{4\,a\,m''}\,.\,b\right).\,\Psi'';$$

d'où l'on voit que l'on a, en vertu de ces valeurs, $v - 3\,v' + 2\,v'' = 0$; ainsi les inégalités séculaires des trois premiers Satellites qui, sans leur action mutuelle, seroient respectivement égales à Ψ, Ψ' & Ψ'', se changent dans les précédentes, & n'altèrent point les rapports établis ci-dessus.

La libration des Satellites lie donc entre eux les mouvemens, les époques & les inégalités séculaires des trois premiers Satellites; elle modifie encore d'une manière très-sensible, celles de leurs inégalités qui croissent avec une grande lenteur. Nous avons trouvé dans l'*art. IX*, que l'action du Soleil produit dans l'expression de v, le terme

$$\frac{3\,M}{2}\,.\,E\,.\,\text{sin.}\,(M\,t + A - B);$$

l'expression de $\frac{\partial\partial v}{\partial t^2}$ contient donc le terme $-\frac{3\,M^3}{2}$.

E . ſin. $(Mt + A - B)$. Les expreſſions de $\frac{\partial\partial v'}{\partial t^2}$ & de $\frac{\partial\partial v''}{\partial t^2}$, contiennent des termes ſemblables qui n'en diffèrent que par le diviſeur n qui ſe change ſucceſſivement dans n' & n''; on aura ainſi, par l'*article précédent*, en n'ayant égard qu'à ces termes

$$\frac{\partial\partial\varphi}{\partial t^2} = kn'^2 \,.\, \text{ſin.}\, \varphi - 3\, M^3 . E . \left(\frac{1}{n} - \frac{3}{n'} + \frac{2}{n''}\right) . \text{ſin.}\, (Mt + A - B).$$

Or on a, en vertu de l'équation, $n - 3n' + 2n'' = 0$;

$$\frac{1}{n} - \frac{3}{n'} + \frac{2}{n''} = \frac{6 . (n' - n'')^2}{n . n' n''};$$

de plus, n étant à fort peu-près égal à $2\,n'$, & n'' étant à peu-près égal à $\frac{1}{2}\,n'$, on a

$$\frac{6 . (n' - n'')^2}{n\, n'\, n''} = \frac{3}{2\, n'};$$

en ſuppoſant donc $\varphi = 180^d + \varpi$, & ϖ très-petit, on aura

$$\frac{\partial\partial\varpi}{\partial t^2} + kn'^2 . \varpi = -\frac{9 . M^3 . E}{2\, n'} . \text{ſin.}\, (Mt + A - B).$$

Si l'on intègre cette équation, en faiſant abſtraction des conſtantes arbitraires auxquelles nous avons eu égard dans ce qui précède, on aura

$$\varpi = \frac{9\, M^3 . E}{2\, n' . (M^2 - k\, n'^2)} . \text{ſin.}\, (Mt + A - B).$$

Maintenant on a par l'*article précédent*

$$\frac{\partial\partial v}{\partial t^2} = -\, bkn'^2 \varpi - \frac{3\, M^3 . E}{n} . \text{ſin.}\, (Mt + A - B).$$

En ſubſtituant, au lieu de ϖ, ſa valeur précédente, on trouvera, après avoir intégré, que l'expreſſion de v renferme l'inégalité

$$\frac{3\, ME}{2\, n'} . \left(1 + \frac{3\, bk . n'^2}{M^2 - kn'^2}\right) . \text{ſin}\, (Mt + A - B).$$

On trouvera

On trouvera de la même manière que l'expreſſion de v' renferme l'inégalité

$$\frac{3ME}{n'} \cdot \left[1 - \frac{9\,a'm \cdot bk \cdot n'^2}{8\,am' \cdot (M^2 - kn'^2)}\right] \cdot \text{ſin.}\,(Mt + A - B),$$

& que l'expreſſion de v'', renferme l'inégalité

$$\frac{6ME}{n'} \cdot \left[1 + \frac{3\,a''m \cdot bkn'^2}{32\,am'' \cdot (M^2 - kn'^2)}\right] \cdot \text{ſin.}\,(Mt + A - B).$$

M^2 étant moindre que kn'^2, comme on le verra dans la ſuite, il en réſulte que la libration des Satellites a une influence ſenſible ſur l'inégalité qui dépend de l'angle $Mt + A - B$.

J'ai déjà donné dans les *Mémoires de l'Académie pour l'année 1784*, les réſultats précédens ſur la libration des trois premiers ſatellites de Jupiter. J'y ſuis parvenu par une méthode différente de celle que je viens d'expoſer : l'accord de ces deux méthodes peut ſervir à les confirmer mutuellement.

X V.

Les inégalités de δv, $\delta v'$, $\delta v''$, qui ont pour diviſeur $(n - 2n' + f)^2$, & celles des rayons vecteurs qui ont pour diviſeur $n - 2n' + f$, produiſent dans les équations qui déterminent les excentricités & les aphélies des orbites, des termes qui, quoique dépendans des carrés & des produits des maſſes perturbatrices, ſont cependant ſenſibles, à cauſe du diviſeur $(n - 2n' + f)^2$, dont ils ſont affectés. Pour les déterminer, nous allons d'abord déterminer la partie du rayon vecteur r, qui a pour diviſeur $n - 2n' + f$.

Reprenons pour cela, l'équation différentielle (1) de l'*article II*.

$$0 = \frac{\partial^2 \cdot (r\,\delta r)}{\partial t^2} + \frac{(1+m) \cdot r\,\delta r}{r^3} + 2 \cdot \int dR + r \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial r}\right).$$

L'intégrale $\int dR$ produit un terme qui a pour diviſeur $n - 2n' + f$, & qui eſt multiplié par le coſinus de l'angle $nt - 2n't + \varepsilon - 2\varepsilon' + ft + \Gamma$. Nous avons

trouvé dans l'*art. VIII*, qu'il en résulte dans l'expression de δv, un terme dépendant du sinus du même angle, & qui est donné par la double intégrale $3a\int n\,dt.\int dR$; en nommant donc Q le coéfficient de ce sinus, coéfficient dont nous avons donné la valeur dans l'*article VIII*, on aura

$$\frac{2(n-2n'+f)}{3an}.Q.\text{cos.}(nt-2n't+\varepsilon-2\varepsilon'+ft+\Gamma)$$

pour le terme de $2\int dR$, qui dépend de l'angle $nt-2n't+\varepsilon-2\varepsilon'+ft+\Gamma$.

Nous avons vu dans l'*art. V*, que si l'on n'a égard qu'aux termes indépendans des excentricités, & qui ont pour diviseur $2n-2n'-N$, on a

$$\frac{r\delta r}{a^2}=\frac{-n\,m'.F}{2.(2n-2n'-N)}.\text{cos.}2(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon).$$

N étant à très-peu-près égal à $n-f$, on aura

$$\frac{r\delta r}{a^2}=\frac{-n\,m'\,F}{2.(n-2n'+f)}.\text{cos.}2(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon);$$

en substituant donc dans l'équation différentielle en $r\delta r$, au lieu de r, la quantité $a.[1+h.\text{cos.}(nt+\varepsilon-\varpi)]$, ϖ étant supposé égal à $ft+\Gamma$; en observant d'ailleurs que l'on a à fort peu-près, $\frac{1}{a^3}=n^2$, & que le coéfficient de $r\delta r$ est N^2 par l'*art. IV*; enfin, en ne conservant que les termes dépendans des excentricités des orbites, qui ont pour diviseur $n-2n'+f$ on aura

$$0=\frac{\partial^2(r\delta r)}{a^2.\partial t^2}+N^2.\frac{r\delta r}{a^2}$$

$$+\frac{3n^3.m'F.h}{4.(n-2n'+f)}.\text{cos.}(nt-2n't+\varepsilon-2\varepsilon'+\varpi)$$

$$+\frac{2n.(n-2n'+f)}{3}.Q.\text{cos.}(nt-2n't+\varepsilon-2\varepsilon'+\varpi)$$

$$+\frac{3n^3.m'Fh}{4.(n-2n'+f)}.\text{cos.}(3nt-2n't+3\varepsilon-2\varepsilon'-\varpi).$$

Si, pour abréger, on fait

$$K = \frac{-3\, n\, m'\, F\, h}{4.(n - 2\, n' + f)} - \frac{2.(n - 2\, n' + f)}{3\, n} . Q;$$

$$L = \frac{n\, m'\, F\, h}{4.(n - 2\, n' + f)};$$

on aura à très-peu-près,

$$\frac{r\, \delta r}{a^2} = K. \text{cos.} (n\, t - 2\, n'\, t + \varepsilon - 2\, \varepsilon' + \varpi)$$
$$+ L. \text{cos.} (3\, n\, t - 2\, n'\, t + 3\, \varepsilon - 2\, \varepsilon' - \varpi).$$

En supposant ensuite

$$H = \frac{-n\, m'\, F}{2.(n - 2\, n' + f)},$$

on aura pour la partie entière de $\frac{r\, \delta r}{a^2}$, qui a pour diviseur $n - 2\, n' + f)$,

$$H. \text{cos.}\, 2\, (n\, t - n'\, t + \varepsilon - \varepsilon')$$
$$+ K. \text{cos.} (n\, t - 2\, n'\, t + \varepsilon - 2\, \varepsilon' + \varpi)$$
$$+ L. \text{cos.} (3\, n\, t - 2\, n'\, t + 3\, \varepsilon - 2\, \varepsilon' - \varpi).$$

Reprenons maintenant l'équation

$$0 = \frac{\partial^2 . (r\, \delta' r)}{\partial t^2} + \frac{(1 + m) . r\, \delta' r}{r^3} + \frac{1}{2} . \frac{\partial^2 . \delta r^2}{\partial t^2}$$
$$- \frac{(1 + m) . \delta r^2}{r^3} + 2 . \int dR + x . \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)$$
$$+ y . \left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) + z . \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right),$$

que nous avons trouvée dans l'*article XIII.* Nous n'aurons égard dans cette équation qu'aux termes de l'ordre des carrés & des produits des masses perturbatrices qui sont ou constans, ou multipliés par cos. $(n\, t + \varepsilon - \varpi)$, & qui de plus sont divisés par $(n - 2\, n' + f)^2$. Le terme δr^2 peut être mis sous cette forme $\frac{(r\, \delta r)^2}{r^2}$, & il donne

la quantité

$$\frac{a^2 . H^2}{2} . [1 - 2h . \text{cof.} (nt + \varepsilon - \varpi)]$$
$$+ a^2 H . (K + L) . \text{cof.} (nt + \varepsilon - \varpi).$$

Le terme $\frac{1}{2} . \frac{\partial^2 . \delta r^2}{\partial t^2}$ de l'équation différentielle précédente donne ainſi la quantité

$$\tfrac{1}{2} . n^2 a^2 . H . (hH - K - L) . \text{cof.} (nt + \varepsilon - \varpi).$$

Le terme $- \frac{(1 + m) . \delta r^4}{r^3}$ peut être mis ſous cette forme, $- \frac{(1 + m) . (r \delta r)^2}{r^5}$, & il donne la quantité

$$- \frac{n^2 a^2 H^2}{2} + n^2 a^2 H . (\tfrac{5}{2} h H - K - L) . \text{cof.} (nt + \varepsilon - \varpi).$$

Si l'on nomme $a^2 q$ la partie conſtante de $r \delta' r$, le terme $\frac{(1 + m) . r \delta' r}{r^3}$ donnera la quantité

$$n^2 r \delta' r - 3 a^2 n^2 q h . \text{cof.} (nt + \varepsilon - \varpi);$$

l'équation différentielle en $r \delta' r$ deviendra donc

$$0 = \frac{\partial^2 . (r \delta' r)}{a^2 . \partial t^2} + \frac{N^2 . r \delta' r}{a^2} - \frac{n^2 . H^2}{2} + \tfrac{3}{2} . n^2 H .$$
$$(2 hH - \frac{2 q h}{H} - K - L) . \text{cof.} (nt + \varepsilon - \varpi)$$
$$+ 2 n^2 a . \int d R + n^2 a . r \left(\frac{\partial R}{\partial r}\right).$$

Nous donnons à $r \delta' r$ le coéfficient N^2, par la même raiſon pour laquelle nous avons donné dans l'*article IV*, ce coéfficient à $\frac{r \delta r}{a^2}$ dans l'équation différentielle en $r \delta r$.

La valeur de q dépend de la conſtante que l'on doit ajouter à l'intégrale $\int d R$. Pour déterminer cette conſtante, nous reprendrons la valeur de $\frac{\partial \delta' v}{\partial t}$ donnée dans

l'*article XIII.* Cette valeur ne doit point renfermer de termes conſtans, puiſque nous ſuppoſons que $n\,t$ repréſente le moyen mouvement du Satellite m. Si dans la fonction

$$-\frac{2.(1+m).\delta r^2}{r^3}$$

$$+\frac{\delta r.\partial\partial.\delta r - r^2.(\partial.\delta v)^2 - 4r\,\partial v.\delta r.\partial.\delta v - \partial v^2.\delta r^2}{\partial t^2}$$

que renferme l'expreſſion de $\frac{2\,\partial\,\delta' v}{\partial t}.\sqrt{[(1+m).a.(1-e^2)]}$, on ſubſtitue, au lieu de r & de ∂v, leurs premières valeurs a, & $n\,\partial t$, & au lieu de δr & de δv, leurs premières valeurs approchées,

$$\delta r = a\,H.\ \text{coſ.}\,2\,(n\,t - n'\,t + \varepsilon - \varepsilon')$$

$$\delta v = -\ 2\,H.\ \text{ſin.}\,2\,(n\,t - n'\,t + \varepsilon - \varepsilon'),$$

qui réſultent de l'*art, V;* ſi l'on obſerve de plus, que n eſt à fort peu-près égal à $2\,n'$, on trouvera que la partie conſtante de la fonction précédente ſe réduit à zéro. D'ailleurs, la fonction

$$4.[x.(\frac{\partial R}{\partial x}) + y.(\frac{\partial R}{\partial y}) + z.(\frac{\partial R}{\partial z})]$$

ou $4\,r\,(\frac{\partial R}{\partial r})$ de l'expreſſion de $\frac{2\,\partial.\,\delta' v}{\partial t}$. $\sqrt{[(1+m).a.(1-e^2)]}$, ne renferme point de termes conſtans de l'ordre des carrés & des produits des maſſes perturbatrices & indépendans des excentricités, qui ayent en même temps $(n - 2\,n' + f)^2$ pour diviſeur. En n'ayant donc égard qu'à ces termes, on voit qu'il ne faut point ajouter de conſtante à l'intégrale $\int d\,R$; ainſi, en ne conſidérant que les termes conſtans de l'équation différentielle précédente, & par conſéquent en y ſubſtituant $a^2\,q$, au lieu de $r\,\delta' r$, on aura $N^2\,q - \frac{n^2.\,H^2}{2} = 0$, ce qui donne à très-peu-près $q = \frac{1}{2}.\,H^2$. Cela poſé, l'équation différentielle en $r\,\delta' r$ donnera, en ne conſervant

que les termes dépendans de l'angle $nt + \varepsilon - \varpi$, & en y substituant, au lieu de H, K, & L, leurs valeurs,

$$0 = \frac{\partial^2 (r\,\delta' r)}{a^2 . \partial t^2} + \frac{N^2 . r\,\delta' r}{a^2} - \frac{n^2\, m'\, F\, Q}{2} .$$

$$\text{cos.}\,(nt + \varepsilon - \varpi) + 2\,n^2 a . \int d\,R + n^2 a . r . \left(\frac{\partial R}{\partial r}\right).$$

Il faut maintenant déterminer les termes de $2\,n^2\,a . \int d\,R$, & de $n^2\,a\,.\,r\,.\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)$, qui dépendent de l'angle $nt + \varepsilon - \varpi$; & qui ont pour diviseur $(n - 2\,n' + f)^2$.

Si l'on n'a égard qu'à l'action du second Satellite sur le premier, on a par l'*art.* IV,

$$R = -\frac{m'}{2} . B^{(0)} + m' . \left(\frac{r'}{r^2} - B^{(1)}\right) . \text{cos.}\,(v' - v)$$

$$- m'\,B^{(2)} . \text{cos.}\,2\,(v' - v) - , \&c.$$

En ne considérant que le terme $- m' . B^{(2)} . \text{cos.}\,2\,(v' - v)$, de cette expression, on a

$$d\,R = - m' . \partial r . \left(\frac{\partial B^{(2)}}{\partial r}\right) . \text{cos.}\,2\,(v' - v)$$

$$- 2\,m' . B^{(2)} . \partial v . \text{sin.}\,2\,(v' - v).$$

Cette expression de $d\,R$, contient le terme

$$- 4\,m' . B^{(2)} . n\,\partial t . (\delta v' - \delta v) . \text{cos.}\,2\,(nt - n't + \varepsilon - \varepsilon');$$

Soit Q' le coéfficient de $\text{sin.}\,(nt - 2\,n't + \varepsilon - 2\,\varepsilon' + \varpi)$, dans l'expression de $\delta\,v'$; le terme précédent donnera celui-ci :

$$2\,m' . B^{(2)} . n\,\partial t . (Q' - Q) . \text{sin.}\,(nt + \varepsilon - \varpi);$$

la fonction $2\,n^2\,a . \int d\,R$ renferme donc le terme

$$- 4\,n^2 . m'\,a . B^{(2)} . (Q' - Q) . \text{cos.}\,(nt + \varepsilon - \varpi);$$

On trouvera pareillement que la fonction $n^2\,a\,.\,r\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)$, contient le terme

$$- n^2 . m' . a^2 . \left(\frac{\partial B^{(2)}}{\partial a}\right) . (Q' - Q) . \text{cos.}\,(nt + \varepsilon - \varpi);$$

& l'on s'assurera facilement que ces termes sont les seuls de ce genre, que renferment ces deux fonctions. En les réunissant, la quantité $2\, n^2\, a \cdot \int d\, R + n^2 \,.\, a\, r \,.\, \left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)$ se réduira à celle-ci

$$-m'\, n^2 \,.\, \left[4\, a\, B^{(2)} + a^2 \,.\, \left(\frac{\partial B^{(2)}}{\partial a}\right)\right] . (Q' - Q) \,.\, \text{cos.} (n\, t + \varepsilon - \varpi);$$

or on a très-peu-près par l'*art. V.*

$$F = 4\, a\, B^{(2)} + a^2 \,.\, \left(\frac{\partial B^{(2)}}{\partial a}\right);$$

la quantité précédente se réduira donc à celle-ci

$$-m'\, n^2 \,.\, F \,.\, (Q' - Q) \,.\, \text{cos.} (n\, t + \varepsilon - \varpi);$$

& l'équation différentielle en $r\, \delta'\, r$, deviendra, en n'ayant égard qu'aux termes dépendans de l'angle $n\, t + \varepsilon - \varpi$.

$$0 = \frac{\partial^2 \,.\, (r\, \delta'\, r)}{a^2 \,.\, \partial t^2} + \frac{N^2 \,.\, r\, \delta'\, r}{a^2} - \frac{m' \,.\, n^2 \,.\, F}{2} \,.\, (2\, Q' - Q) \,.\, \text{cos.} (n\, t + \varepsilon - \varpi).$$

Si l'on réunit cette équation à l'équation différentielle en $\frac{r\, \delta'\, r}{a^2}$, que nous avons donnée dans l'*art. VII*, il est facile de voir qu'il suffit pour cela d'ajouter à l'équation de l'*art. cité*, le terme $-\frac{m'\, n^2 \,.\, F}{2} \,.\, (2\, Q' - Q) \,.\, \text{cos.} (n\, t + \varepsilon - \varpi)$; & en suivant l'analyse du même article, on trouvera que ce terme ajoute à l'équation *(i)* de l'*art. VII*, la quantité

$$-\frac{m' \,.\, F \,.\, n\, T}{4} \,.\, (2\, Q' - Q).$$

Considérons présentement le second Satellite. Si l'on désigne par H' le coéfficient de cos. $(n\, t - n'\, t + \varepsilon - \varepsilon')$ dans l'expression de $\frac{r'\, \delta\, r'}{a'^2}$, & qui, par l'*article V*, est égal à

$$\frac{n' \,.\, (m'' \,.\, F - m \,.\, G)}{2 \,.\, (n - 2\, n' + f)},$$

N' étant à fort peu-près égal à $n' - f$; si de plus, on suppose

$$K' = \frac{3h'.H'}{2} - \frac{2}{3}.\frac{(n - 2n' + f)}{n'}.Q';$$

$$L' = -\frac{h'.H'}{2};$$

on trouvera, en appliquant l'analyse précédente au second Satellite, que la partie de $\frac{r'\delta r'}{a'^2}$ qui a pour diviseur $n - 2n' + f$, est

$$H'.\text{cos.}(nt - n't + \varepsilon - \varepsilon') + K'.\text{cos.}(nt - 2n't + \varepsilon - 2\varepsilon' + \varpi) + L'.\text{cos.}(nt + \varepsilon - \varpi).$$

L'équation différentielle en $r'\delta' r'$, est

$$0 = \frac{\partial^2.(r'\delta' r')}{\partial t^2} + \frac{(1+m').r'\delta' r'}{r'^3} + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2.\delta r'^2}{\partial t^2} - \frac{(1+m').\delta r'^2}{r'^3} + 2\int d' R' + r'.\left(\frac{\partial R'}{\partial r'}\right).$$

En ne conservant dans cette équation que les termes dépendans de l'angle $n't + \varepsilon' - \varpi$, on trouvera par l'analyse précédente, qu'elle se réduit à

$$0 = \frac{\partial^2.(r'\delta' r')}{a'^2.\partial t^2} + N'^2.\frac{r'\delta' r'}{a'^2} + \frac{3}{2}.n'^2.H'.(h'H' - K' - L').\text{cos.}(n't + \varepsilon' - \varpi) + 2n'^2 a'.\int d' R' + n'^2 a'.r'.\left(\frac{\partial R'}{\partial r'}\right).$$

En substituant, au lieu de H', K' & L', leurs valeurs, on aura

$$0 = \frac{\partial^2.(r'\delta' r')}{a'^2.\partial t^2} + N'^2.\frac{r'.\delta' r'}{a'^2} + \frac{n'^2}{2}.(m''F' - mG).Q'.\text{cos.}(n't + \varepsilon' - \varpi) + 2n'^2 a'.\int d' R' + n'^2 a'.r'.\left(\frac{\partial R'}{\partial r'}\right).$$

Déterminons maintenant les termes de $2n'^2 a'.\int d' R' + n'^2 a'.r'\left(\frac{\partial R'}{\partial r'}\right)$, qui dépendent de l'angle $n't + \varepsilon' - \varpi$.

Si l'on

Si l'on n'a égard qu'à l'action du premier Satellite sur le second, on aura

$$R' = -\frac{m}{2} \cdot B^{(0)} + m \cdot \left(\frac{r'}{r^2} - B^{(1)}\right) \cdot \text{cos.}(v' - v)$$
$$- m \cdot B^{(2)} \cdot \text{cos.}\, 2\,(v' - v) - \&c.$$

On trouvera facilement que le terme $m \cdot \left(\frac{r'}{r^2} - B^{(1)}\right) \cdot$ cos. $(v' - v)$ de cette expression, produit dans la fonction $2\,n'^2 \cdot a' \cdot \int d'\, R' + n'^2\, a' \cdot r' \cdot \left(\frac{\partial R'}{\partial r'}\right)$, le terme suivant;

$$-\frac{m \cdot n'^2}{2} \cdot G \cdot (Q' - Q) \cdot \text{cos.}(n't + \varepsilon' - \varpi);$$

& il est aisé de se convaincre que ce terme est le seul sensible de ce genre, que produise la partie de R' relative à l'action du premier Satellite.

La partie de R' relative à l'action du troisième Satellite, est

$$-\frac{m''}{2} \cdot B'^{(0)} + m'' \cdot \left(\frac{r'}{r''^2} - B'^{(1)}\right) \cdot \text{cos.}(v'' - v')$$
$$- m'' \cdot B'^{(2)} \cdot \text{cos.}\, 2\,(v'' - v') - \&c.$$

Si l'on désigne par Q'' le coéfficient de sin. $(nt - 2\,n't + \varepsilon - 2\,\varepsilon' + \varpi)$, dans l'expression de $\delta v''$, coéfficient dont nous avons donné la valeur dans l'*article VIII;* & si l'on observe que l'on a

$$2\,n''t - 2n't + 2\varepsilon'' - 2\varepsilon' = 180^d + n't - nt + \varepsilon' + \varepsilon,$$

on trouvera que le terme $- m'' \cdot B'^{(2)} \cdot$ cos. $2\,(v'' - v')$ de l'expression de R', produit dans la fonction

$2\,n'^2\,a' \cdot \int d'\, R' + n'^2\, a' \cdot r' \cdot \left(\frac{\partial R'}{d r'}\right)$, le terme

$$+ n'^2 \cdot m'' \cdot F' \cdot (Q'' - Q') \cdot \text{cos.}\,(n't + \varepsilon' - \varpi);$$

& l'on s'assurera que ce terme est le seul sensible de ce

genre, qui résulte de la valeur de R' relative à l'action du troisième Satellite. L'équation différentielle en $r' \delta' r'$, devient ainsi, en n'ayant égard qu'à ces termes,

$$o = \frac{\partial^2 . (r' \delta' r')}{a'^2 . \partial t^2} + N'^2 . \frac{r' \delta' r'}{a'^2}$$

$$+ \frac{n'^2 . m'' . F'}{2} . (2 Q'' - Q') . \text{cof.} (n' t + \varepsilon' - \varpi)$$

$$- \frac{n'^2 . m . G}{2} . (2 Q' - Q) . \text{cof.} (n' t + \varepsilon' - \varpi).$$

Il est aisé de voir qu'il en résultera dans l'équation (i') de l'*art.* *VII*, les termes

$$\frac{m'' . F'}{4} . n' T . (2 Q'' - Q') - \frac{m . G}{4} . n' T . (2 Q' - Q).$$

Considérons enfin le troisième Satellite. Il est relativement au second, ce que le second est relativement au premier; or nous venons de voir que Q & Q' étant les coéfficiens de fin. $(n t - 2 n' t + \varepsilon - 2 \varepsilon' + \varpi)$ dans les expressions de δv, & de $\delta v'$, l'action du premier Satellite produit dans l'équation (i'), le terme

$$- \frac{m G}{4} . n' T . (2 Q' - Q);$$

les coéfficiens de fin. $(n' t - 2 n'' t + \varepsilon' - 2 \varepsilon'' + \varpi)$, dans les expressions de $\delta v'$ & de $\delta v''$, sont $- Q'$ & $- Q''$; l'action du second Satellite sur le troisième, ajoute donc à l'équation (i'') de l'*art.* *VII*, le terme

$$+ \frac{m' . G'}{4} . n'' T . (2 Q'' - Q').$$

Les équations (i), (i'), (i'') & (i''') du même article, deviendront ainsi

$$\left.\begin{aligned}
0 &= h \,.\, [f - (0) - \boxed{0} - (0,1) - (0,2) - (0,3)] \\
&\quad + \boxed{0,1} \,.\, h' + \boxed{0,2} \,.\, h'' + \boxed{0,3} \,.\, h''' \\
&\quad - \frac{m' \,.\, F \,.\, n\, T}{4} \,.\, (2\, Q' - Q) \\
0 &= h' \,.\, [f - (1) - \boxed{1} - (1,0) - (1,2) - (1,3)] \\
&\quad + \boxed{1,0} \,.\, h + \boxed{1,2} \,.\, h'' + \boxed{1,3} \,.\, h''' \\
&\quad + \frac{m'' \,.\, F' \,.\, n' T}{4} \,.\, (2\, Q'' - Q') - \frac{m\, G \,.\, n' T}{4} \,.\, (2\, Q' - Q) \\
0 &= h'' \,.\, [f - (2) - \boxed{2} - (2,0) - (2,1) - (2,3)] \\
&\quad + \boxed{2,0} \,.\, h + \boxed{2,1} \,.\, h' + \boxed{2,3} \,.\, h''' \\
&\quad + \frac{m'\, G' \,.\, n''\, T}{4} \,.\, (2\, Q'' - Q') \,. \\
0 &= h''' \,.\, [f - (3) - \boxed{3} - (3,0) - (3,1) - (3,2)] \\
&\quad + \boxed{3,0} \,.\, h + \boxed{3,1} \,.\, h' + \boxed{3,2} \,.\, h'' \,.
\end{aligned}\right\} ; (I)$$

On pourroit croire que les équations *(k)*, *(k')*, *(k'')* & *(k''')* de l'*art. X*, & qui sont relatives aux inclinaisons & aux nœuds des orbites, peuvent, en vertu des considérations précédentes, acquérir quelques termes sensibles dépendant des carrés & des produits des forces perturbatrices; mais il est facile de s'assurer que cela n'est pas, par la seule inspection de l'équation différentielle en z de l'*art. II.*

XVI.

En considérant avec attention la valeur de $\frac{\partial\, \delta' v}{\partial\, t}$ donnée dans l'*article XIII*, on voit qu'elle renferme des termes dépendant des produits des excentricités & des

inclinaiſons des orbites, & qui ont pour argumens les différences de longitude, des aphélies & des nœuds. Ces termes augmentent conſidérablement par les intégrations; mais je me ſuis aſſuré qu'ils reſtent toujours inſenſibles, à cauſe de la petiteſſe des maſſes des Satellites, des excentricités & des inclinaiſons reſpectives de leurs orbites: je ſupprime par cette raiſon l'analyſe par laquelle on peut les déterminer. La théorie précédente embraſſe donc toutes les inégalités ſenſibles des Satellites de Jupiter, qui dépendent de leur action mutuelle, & des actions de Jupiter & du Soleil. Quant à l'action directe des planètes ſur les Satellites, on conçoit aiſément qu'elle doit être inſenſible, & que nous pouvons la négliger ſans crainte. Il nous reſte maintenant à réduire en nombres, les formules précédentes, & à les comparer enſuite aux obſervations.

XVII.

Valeurs numériques des inégalités des Satellites.

POUR réduire en nombres les inégalités déterminées ci-deſſus, il faut connoître les temps de la révolution des Satellites, & leurs moyennes diſtances au centre de Jupiter. Suivant les tables, les durées des révolutions périodiques des Satellites réduites en ſecondes, ſont

I. Sat. 152853″; II. Sat. 306822″;
III. Sat. 618153″; IV. Sat. 1441928″.

Ces durées ont beſoin de quelques corrections, mais ces corrections ſont extrêmement petites, & n'influent point ſenſiblement ſur les réſultats numériques ſuivans; les valeurs de n, n', n'', n''', étant réciproques aux durées précédentes, on aura

$$n' = n \cdot 0{,}4981813; \quad n'' = n \cdot 0{,}2472737;$$
$$n''' = n \cdot 0{,}1060060.$$

Pour déterminer les moyennes diſtances a, a', a'' & a''', nous obſerverons que la plus grande élongation du quatrième Satellite à Jupiter, réduite à la moyenne diſtance de Jupiter au Soleil, a été obſervée par Pound, de 8′ 16″; en ſuppoſant donc de 39″, le demi-diamètre de l'équateur de Jupiter vu à la moyenne diſtance de cette planète au Soleil, & en prenant pour unité ce demi-diamètre, on aura

$$a''' = 25{,}436.$$

Il peut y avoir ſur ce rapport de a''' au demi-diamètre de Jupiter, quelque incertitude qui tient principalement à l'évaluation du diamètre de Jupiter, mais elle ne peut influer ſenſiblement ſur nos calculs; il en réſulte ſeulement que l'unité dont nous faiſons uſage, ne repréſente point exactement le demi-diamètre de Jupiter.

Quant aux diſtances a, a' & a'', il eſt beaucoup plus exact de les déduire de la valeur de a''', par les loix de Kepler, que de les tirer immédiatement des obſervations; ainſi nous préférerons ce moyen, d'autant plus que nous voulons établir la théorie des Satellites ſur le principe ſeul de la peſanteur univerſelle, & n'emprunter de l'obſervation que ce qui eſt indiſpenſable. Suivant ces loix, la moyenne diſtance a, du premier Satellite au centre de Jupiter, eſt $a''' . \sqrt[3]{\left(\frac{n'''^2}{n^2}\right)}$; mais cette expreſſion n'eſt pas rigoureuſe, parce que les forces pertubatrices du mouvement des Satellites troublent un peu les loix de Kepler. En n'ayant égard qu'à la plus conſidérable de ces forces, qui dépend de l'éllipticité du globe de Jupiter, on trouve par l'*article III*, que les forces centrales des Satellites m & m''' ſont $\frac{1}{a^2} . \left(1 + \frac{(\rho - \frac{1}{2}\varphi)}{a^2}\right)$ & $\frac{1}{a'''^2} . \left(1 + \frac{(\rho - \frac{1}{2}\varphi)}{a'''^2}\right)$. Ces forces ſont entre elles comme les carrés des vîteſſes des Satellites diviſées par leurs

moyennes distances à Jupiter; elles sont par conséquent dans le rapport des quantités $a \,.\, n^2$ & $a''' \,.\, n'''^2$, d'où l'on tire à très-peu-près,

$$a = a''' \,.\, \sqrt[3]{\left(\frac{n'''^2}{n^2}\right)} \,.\, \left[1 + \frac{1}{3} \,.\, \left(\rho - \frac{1}{2}\varphi\right) \,.\, \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a'''^2}\right)\right].$$

On trouvera, au moyen des valeurs que nous donnerons ci-après, que la quantité $\frac{1}{3}\left(\rho - \frac{1}{2}\varphi\right) \,.\, \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a'''^2}\right)$ est une fraction très-petite & au-dessous de $\frac{1}{5000}$; nous pouvons donc la négliger, & supposer conformément aux loix de Kepler,

$$a = a''' \,.\, \sqrt[3]{\left(\frac{n'''^2}{n^2}\right)}.$$

Ces loix sont encore plus approchées relativement au second & au troisième Satellite, sur lesquels l'ellipticité de Jupiter influe moins que sur le premier. Cela posé, on trouve, en partant de ces loix,

$$a = 5{,}697300; \quad a' = 9{,}065898; \quad a'' = 14{,}461628;$$
$$a''' = 25{,}436000.$$

En comparant ensuite les quatre Satellites, deux à deux; on trouvera, au moyen de ces valeurs & des formules de l'*article VI*, les résultats suivans.

I.er & II.e Satellites.

$$\alpha = 0{,}6284320;$$

$$b_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = 2{,}2029114; \qquad b_{-\frac{1}{2}}^{(1)} = -0{,}5956469;$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(0)} = 2{,}258752; \qquad b_{\frac{1}{2}}^{(1)} = 0{,}754162;$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(2)} = 0{,}363089; \qquad b_{\frac{1}{2}}^{(3)} = 0{,}192260;$$

$$b_{\frac{1}{2}}^{(4)} = 0{,}106444;$$

$\frac{\partial b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{\partial \alpha} = 1{,}099553$; $\frac{\partial b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{\partial \alpha} = 1{,}749676$;

$\frac{\partial b^{(2)}_{\frac{1}{2}}}{\partial \alpha} = 1{,}452337$; $\frac{\partial b^{(3)}_{\frac{1}{2}}}{\partial \alpha} = 1{,}084149$.

I.er & III.e Satellites.

$\alpha = 0{,}3939598$;

$b^{(0)}_{-\frac{1}{2}} = 2{,}0783860$; $b^{(1)}_{-\frac{1}{2}} = -0{,}3861608$;

$b^{(0)}_{\frac{1}{2}} = 2{,}085204$; $b^{(1)}_{\frac{1}{2}} = 0{,}419399$;

$b^{(2)}_{\frac{1}{2}} = 0{,}124798$; $b^{(3)}_{\frac{1}{2}} = 0{,}041116$;

$b^{(4)}_{\frac{1}{2}} = 0{,}014200$;

$\frac{\partial b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{\partial \alpha} = 0{,}475958$; $\frac{\partial b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{\partial \alpha} = 1{,}208140$;

$\frac{\partial b^{(2)}_{\frac{1}{2}}}{\partial \alpha} = 0{,}681198$; $\frac{\partial b^{(3)}_{\frac{1}{2}}}{\partial \alpha} = 0{,}329654$.

I.er & IV.e Satellites.

$\alpha = 0{,}2239857$.

$b^{(0)}_{-\frac{1}{2}} = 2{,}02516446$; $b^{(1)}_{-\frac{1}{2}} = -0{,}2225721$;

$b^{(0)}_{\frac{1}{2}} = 2{,}025818$; $b^{(1)}_{\frac{1}{2}} = 0{,}228337$;

$b^{(2)}_{\frac{1}{2}} = 0{,}038441$; $b^{(3)}_{\frac{1}{2}} = 0{,}007184$;

$b^{(4)}_{\frac{1}{2}} = 0{,}001413$;

$\frac{\partial b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{\partial \alpha} = 0{,}237323$; $\frac{\partial b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{\partial \alpha} = 1{,}059549$;

$\frac{\partial b^{(2)}_{\frac{1}{2}}}{\partial \alpha} = 0{,}350753$; $\frac{\partial b^{(3)}_{\frac{1}{2}}}{\partial \alpha} = 0{,}097666$.

II.e & III.e Satellites.

$\alpha = 0{,}6268933$;

$b^{(0)}_{-\frac{1}{2}} = 2{,}20188916$; $b^{(1)}_{-\frac{1}{2}} = -0{,}5943582$;

$b^{(0)}_{\frac{1}{2}} = 2{,}257063$; $b^{(1)}_{\frac{1}{2}} = 0{,}751475$;

$b^{(2)}_{\frac{1}{2}} = 0{,}360861$; $b^{(3)}_{\frac{1}{2}} = 0{,}190599$;

$b^{(4)}_{\frac{1}{2}} = 0{,}105262$;

$\frac{\partial b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{\partial \alpha} = 1{,}093010$; $\frac{\partial b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{\partial \alpha} = 1{,}743536$;

$\frac{\partial b^{(2)}_{\frac{1}{2}}}{\partial \alpha} = 1{,}444696$; $\frac{\partial b^{(3)}_{\frac{1}{2}}}{\partial \alpha} = 1{,}076135$.

II.e & IV.e Satellites.

$\alpha = 0{,}3564199$;

$b^{(0)}_{-\frac{1}{2}} = 2{,}06403876$; $b^{(0)}_{-\frac{1}{2}} = -0{,}3506665$;

$b^{(0)}_{\frac{1}{2}} = 2{,}068500$; $b^{(1)}_{\frac{1}{2}} = 0{,}374886$;

$b^{(2)}_{\frac{1}{2}} = 0{,}100785$; $b^{(3)}_{\frac{1}{2}} = 0{,}030021$;

$b^{(4)}_{\frac{1}{2}} = 0{,}009380$;

$\frac{\partial b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{\partial \alpha} = 0{,}415101$; $\frac{\partial b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{\partial \alpha} = 1{,}164639$;

$\frac{\partial b^{(2)}_{\frac{1}{2}}}{\partial \alpha} = 0{,}599337$; $\frac{\partial b^{(3)}_{\frac{1}{2}}}{\partial \alpha} = 0{,}263273$;

III.e

III.ᵉ & IV.ᵉ Satellites.

$$\alpha = 0,5685496;$$

$b^{(0)}_{-\frac{1}{2}} = 2,16519332;$ $b^{(1)}_{-\frac{1}{2}} = -0,5445387;$

$b^{(0)}_{\frac{1}{2}} = 2,199830;$ $b^{(1)}_{\frac{1}{2}} = 0,655817;$

$b^{(2)}_{\frac{1}{2}} = 0,284293;$ $b^{(3)}_{\frac{1}{2}} = 0,135844;$

$b^{(4)}_{\frac{1}{2}} = 0,067933;$

$\frac{\partial b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{\partial \alpha} = 0,879045;$ $\frac{\partial b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{\partial \alpha} = 1,546124;$

$\frac{\partial b^{(2)}_{\frac{1}{2}}}{\partial \alpha} = 1,190611;$ $\frac{\partial b^{(3)}_{\frac{1}{2}}}{\partial 2} = 0,812999.$

XVIII.

Au moyen de ces valeurs & des formules de l'*art. IV*, j'ai trouvé les expreſſions ſuivantes des perturbations réciproques des Satellites, dans leſquelles les maſſes m, m', m'' & m''' ſont rendues dix mille fois plus grandes.

I.ᵉʳ Satellite.

$$\begin{aligned}\delta r = & \; m' . 0,000465995 . \text{coſ.} (nt - n't + \varepsilon - \varepsilon') \\ & - m' . 0,09958077 . \text{coſ.} 2 (nt - n't + \varepsilon - \varepsilon') \\ & - m' . 0,000408870 . \text{coſ.} 3 . (nt - n't + \varepsilon - \varepsilon').\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta v = & - m' . 60'',687 . \text{ſin.} (nt - n't + \varepsilon - \varepsilon') \\ & + m' . 7185'',05 . \text{ſin.} 2 (nt - n't + \varepsilon - \varepsilon') \\ & + m' . 22'',9407 . \text{ſin.} 3 (nt - n't + \varepsilon - \varepsilon').\end{aligned}$$

IIe Satellite.

$$\begin{aligned}
\delta r' = {} & m \,.\, 0{,}05128288 \,.\, \text{cof.}\ (nt - n't + \varepsilon - \varepsilon') \\
& + m \,.\, 0{,}0005917397 \,.\, \text{cof.}\, 2\, (nt - n't + \varepsilon - \varepsilon') \\
& + m \,.\, 0{,}0001399405 \,.\, \text{cof.}\, 3 \,.\, (nt - n't + \varepsilon - \varepsilon') \\
& + m'' \,.\, 0{,}0007321374 \,.\, \text{cof.}\ (n't - n''t + \varepsilon' - \varepsilon'') \\
& - m'' \,.\, 0{,}0879380 \,.\, \text{cof.}\, 2\, (n't - n''t + \varepsilon' - \varepsilon'') \\
& - m'' \,.\, 0{,}0006339091 \,.\, \text{cof.}\, 3 \,.\, (n't - n''t + \varepsilon' - \varepsilon'').
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta v' = {} & - m \,.\, 2279'',40 \,.\, \text{fin.}\ (nt - n't + \varepsilon - \varepsilon') \\
& - m \,.\, 17'',0497 \,.\, \text{fin.}\, 2\, (nt - n't + \varepsilon - \varepsilon') \\
& - m \,.\, 3'',4090 \,.\, \text{fin.}\, 3\, (nt - n't + \varepsilon - \varepsilon') \\
& - m'' \,.\, 59'',766 \,.\, \text{fin.}\ (n't - n''t + \varepsilon' - \varepsilon'') \\
& + m'' \,.\, 3979'',83 \,.\, \text{fin.}\, 2\, (n't - n''t + \varepsilon' - \varepsilon'') \\
& + m'' \,.\, 22'',321 \,.\, \text{fin.}\, 3 \,.\, (n't - n''t + \varepsilon' - \varepsilon'').
\end{aligned}$$

IIIe Satellite.

$$\begin{aligned}
\delta r'' = {} & m' \,.\, 0{,}0414925 \,.\, \text{cof.}\ (n't - n''t + \varepsilon' - \varepsilon'') \\
& + m' \,.\, 0{,}000917144 \,.\, \text{cof.}\, 2\, (n't - n''t + \varepsilon' - \varepsilon'') \\
& + m' \,.\, 0{,}000217082 \,.\, \text{cof.}\, 3 \,.\, (n't - n''t + \varepsilon' - \varepsilon'') \\
& + m''' \,.\, 0{,}0007521007 \,.\, \text{cof.}\ (n''t - n'''t + \varepsilon'' - \varepsilon''') \\
& - m''' \,.\, 0{,}00449712 \,.\, \text{cof.}\, 2\, (n''t - n'''t + \varepsilon'' - \varepsilon''') \\
& - m''' \,.\, 0{,}00039794 \,.\, \text{cof.}\, 3 \,.\, (n''t - n'''t + \varepsilon'' - \varepsilon''').
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta v'' = {} & - m' \,.\, 1130'',33 \,.\, \text{fin.}\ (n't - n''t + \varepsilon' - \varepsilon'') \\
& - m' \,.\, 16'',5039 \,.\, \text{fin.}\, 2\, (n't - n''t + \varepsilon' - \varepsilon'') \\
& - m' \,.\, 3'',3067 \,.\, \text{fin.}\, 3 \,.\, (n't - n''t + \varepsilon' - \varepsilon'') \\
& - m''' \,.\, 34'',4108 \,.\, \text{fin.}\ (n''t - n'''t + \varepsilon'' - \varepsilon''') \\
& + m''' \,.\, 117'',360 \,.\, \text{fin.}\, 2\, (n''t - n'''t + \varepsilon'' - \varepsilon''') \\
& + m''' \,.\, 8'',24894'' \,.\, \text{fin.}\, 3\, (n''t - n'''t + \varepsilon'' - \varepsilon''').
\end{aligned}$$

IV.e Satellite.

$$\delta r'' = m''.\,0{,}00317919.\ \text{coſ.}\ (n''t - n'''t + \varepsilon'' - \varepsilon''')$$
$$+ m''.\,0{,}0005783\,64.\ \text{coſ.}\,2\ (n''t - n'''t + \varepsilon'' - \varepsilon''')$$
$$+ m''.\,0{,}000136139.\ \text{coſ.}\,3.\,(n''t - n'''t + \varepsilon'' - \varepsilon''').$$

$$\delta v''' = - m''.\,10'',375.\ \text{ſin.}\ (n''t - n'''t + \varepsilon'' - \varepsilon''')$$
$$- m''.\,5'',170.\ \text{ſin.}\,2.\,(n''t - n'''t + \varepsilon'' - \varepsilon''')$$
$$- m''.\,1'',078.\ \text{ſin.}\,3.\,(n''t - n'''t + \varepsilon'' - \varepsilon''').$$

Je ne donne ici que les inégalités produites par l'action des Satellites voiſins, & je néglige les inégalités produites par les actions réciproques du premier & du troiſième, du premier & du quatrième, enfin du ſecond & du quatrième. Il eſt facile de déterminer toutes ces inégalités par ce qui précède; mais je me ſuis aſſuré qu'elles ſont inſenſibles, & qu'elles ne feroient que compliquer les Tables, ſans leur donner plus de préciſion.

Pour avoir les réſultats précédens, il étoit néceſſaire de connoître d'une manière approchée, la valeur de $\rho - \frac{1}{2}\varphi$, qui entre dans les expreſſions de N, N', N'' & N'''. J'ai ſuppoſé

$$\rho - \tfrac{1}{2}\varphi = 0{,}0194222;$$

on verra ci-après, que cette valeur eſt ſuffiſamment approchée pour que l'erreur dont elle eſt ſuſceptible n'ait aucune influence ſenſible ſur les déterminations précédentes.

Les inégalités des ſatellites de Jupiter, dépendantes de leur élongation mutuelle, ont été déjà déterminées par pluſieurs Géomètres, & ſpécialement par M.rs Bailly & de la Grange. Leurs réſultats diffèrent un peu des précédens, ce qui tient en partie à ce qu'ils ont employé pour a, a', a'' & a''', les valeurs que M. de Caſſini a trouvées par les meſures directes des diſtances des Satellites

au centre de Jupiter, & ſur-tout à ce qu'ils n'ont point eu égard à la différence des valeurs de N, N', N'' & N''', aux quantités correſpondantes n, n', n'' & n'''; cette différence eſt fort ſenſible dans les inégalités des deux premiers Satellites, comme nous l'avons obſervé dans l'*art. V.* En faiſant aux réſultats de M. Bailly, les corrections dues à cette différence, ils ſe rapprochent beaucoup des réſultats précédens que j'ai calculés avec ſoin, & de l'exactitude deſquels je crois pouvoir répondre.

X I X.

CONSIDÉRONS maintenant les inégalités dépendantes des excentricités des orbites. Les inégalités de δv, $\delta v'$, & $\delta v''$, dépendantes de l'angle

$$nt - 2n't + \varepsilon - 2\varepsilon' + ft + \Gamma,$$

ſont par l'*art. XV*,

$$\delta v = Q \,.\, \text{ſin.}\,(nt - 2n't + \varepsilon - 2\varepsilon' + ft + \Gamma);$$

$$\delta v' = Q' \,.\, \text{ſin.}\,(nt - 2n't + \varepsilon - 2\varepsilon' + ft + \Gamma);$$

$$\delta v'' = Q'' \,.\, \text{ſin.}\,(nt - 2n't + \varepsilon - 2\varepsilon' + ft + \Gamma).$$

Nous avons donné dans l'*article VIII*, les expreſſions de Q, Q' & Q''; elles dépendent des valeurs de F, G, F' & G'; or on a par l'*article V*,

$$F = a^2 \,.\, \left(\frac{\partial B^{(2)}}{\partial a}\right) + \frac{2n}{n - n'} \,.\, aB^{(2)}$$

$$G = a'^2 \,.\, \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial a'}\right) - \frac{a'^2}{a^2} - \frac{2n'}{n - n'} \,.\, \left(a' \,.\, B^{(1)} - \frac{a'^2}{a^2}\right);$$

d'où l'on tire par l'*article VI*,

$$F = \alpha^2 \,.\, \frac{\partial b_{\frac{1}{2}}^{(2)}}{\partial \alpha} - \frac{2n}{n - n'} \,.\, \alpha b_{\frac{1}{2}}^{(2)};$$

$$G = -\alpha \,.\, \frac{\partial b_{\frac{1}{2}}^{(1)}}{\partial \alpha} - \left(\frac{n + n'}{n - n'}\right) \,.\, b_{\frac{1}{2}}^{(1)} + \frac{3n' - n}{(n - n') \,.\, \alpha^2};$$

en substituant donc pour α, $b^{(1)}_{\frac{1}{2}}$, $b^{(2)}_{\frac{1}{2}}$, $\frac{\partial b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{\partial \alpha}$ & $\frac{\partial b^{(2)}_{\frac{1}{2}}}{\partial \alpha}$, leurs valeurs numériques trouvées ci-dessus, on aura

$$F = 1,482966; \quad G = -0,855700.$$

On trouvera de la même manière,

$$F' = 1,466091; \quad G' = -0,8548145.$$

Au moyen de ces valeurs & des formules de l'*art. VIII*, on aura

$$Q = -m' \cdot \frac{(16,8128 \cdot h - 6,09662 \cdot h')}{\left(1 + \frac{f}{973254''}\right)^2};$$

$$Q' = m \cdot \frac{(13,2797 \cdot h - 4,81543 \cdot h')}{\left(1 + \frac{f}{973254''}\right)^2}$$

$$+ m'' \cdot \frac{(4,12520 \cdot h' - 1,50782 \cdot h'')}{\left(1 + \frac{f}{973254''}\right)^2};$$

$$Q'' = -m' \cdot \frac{(3,24237 \cdot h' - 1,18513 \cdot h'')}{\left(1 + \frac{f}{973254''}\right)^2}.$$

On déterminera les quantités f, h, h', h'', h''', au moyen des équations *(I)* de l'*art. XV*. Pour cela, nous observerons que la plupart des Astronomes supposent $\rho = \frac{1}{14}$; en faisant ensuite $\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{25}$, on aura $\rho - \frac{1}{2}\varphi = \frac{11}{350}$; mais vu l'incertitude qui peut exister sur cette valeur, nous supposerons

$$\rho - \frac{1}{2}\varphi = \frac{11 \cdot \mu}{350};$$

μ étant une indéterminée que nous déterminerons dans la suite. Cela posé, on aura par les formules de l'*art. VII*,

$$(0) = 259072'',62 \cdot \mu; \quad (1) = 50971'',27 \cdot \mu;$$
$$(2) = 9942'',67 \cdot \mu; \quad (3) = 1377'',82 \cdot \mu.$$

On aura ensuite ;

$$\overline{\underline{|0|}} = 33'',46 ; \quad \overline{\underline{|1|}} = 67'',16 ; \quad \overline{\underline{|2|}} = 135'',31 ;$$

$$\overline{\underline{|3|}} = 315'',64 .$$

On trouvera encore,

$$(0,1) = 12893'',96 . m' ; \quad (0,2) = 1685'',25 . m'' ;$$

$$(0,3) = 248'',38 . m''' .$$

$$(1,0) = 10221'',52 . m ; \quad (1,2) = 6337'',75 . m'' ;$$

$$(1,3) = 584'',40 . m''' .$$

$$(2,0) = 1057'',77 . m ; \quad (2,1) = 5018'',01 . m' ;$$

$$(2,3) = 1907'',14 . m''' .$$

$$(3,0) = 117'',55 . m ; \quad (3,1) = 348'',89 . m' ;$$

$$(3,2) = 1438'',02 . m'' .$$

Enfin, on aura,

$$\overline{\underline{|0,1|}} = 9554'',90 . m' ; \quad \overline{\underline{|0,2|}} = 812'',96 . m'' ;$$

$$\overline{\underline{|0,3|}} = 69'',10 . m''' .$$

$$\overline{\underline{|1,0|}} = 7574'',52 . m ; \quad \overline{\underline{|1,2|}} = 4686'',58 . m'' ;$$

$$\overline{\underline{|1,3|}} = 256'',06 . m''' .$$

$$\overline{\underline{|2,0|}} = 510'',26 . m ; \quad \overline{\underline{|2,1|}} = 3710'',67 . m' ;$$

$$\overline{\underline{|2,3|}} = 1294'',22 . m''' .$$

$$\overline{\underline{|3,0|}} = 32'',70 . m ; \quad \overline{\underline{|3,1|}} = 152'',87 . m' ;$$

$$\overline{\underline{|3,2|}} = 975'',87 . m'' .$$

Les équations *(I)* de l'*art. XV* deviendront ainsi,

$$0 = h.(f - 259072'',62.\mu - 33'',46 - 12893'',96.m' - 1685'',25.m'' - 248'',38.m''')$$
$$+ 9554'',90.m'h' + 812'',96.m''h'' + 69'',10.m'''h'''$$
$$- m'h.\frac{(263465''.m + 166781''.m')}{(1 + \frac{f}{973254''})^2}$$
$$+ m'h'.\frac{(95537''.m + 60478''.m' - 81843''.m'')}{(1 + \frac{f}{973254''})^2} \quad ;(Q)$$
$$+ \frac{29915''.m'm''.h''}{(1 + \frac{f}{973254''})^2};$$

$$0 = h'.(f - 50971'',27.\mu - 67'',16 - 10221'',52.m - 6337'',75.m'' - 584'',40.m''')$$
$$+ 7574'',52.mh + 4686'',58.m''h'' + 256'',06.m'''.h'''$$
$$+ mh.\frac{(75736''.m + 47943''.m' - 64880''.m'')}{(1 + \frac{f}{973254''})^2}$$
$$- h'.\frac{(27463''.m^2 + 17385''.m.m' - 47054''.mm'' + 31682''.m'.m'' + 20154''.m''^2)}{(1 + \frac{f}{973254''})^2}$$
$$+ m''.h''.\frac{(-8599'',3.m + 11580''.m' + 7366'',7.m'')}{(1 + \frac{f}{973254''})^2};$$

$$0 = h''.(f - 9942'',67.\mu - 135'',31 - 1057'',77.m - 5018'',01.m' - 1907'',14.m''')$$
$$+ 510'',26.mh + 3710'',67.m'h' + 1294'',22.m'''h'''$$
$$+ \frac{18777''.m.m'.h}{(1 + \frac{f}{973254''})^2} - m'h'.\frac{(6808'',6.m - 9168'',9.m' - 5832'',7.m'')}{(1 + \frac{f}{973254''})^2}$$

$$- m' h'' . \frac{(3351'',4 . m' + 2131'',9 . m'')}{(1 + \frac{f}{973254''})^2} .$$

$$0 = h''' . (f - 1377'',82 . \mu - 315'',64 - 117'',55 . m - 348'',89 . m' - 1438'',02 . m'') + 32'',70 . m h + 152'',87 . m' h' + 975'',87 . m'' h''.$$

Lorſque les maſſes m, m', m'', m''', & la quantité μ; ſeront connues ; on aura, en réſolvant ces équations, quatre valeurs de f, & les rapports correſpondans des indéterminées h, h', h'', h''', à l'une de ces indéterminées qui ſera arbitraire. Ces quatre ſyſtèmes de f, h, h', h'', h''', donneront autant de valeurs pour Q, Q' & Q''.

X X.

Les inégalités des Satellites dépendantes de l'action du Soleil, ont été déterminées dans l'*article IX*. L'expreſſion de δv, trouvée dans cet article, renferme d'abord le terme

$$\frac{11 . M^2}{8 n^2} . \text{ſin.} (2 n t - 2 M t + 2 \varepsilon - 2 A).$$

La fraction $\frac{M}{n}$ eſt égale au quotient de la durée de la révolution ſidérale du Satellite, diviſée par la durée de la révolution ſidérale de Jupiter. Dans les Mémoires de l'Académie pour l'année 1786, j'ai trouvé le moyen mouvement ſidéral de Jupiter, égal à 109181'',5 dans l'intervalle de 365 jours; ce qui donne 8,5732625 pour le logarithme de la durée de ſa révolution ſidérale, réduite en ſecondes. Au moyen de cette valeur & des durées des révolutions ſidérales des quatre Satellites, que nous avons données dans l'*article XVII*, on déterminera le coéfficient $\frac{11 . M^2}{8 n^2}$, que l'on réduira en ſecondes, en le multipliant par le rayon du cercle, réduit en arc, ou par 57^d 17' 44'',8 ; on trouvera ainſi

I. Sat.

I. Sat. $\frac{11 . M^2}{8 n^2}$ = 0″,04729; II. Sat. = 0″,19054;

III. Sat. = 0″,77338; IV. Sat. = 4″,20814.

L'expreſſion de δv de l'*article IX* contient encore le terme

$$\frac{-9 M^2 . h}{n . (2 M + N - n - f)} . \text{ſin.} (nt - 2 Mt + ft + \varepsilon - 2 A + \Gamma);$$

Ce terme n'eſt ſenſible que pour le troiſième & le quatrième Satellite, & l'on peut y ſuppoſer $n - f = N$; ce qui le réduit au ſuivant,

$$\frac{-9 M}{2 n} . h . \text{ſin.} (nt - 2 Mt + ft + \varepsilon - 2 A + \Gamma);$$

on a enſuite

I. Sat. $\frac{9 M}{2 n}$ = 0,0018375; II. Sat. = 0,0036884;

III. Sat. = 0,0074310; IV. Sat. = 0,017334.

Enfin l'expreſſion de δv de l'*article IX*, contient le terme

$$\frac{3 M}{n} . E . \text{ſin.} (Mt + A - B).$$

Nous avons vu dans l'*article XIV*, que relativement aux trois premiers Satellites, ce terme eſt modifié par leur mouvement de libration, & nous avons déterminé ce qu'il devient pour chacun d'eux. Cela poſé, ſi l'on fait uſage de la valeur de E, que j'ai trouvée dans nos Mémoires pour l'année 1786, égale à 0,0480767 pour le commencement de 1750, on aura les expreſſions ſuivantes de l'inégalité des Satellites, dépendante de l'angle $Mt + A - B$.

I. Sat. 12″,148 . $\left(1 + \frac{3 b k . n'^2}{M^2 - k n'^2}\right)$. ſin. $(Mt + A - B)$;

II. Sat. 24″,384 . $\left(1 - \frac{9 a' m . b k . n'^2}{8 . a m' . (M^2 - k n'^2)}\right)$. ſin. $(Mt + A - B)$;

III. Sat. $49'',126 . \left(1 + \frac{3a''m . bk . n'^2}{32 . am'' . (M^2 - kn'^2)}\right) . \text{ſin.} (Mt + A - B)$;

IV. Sat, $114'',594 . \text{ſin.} (Mt + A - B)$.

Ces inégalités varient avec l'excentricité de l'orbite de Jupiter ; mais ces variations ſont inſenſibles dans l'intervalle d'un ou deux ſiècles.

XXI.

DÉTERMINONS les inégalités du mouvement des Satellites en latitude. Les équations (L) de l'*article X*, deviennent

$$\left.\begin{array}{l}
0 = v . (259072'',62 . \mu + 33'',46 + 12893'',96 . m' + 1685'',25 . m'' + 248'',38 . m''') \\
\quad - 12893'',96 . m' . v' - 1685'',25 . m'' v'' - 248'',38 . m''' . v''' . - 33'',46 ; \\
0 = v' . (50971'',27 . \mu + 67'',16 + 10221'',52 . m + 6337'',75 . m'' + 584'',40 . m''') \\
\quad - 10221'',52 . m v - 6337'',75 . m'' v'' - 584'',40 . m''' v''' - 67'',16 ; \\
0 = v'' . (9942'',67 . \mu + 135'',31 + 1057'',77 . m + 5018'',01 . m' + 1907'',14 . m''') \\
\quad - 1057'',77 . m v - 5018'',01 . m' v' - 1907'',14 . m''' v''' - 135'',31 . \\
0 = v''' . (1377'',82 . \mu + 315'',64 + 117'',55 . m + 348'',89 . m' + 1438'',02 . m'') \\
\quad - 117'',55 . m v - 348'',89 . m' v' - 1438'',02 . m'' v'' - 315'',64 .
\end{array}\right\} ; (L')$$

Les équations (k), (k'), (k'') & (k''') de l'*art. X*, deviennent

$$\left.\begin{array}{l}
0 = l . (q - 259072'',62 . \mu - 33''46 - 12893'',96 . m' - 1685'',25 . m'' - 248'',38 . m''') \\
\quad + 12893'',96 . m' . l' + 1685'',25 . m'' . l'' + 248'',38 . m''' . l''' ; \\
0 = l' . (q - 50971'',27 . \mu - 67'',16 - 10221'',52 . m - 6337'',75 . m'' - 584'',40 . m''') \\
\quad + 10221'',52 . m . l + 6337'',75 . m'' . l'' + 584'',40 . m''' . l''' ; \\
0 = l'' . (q - 9942'',67 . \mu - 135'',31 - 1057'',77 . m - 5018'',01 . m' - 1907'',14 . m''') \\
\quad + 1057'',77 . m . l + 5018'',01 . m' . l' + 1907'',14 . m''' . l''' ; \\
0 = l''' . (q - 1377'',82 . \mu - 315'',64 - 117'',55 . m - 348'',89 . m' - 1438'',02 . m'') \\
\quad + 117'',55 . m . l + 348'',89 . m' . l' + 1438'',02 . m'' . l'' .
\end{array}\right\} ; (M')$$

Lorſque les maſſes m, m', m'', & m''' ſeront connues, on aura, au moyen des équations (L'), les valeurs de v, v', v'' & v'''. Si l'on ne conſidère que la partie de la latitude des Satellites, qui dépend de l'inclinaiſon ψ de l'équateur de Jupiter ſur ſon orbite, on aura par l'*art. X*,

$$s = (1 - v) . \Psi . \text{fin.} (nt + \varepsilon - I);$$
$$s' = (1 - v') . \Psi . \text{fin.} (n't + \varepsilon' - I);$$
$$s'' = (1 - v'') . \Psi . \text{fin.} (n''t + \varepsilon'' - I);$$
$$s''' = (1 - v''') . \Psi . \text{fin.} (n'''t + \varepsilon''' - I).$$

Ces valeurs de s, s', s'', s''', ſont les mêmes que ſi les Satellites m. m', m'' & m''', étoient mûes ſur des plans ſitués entre l'orbite & l'équateur de Jupiter, paſſant par l'interſection commune de ces deux derniers plans, & reſpectivement inclinés à l'équateur de Jupiter, des quantités $v . \Psi$, $v' . \Psi$, $v'' . \Psi$ & $v''' . \Psi$. On peut donc concevoir les orbites des Satellites comme étant mûes ſur ces plans qui dans les variations de l'orbite & de l'équateur de Jupiter, paſſent conſtamment par leur commune interſection, & dont les inclinaiſons ſur l'équateur ſont toujours proportionnelles à l'inclinaiſon de l'équateur ſur l'orbite de Jupiter.

Les équations (M') donnent quatre valeurs différentes pour q; de plus, elles déterminent les rapports correſpondans des indéterminées l, l', l'', & l''' à l'une de ces indéterminées qui reſte arbitraire. De ces valeurs de q, dépendent les mouvemens des orbites des Satellites, ſur les plans dont nous venons de parler, comme nous le verrons en diſcutant la théorie particulière de chaque Satellite.

XXII.

POUR réduire en nombres les inégalités périodiques du mouvement des Satellites en latitude, déterminées dans l'*art. XI;* nous y ſuppoſerons $N + q = n$; $N' + q = n'$; $N'' + q = n''$; $N''' + q = n'''$; ce que l'on peut faire ſans craindre aucune erreur ſenſible; on trouve, cela poſé;

$s = m' . 0,0034876 . (l' - l) .$
$\text{fin.} (3\,nt - 4\,n't + 3\,\varepsilon - 4\,\varepsilon' - qt + \Lambda)$
$- 0,00015312 . (L' - l) .$
$\text{fin.} (nt - 2\,Mt + \varepsilon - 2\,A - qt + \Lambda) ;$

$s' = [m . 0,0027648 . (l - l') + m'' . 0,0017068 . (l'' - l')] .$
$\text{fin.} (2\,nt - 3\,n't + 2\,\varepsilon - 3\,\varepsilon' - qt + \Lambda)$
$- 0,00030737 . (L' - l') .$
$\text{fin.} (n't - 2\,Mt + \varepsilon' - 2\,A - qt + \Lambda) ;$

$s'' = m' . 0,0013514 . (l' - l'') .$
$\text{fin.} (2\,n't - 3\,n''t + 2\,\varepsilon' - 3\,\varepsilon'' - qt + \Lambda)$
$- 0,00061925 . (L' - l'') .$
$\text{fin.} (n''t - 2\,Mt + \varepsilon'' - 2\,A - qt + \Lambda) ;$

$s''' = - 0,0014445 . (L' - l''') .$
$\text{fin.} (n'''t - 2\,Mt + \varepsilon''' - 2\,A - qt + \Lambda) .$

Les inégalités que nous venons de déterminer renferment les cinq inconnues μ, m, m', m'', & m'''; l'évaluation de ces inconnues eſt un des points les plus intéreſſans de la théorie des Satellites. Cette évaluation & celle des inégalités qui en dépendent, ſont l'objet de la ſeconde partie de cet Ouvrage.



MÉMOIRE

SUR LA COMBUSTION

De plusieurs Corps dans le gaz acide muriatique oxigéné.

Par M. FOURCROY.

QUOIQUE la théorie de la combustion soit beaucoup plus simple & beaucoup plus claire d'après les travaux de M. Lavoisier, qu'elle ne l'a jamais été à aucune époque de l'histoire de la science; quoique les résultats exacts des belles expériences de ce savant semblent annoncer qu'il n'y a presque plus rien à faire sur cette grande opération de la nature, & que le voile qui la couvroit est entièrement déchiré, on trouve cependant encore, en examinant les phénomènes de chaque corps combustible en particulier, plusieurs faits qui manquent d'explication : tels sont ceux dont je me propose d'entretenir aujourd'hui l'Académie. Lû le 3 Déc. 1788.

Depuis que les propriétés des fluides elastiques commencent à être appréciées avec exactitude, plusieurs physiciens ont cru que les gaz qui ne peuvent pas servir à la respiration, ne sont pas non plus susceptibles d'entretenir la combustion ; & en effet ces deux phénomènes ont tant d'analogie l'un avec l'autre, qu'il devoit paroître bien naturel d'en admettre l'existence simultanée. Mais s'il est vrai & s'il arrive constamment qu'un gaz qui ne peut pas servir à la combustion, ne peut pas servir davantage à la respiraion, il ne l'est pas également que tous les gaz dangereux pour les animaux, & qui ne sont pas susceptibles d'entretenir leur respiration, ne sont pas en même temps capables de faciliter la combustion des corps combustibles. On sait déjà que le gaz nitreux entretient

la combuſtion du pyrophore avec plus d'énergie que l'air atmoſphérique. Je me propoſe de faire voir dans ce mémoire qu'un autre gaz jouit de propriétés bien plus ſingulières encore que le gaz nitreux, par rapport à la combuſtion.

PREMIÈRE EXPÉRIENCE.

Le gaz acide muriatique oxigéné, découvert par Schéele, qui d'après une fauſſe théorie l'avoit nommé *acide marin déphlogiſtiqué*, & ſur lequel M. Berthollet a fait tant d'epériences ingénieuſes, ne peut pas ſervir à la reſpiration. Un animal qu'on y plonge eſt promptement aſphixié; & cependant une bougie allumée continue d'y brûler, avec quelques phénomènes différens à la vérité de ceux qui ont lieu dans l'atmoſphère. Sa flamme s'alonge & ſe rétrécit; elle prend une couleur rouge parfaitement ſemblable à celle des flambeaux & des réverbères qu'on voit luire de loin à travers les brouillards. Quoiqu'il paroiſſe à l'œil que la combuſtion de la bougie ſoit beaucoup plus foible que dans l'air atmoſphérique, on reconnoit par un examen plus attentif que la cire a brûlé avec plus de rapidité, & que la mèche eſt bien plus dépouillée qu'elle ne l'auroit été dans l'air. Pour que cette expérience réuſſiſſe ainſi que les ſuivantes, il faut avoir le gaz acide muriatique oxigéné bien pur, & pour cela il eſt néceſſaire de rejeter les premières bulles de fluide elaſtique qui ſe dégagent de l'oxide de manganèſe & de l'acide muriatique: ces premières bulles ſont ſouvent mêlées de gaz acide carbonique, & de gaz azote qui éteint les corps enflammés avec beaucoup d'énergie, & dont la préſence dans l'air vital retiré de l'oxide de manganèſe a déjà été reconnue par M. Séguin, dans le laboratoire de M. Lavoiſier.

DEUXIÈME EXPÉRIENCE.

En approchant le goulot d'un flacon rempli de gaz acide muriatique oxigéné, de la mèche enflammée d'une

lampe, on voit la flamme s'envelopper d'une vapeur épaiſſe, noirâtre, qui forme un cône beaucoup plus volumineux, & beaucoup plus alongé que celui qui a coutume de terminer cette flamme; celle-ci devient plus ſombre & rouge; il ſemble que la matière charbonneuſe de l'huile ſoit dégagée avec plus de rapidité, & emportée en torrent autour de la mèche. La même vapeur épaiſſe & abondante ſe répand tout-à-coup autour de la flamme d'une bougie allumée, plongée dans le gaz acide muriatique oxigéné.

TROISIÈME EXPÉRIENCE.

La première expérience annonçant que le gaz acide muriatique oxigéné pouvoit entretenir la combuſtion des bougies, j'ai voulu examiner la manière dont d'autres corps combuſtibles ſeroient altérés dans ce gaz. Parmi tous les eſſais que j'ai faits, je m'arrêterai ſpécialement ſur l'inflammation du phoſphore. En plongeant un petit morceau de ce corps combuſtible attaché au bout d'un fil de fer recourbé, dans du gaz acide muriatique oxigéné, il s'allume tout-à-coup & brûle avec un éclat & une déflagration remarquables. M. Vauquelin mon élève, qui a reconnu le premier cette inflammation dans les expériences que je l'avois chargé de faire ſur le gaz acide muriatique oxigéné, crut devoir me propoſer ce procédé comme un des plus ſûrs & des plus faciles pour ſe procurer de l'acide phoſphorique. Cette expérience, en annonçant comme la première que ce gaz eſt ſuſceptible d'entretenir la combuſtion avec plus d'énergie que l'air atmoſphérique, me préſentoit au premier aſpect un fait d'autant plus difficile à expliquer, que le phoſphore froid ou à la température ordinaire de l'atmoſphère ne s'allume point dans l'air vital, & qu'il y brille même d'une lumière plus foible que dans l'air atmoſpherique; mais on verra tout à l'heure d'où dépend cette différence, & quelle eſt la cauſe de cette inflammation, ainſi que de celles que je vais décrire.

QUATRIÈME EXPÉRIENCE.

Le gaz hydrogène phoſphoré ou gaz phoſphorique découvert par M. Gengembre, mis en contact avec le gaz acide muriatique oxigéné, s'allume tout-à-coup & brûle avec déflagration comme dans l'air atmoſphérique, mais avec une flamme moins brillante que celle qu'elle produit dans l'air vital. Le gaz hydrogène ſulfuré ou le *gaz hépatique* de Bergman, ne préſente au contraire aucune inflammation dans ſon mélange avec le gaz acide muriatique oxigéné.

CINQUIÈME EXPÉRIENCE.

J'ai toujours cherché dans mes cours à rendre ſenſibles & à démontrer aux yeux par des expériences poſitives, les théories que j'y expoſe. Dans cette vue, voulant prouver que lorſque l'ammoniaque eſt décompoſée par l'acide muriatique oxigéné, il ſe forme de l'eau par l'union de l'hydrogène, l'un des principes de l'alcali volatil, avec l'oxigène de l'acide muriatique oxigéné, tandis que l'acide muriatique & l'azote deviennent libres, ainſi que l'a expliqué M. Berthollet, j'ai penſé que je rendrois cette explication plus claire, & que j'en prouverois la vérité en mettant en contact le gaz acide muriatique oxigéné avec le gaz ammoniac, au lieu d'employer ces deux corps liquides comme l'avoit fait juſque-là M. Berthollet. Cette expérience eut tout le ſuccès que j'en avois eſpéré. Les deux gaz mêlés ſe pénètrent & ſe condenſent tout-à-coup; il ſe produit une chaleur vive, on aperçoit, au lieu des fluides tranſparens, une vapeur blanche très epaiſſe qui ſe condenſe bientôt, & forme ſur les parois de la cloche poſée ſur le mercure, des gouttes d'eau en très-grand nombre. Mais il ſe paſſe en même temps un phénomène bien propre à fixer l'attention des chimiſtes qui s'occupent du perfectionnement de la doctrine moderne. M. Vauquelin, en faiſant le mélange des

des deux gaz à quelque diſtance de moi, & pendant que j'étois occupé à en expoſer la théorie, crut voir une flamme pendant leur pénétration réciproque; il me fit part de cette obſervation, & nous répétâmes cette expérience avec le ſoin & l'attention qu'elle nous paroiſſoit exiger. Nous vîmes très-manifeſtement de la flamme, ſur-tout dans l'obſcurité, & nous apprîmes enſuite en employant les gaz très-purs & en aſſez grande quantité, à produire cet effet d'une manière ſi ſûre, que je l'ai toujours fait voir depuis dans mes cours : cette inflammation eſt aſſez forte pour qu'on l'aperçoive même au milieu du jour.

Quand on n'auroit pas ſu que l'ammoniaque contient une ſubſtance très-combuſtible & très-inflammable, cette expérience en ſeroit une preuve très-forte; mais avant d'en rechercher la cauſe, décrivons encore un phénomène de combuſtion dans le gaz dont nous nous occupons.

SIXIÈME EXPÉRIENCE.

Lorſque M. Berthollet eut annoncé & montré à l'Académie le ſel neutre qu'il avoit formé avec l'acide muriatique oxigéné & la potaſſe, & qu'il eut prouvé que dans cette ſingulière combinaiſon, l'acide muriatique abſorbe & condenſe bien plus d'oxigène en s'uniſſant à l'alcali qu'en ſe diſſolvant dans l'eau, mon premier ſoin fut de répéter ſon expérience, & de faire ce nouveau ſel neutre dans mon cours ſur les fluides élaſtiques, au mois d'avril de cette année (1788). En démontrant les propriétés les plus remarquables de ce ſel, je voulus eſſayer de le décompoſer par l'acide ſulfurique concentré; mais cette expérience que je ne tentai heureuſement que très en petit, m'offrit un mouvement ſi violent, & une efferveſcence ſi forte, que je ne crus pas devoir inſiſter alors ſur les phénomènes qui l'accompagnoient, & que je remis à un autre temps à les examiner avec ſoin. Dans cet examen fait quelques mois après, j'ai remarqué les circonſtances ſuivantes :

1°. L'acide sulfurique concentré, versé sur du muriate sur-oxigéné de potasse cristallisé, en dégage avec une effervescence très-vive une vapeur blanche, dont l'odeur forte, quoiqu'analogue à celle de l'acide muriatique oxigéné, a cependant un caractère particulier. Le sel & l'acide prennent une couleur orangée.

2°. En jetant sur l'acide sulfurique concentré, du muriate sur-oxigéné de potasse, il n'y a d'abord qu'une action peu sensible; mais si l'on agite le mélange avec un tube de verre, il se fait une explosion vive, accompagnée d'une lumière rouge assez éclatante qui passe comme l'éclair, & la matière est lancée à plusieurs pieds. Lorsque ce mouvement est fini, & que le mélange paroît être dans l'inaction, une nouvelle agitation produit une seconde explosion, souvent plus vive que la première, remarquable par quelques jets de lumière moins brillans que les premiers, & les molécules du mélange dispersées au loin par l'explosion, continuent à pétiller pendant qnelque temps. Il nous est arrivé en approchant la flamme d'une bougie du sel mêlé avec l'acide sulfurique, & qui avoit déjà produit une détonation vive, d'exciter dans ce mélange d'où il se dégageoit encore, une vapeur blanche abondante, une détonation bien plus forte que la première, & qui, en lançant à de grandes distances la matière contenue dans le vase, brisa celui-ci avec un grand bruit, & fut suivie de beaucoup de petites détonations partielles dans les petites masses du sel éparpillées. Ayant reconnu que cette explosion secondaire avoit eu lieu par l'action de la flamme de la bougie sur la vapeur dégagée du sel par l'acide, M. Vauquelin exposa au milieu de cette vapeur un petit morceau de phosphore; tout-à-coup celui-ci s'alluma avec une explosion & une déflagration si rapides, que des parcelles furent lancées à plus de six pieds. L'acide nitrique concentré produit sur le muriate sur-oxigéné de potasse, des effets analogues, mais beaucoup plus rapides encore. Lorsque nous eûmes reconnu tous ces phénomènes par nos expériences, on nous apprit

que M. Pelletier avoit vu l'espèce d'inflammation & l'explosion qui ont lieu dans le mélange de l'acide sulfurique concentré, & du muriate sur-oxigéné de potasse.

Tels sont les phénomènes que je désirois de faire connoître à l'Académie. Ils prouvent que le gaz acide muriatique oxigéné peut entretenir la combustion, même avec plus d'énergie que l'air atmosphérique; mais ils présentent des faits dont le rapport avec la théorie moderne exige quelques discussions. Ces faits, quoique peu nombreux, doivent être partagés en trois ordres bien distincts les uns des autres: 1.° ceux qui sont relatifs aux corps qui éprouvent dans le gaz muriatique oxigéné une combustion semblable à celle qui a lieu dans l'air de l'atmosphère, ou n'en diffèrent que par l'intensité de la flamme; 2.° les faits qui présentent dans ce gaz la propriété d'enflammer les corps que l'air atmosphérique ni l'air vital n'allument pas de la même manière; 3.° enfin ceux qui tiennent à la décomposition du muriate sur-oxigéné de potasse par les acides sulfurique & nitrique, & à l'influence des vapeurs que ces acides en dégagent sur plusieurs corps combustibles. Chacun de ces ordres de faits nous offre des problèmes intéressans à résoudre. Et d'abord si nous considérons la combustion des bougies & l'inflammation du gaz hydrogène phosphoré dans le gaz acide muriatique oxigéné, comparée à celle que ces deux corps combustibles éprouvent dans l'air atmosphérique & dans l'air vital, nous remarquerons que cette combustion plus vive que celle qui a lieu dans l'atmosphère, mais moins brillante dans sa flamme que celle qui est produite par l'air vital, annonce que l'oxigène uni à l'acide muriatique, n'y est pas sans combinaison de lumière & de calorique, mais qu'il contient une quantité moindre du premier principe ou de la lumière, & que le second ou le calorique y est plus comprimé, plus resserré que dans l'état d'air vital; car les expériences de M.rs Lavoisier & de la Place démontrent que l'oxigène contenu

dans le gaz acide muriatique oxigéné, y eſt combiné avec autant de calorique que dans l'air vital. Il ne peut donc y avoir de différence entre l'oxigène de ces deux gaz, que moins de lumière, & une compreſſion bien plus grande du calorique dans le gaz acide muriatique oxigéné, que dans l'air vital. Si nous recherchons enſuite comment la bougie s'enveloppe d'une vapeur épaiſſe qui offuſque ſa flamme, & pourquoi les parois du vaſe où ſe fait l'expérience ſont ſenſiblement obſcurcies, nous reconnoîtrons que c'eſt la grande quantité de charbon élevé en vapeur par le gaz hydrogène qui ſe dégage, & qui ne pouvant pas entièrement brûler, ſe dépoſe peu-à-peu & à meſure que l'hydrogène ſe combine avec l'oxigène, & forme de l'eau : le cône obſcur dont s'enveloppe tout-à-coup la flamme d'une lampe par le contact du gaz acide muriatique oxigéné, rend cette explication très-vraiſemblable. Ajoutons à cette première cauſe de la vapeur épaiſſe répandue autour de la flamme, la quantité d'eau formée tout-à-coup, & privée de l'état vaporeux par l'acide muriatique qui ſe trouve libre. Si cette vapeur épaiſſe n'exiſte ni dans l'air vital, ni dans l'air atmoſphérique, c'eſt que la chaleur forte dégagée dans ces dernières combuſtions, fait brûler complétement le charbon, & élève ſous forme vaporeuſe l'eau à meſure qu'elle ſe forme.

Le ſecond ordre des faits décrits dans ce Mémoire, comprend l'inflammation des corps combuſtibles qui a lieu comme excluſivement dans le gaz acide muriatique oxigéné, & qui ne ſe produit pas dans l'air atmoſphorique, ni même dans l'air vital, au moins à la même température. Cette inflammation eſt celle du phoſphore & du gaz ammoniac. Il faut avouer qu'il doit paroître étonnant que l'air vital, ce corps ſi éminemment propre à la combuſtion, qui brule avec tant de rapidité tous les corps combuſtibles échauffés chacun à des dégrés déterminés, n'ait aucune action, à la température ordinaire, ſur le phoſphore ; & que cette ſubſtance

perde même au milieu de cet air une grande partie de sa propriété lumineuse si bien entretenue par l'air atmosphérique. Si l'on compare ensuite la vive inflammation qu'il éprouve dans le gaz acide muriatique oxigéné, si l'on fait attention à la nature de ce gaz, à l'état dans lequel il contient l'oxigène, aux circonstances générales de la combinaison de ce dernier principe avec les différens corps combustibles, on reconnoît que ce fait s'explique assez facilement par la doctrine nouvelle, & ajoute encore à la précision de cette doctrine. En effet, l'oxigène uni à l'acide muriatique, y est privé d'une grande partie de la lumière qu'il contient dans l'état de l'air vital; le calorique qu'il paroît contenir dans une proportion presque aussi grande, y est dans une compression ou une densité beaucoup plus considérable. Il est donc plus près de se combiner avec des corps solides, ou d'entrer dans des combinaisons liquides, puisqu'on sait aujourdhui que, pour unir des corps, il faut d'abord rapprocher leur densité. C'est par ce dernier principe qu'on conçoit que l'air vital ne peut se combiner avec le phosphore & l'enflammer, que celui-ci ne soit auparavant divisé par la chaleur, & rapproché de la rarité de l'air vital; or, lorsque l'oxigène est plus voisin de la densité du phosphore, en raison de la petite quantité de lumière & de la condensation du calorique qu'il contient, comme dans le gaz acide muriatique oxigéné, ou dans l'acide nitrique, il peut se combiner rapidement avec le phosphore, & celui-ci peut en dégager plus facilement la portion de calorique & de lumière que cet oxigène liquide ou sur le point de l'être, contient encore. C'est à ce même état de l'oxigène dans le gaz acide muriatique oxigéné, qu'est due la décomposition du gaz ammoniac & la flamme qui se dégage pendant cette décomposition; car l'air vital ne produisant point cet effet sur l'ammoniaque, & l'acide muriatique n'y contribuant en rien, puisqu'il reste lui-même libre & sans altération, il n'y a que l'état de compression de l'air vital dans le gaz muriatique oxigéné, il n'y a que

ſa denſité voiſine de celle qu'a l'hydrogène dans l'ammoniaque, qui puiſſe rendre raiſon & de la rapidité de la décompoſition, & de la flamme qui s'excite dans l'action réciproque des deux gaz. C'eſt toujours de la denſité analogue entre l'hydrogène du gaz ammoniac & l'oxigène de l'acide muriatique oxigéné, que dépend la facilité avec laquelle ces deux corps s'uniſſent, & la rapidité de la formation de l'eau qui a lieu dans ce cas, tandis qu'au contraire l'extrême différence de denſité entre le gaz oxigène & le gaz hydrogène, les empêche de s'unir ſous cette forme gazeuſe. La flamme produite par cette décompoſition réciproque des deux gaz, prouve que l'hydrogène de l'ammoniaque ſépare encore de l'oxigène uni à l'acide muriatique, une certaine quantité de lumière qui exiſte dans le principe brûlant; & que dans l'eau l'oxigène eſt avec moins de chaleur & de lumière, que dans le gaz acide muriatique oxigéné.

Quant au troiſième ordre des faits relatifs à la décompoſition du muriate ſur-oxigéné de potaſſe par les acides ſulfurique & nitrique concentrés, la plupart de ces faits ſont très différens de ceux qui ont été expoſés juſqu'ici, & ſemblent même n'avoir avec eux aucune analogie. Ce ſel eſt une ſource de problèmes intéreſſans pour les chimiſtes. Il ſemble, à l'aide de la condenſation qu'y a éprouvée l'acide muriatique, & de l'oxigène plus abondant & plus comprimé qui s'y eſt fixé, que ce ſel ſoit un foyer de détonations & d'inflammation. M. Lavoiſier l'a vu tout lumineux par le ſeul frottement : nous avons obſervé que le ſeul contact de l'acide ſulfurique ou de l'acide nitrique produiſoit une exploſion & une inflammation rapides. La cauſe de ce phénomène ne peut être que le dégagement de la lumière & de l'air vital, ſur-tout de la portion de celui-ci, qui dans le muriate ſur-oxigéné de potaſſe, eſt au-deſſus de la quantité qui exiſte dans l'acide muriatique-oxigéné ordinaire & iſolé. C'eſt à cet air vital plus condenſé que dans

l'atmoſphère, & à une partie d'acide muriatique oxigéné qui ſe dégage en même temps, qu'eſt due l'inſlammation du phoſphore. Enſin la lumière, l'air vital condenſé, l'acide muriatique oxigéné ordinaire, paroiſſent être ſéparés en même temps du muriate ſur-oxigéné de potaſſe par l'acide ſulfurique & par l'acide nitrique. Mais pour connoître tous ces phénomènes avec plus de préciſion, il faudra faire ſur ce ſel des expériences beaucoup plus longues & plus exactes que celles que j'ai encore faites, & qui n'ont pas d'ailleurs un rapport direct avec l'objet de ce Mémoire.



MÉMOIRE

Sur les phénomènes qui ont lieu dans la précipitation des dissolutions métalliques, par l'ammoniaque (alcali volatil).

Par M. FOURCROY.

Lu le 12 Novembre, 1788.

LES chimistes connoissent depuis long-temps la différence qui existe entre les précipités de la même dissolution métallique par les alcalis fixes & par l'ammoniaque. Ils ont sur-tout observé cette différence dans la dissolution d'or, dans celle de fer, de cuivre & de mercure; mais ils ne se sont occupés que de l'effet sans en rechercher la cause. A la vérité, la découverte de celle-ci tenoit à d'autres découvertes qu'on étoit même fort éloigné de soupçonner il y a quelques années, & qui ne pouvoient être faites que d'après les connoissances acquises sur la nature & les combinaisons des gaz, sur les principes & la décomposition de l'eau. Il falloit, pour concevoir les effets que l'ammoniaque produit sur les dissolutions métalliques, connoître la nature de cet alcali, aussi-bien que celle des divers acides, & des oxides ou chaux métalliques. Bergman, & plus particulièrement encore Schéele avoient entrevu que l'ammoniaque étoit décomposée pendant la fulmination de l'or fulminant, & dans quelques autres expériences de chimie. Ils avoient aussi soupçonné que cet alcali étoit formé de toutes pièces dans plusieurs cas, & que dans sa décomposition il se dégageoit un gaz qui paroissoit être un de ses principes. Mais M. Berthollet, d'après ces seuls aperçus, a prouvé par des expériences ingénieuses, que l'ammoniaque est un composé d'azote ou de la base du gaz azote, qu'on a nommée il y a quelques années, *mofette atmosphérique*, & de l'hydrogène ou de la base du *gaz inflammable*. Le premier de ces

ces deux principes y eſt ſix fois plus abondant que le ſecond.

M. Berthollet eſt parvenu à ce réſultat précis, en examinant avec ſoin la décompoſition de l'ammoniaque par l'acide nitrique, par l'acide muriatique oxigéné, par l'oxide de cuivre, par l'oxide d'or à l'aide de ſa fulmination, & par l'oxide d'argent qui, en ſéparant les principes de l'ammoniaque & en ſe décompoſant lui-même, produit à l'aide du plus léger contact une détonation très-forte. Quoiqu'il n'ait point encore pu recompoſer l'ammoniaque en mettant en contact le gaz hydrogène & le gaz azote, ſa découverte explique cependant la formation de cet alcali dans la diſtillation & la putréfaction des matières animales, ainſi que des ſubſtances végétales analogues aux premières; elle a encore ſervi à déterminer la principale différence qui exiſte entre les principes prochains des animaux & ceux des végétaux.

La connoiſſance des principes de l'ammoniaque, doit jeter du jour ſur un grand nombre de faits chimiques qui n'ont point encore été expliqués. Telles ſont, entr'autres, toutes les précipitations métalliques opérées par l'ammoniaque, & telle eſt auſſi l'action de cet alcali ſur les oxides métalliques.

Il exiſte quelques diſſolutions métalliques que l'ammoniaque ne précipite point ſenſiblement, ou dont elle diſſout les oxides avec tant d'énergie, qu'on n'aperçoit point ou preſque point de précipité. Le ſilence des chimiſtes les plus exacts ſur ce phénomène, m'étonnoit il y a plus de dix ans, lorſque je voyois qu'il m'étoit impoſſible d'obtenir un précipité de la diſſolution nitrique d'argent par l'ammoniaque. La ſingularité de ce fait m'avoit tellement frappé en 1777 & 1778, que depuis cette époque je faiſois recueillir avec ſoin dans mon laboratoire les mélanges de nitrate d'argent & d'ammoniaque, qui ne m'avoient point fourni de précipité. Depuis la découverte de l'oxide d'argent détonant, par M. Berthollet, j'ai examiné atten-

tivement l'état de ce mélange ; j'y ai trouvé un précipité gris & beaucoup de lames brillantes d'argent. L'ammoniaque diſſout donc d'abord l'oxide de ce métal, & le réduit peu-à-peu, en lui enlevant l'oxigène.

Le plus ſingulier phénomène que j'aie eu occaſion d'obſerver dans l'action de l'ammoniaque ſur les diſſolutions métalliques, a lieu dans celles de manganèſe. Si l'on verſe dans du ſulfate de manganèſe étendu d'eau, quelques gouttes d'ammoniaque pure & cauſtique, il ſe forme d'abord un précipité rouge qui va au fond du vaſe ; mais bientôt ce précipité qui paroiſſoit être une poudre uniforme, ſe ſépare en flocons que l'on voit agités d'un léger mouvement inteſtin, dû à une véritable efferveſcence. Chaque flocon paroît attaché à une bulle plus ou moins groſſe de fluide élaſtique, & celle-ci augmentant peu-à-peu de volume, devient aſſez groſſe pour donner à la petite maſſe du flocon une peſanteur ſpécifique moins conſidérable que le liquide ; alors le flocon chargé & quelquefois enveloppé de cette bulle gazeuſe, s'éleve au haut de la liqueur, & y reſte ſuſpendu juſqu'à ce que le gaz l'ait tout-à-fait abandonné & ſe ſoit répandu dans l'atmoſphère. A meſure que ces flocons s'enveloppent ainſi de gaz & s'élèvent dans le liquide, l'oxide de manganèſe qui les forme change de couleur ; de rouge qu'il étoit d'abord, il devient gris & même preſque blanc. Cette précipitation répétée dans des flacons tubulés & terminés par l'appareil pneumato-chimique, a donné pour produit du gaz azote. D'autres expériences ont encore confirmé ce réſultat. L'ammoniaque miſe en contact avec des oxides de manganèſe noirs, bruns & rouges, & aidée d'un peu de chaleur, donne lieu à une efferveſcence très-ſenſible & qui fournit du gaz azote ; les oxides deviennent gris ou blancs. En traitant l'oxide de manganèſe blanc par l'ammoniaque, le même phénomène, la même efferveſcence n'ont plus lieu. Il eſt aiſé de concevoir que les derniers oxides étant dans une circonſtance très-différente des premiers, & beaucoup plus

voiſins de la réduction, ils ne peuvent plus opérer la décompoſition de l'ammoniaque ; car l'effervescence, le dégagement du gaz azote, & la réduction de l'oxide brun de manganèſe, tiennent manifeſtement à la décompoſition de l'ammoniaque. L'hydrogène, l'un des principes de cet alcali, ſe porte ſur l'oxigène de l'oxide, avec lequel il s'unit & forme de l'eau; l'oxide doit alors ſe rapprocher de l'état métallique. Comme l'azote, autre principe de l'ammoniaque, n'a point d'affinité avec le métal preſque réduit, ni avec l'eau formée, il s'unit au calorique dégagé de l'hydrogène & de l'oxide, & forme du gaz azote qui, à meſure qu'il prend la fluidité elaſtique, produit l'effervescence déja décrite. Il ſe paſſe donc dans cette opération une double décompoſition dans l'ammoniaque & dans l'oxide de manganèſe ; deux des principes de ces compoſés deviennent libres ; l'un reſte fixe, & l'autre prend la forme de gaz. Les deux autres principes ſe combinent enſemble & produiſent de l'eau; c'eſt abſolument le même changement qui a lieu dans la fulmination des oxides d'or & d'argent ammoniacaux, dans la détonation du nitrate ammoniacal, dans la double décompoſition de l'ammoniaque & de l'acide muriatique oxigéné; en un mot, dans les expériences décrites avec tant d'exactitude par M. Berthollet. Dans celles que je viens de faire connoître, il n'y a que les phénomènes qui ſont différens, & c'eſt ſur ces phénomènes ſeulement que je déſirois de fixer l'attention des chimiſtes. Il en eſt de même de beaucoup d'autres expériences où la décompoſition ſimultanée des oxides métalliques & de l'ammoniaque a également lieu, avec des circonſtances à la vérité un peu différentes. Telles ſont les précipitations de quelques diſſolutions de fer & du mercure par l'ammoniaque; l'action de ce ſel ſur les oxides des mêmes métaux, & ſur les acides métalliques, arſénique, molybdique & tunſtique.

Feu M. Maret, ſecrétaire perpétuel, de l'académie de Dijon, avoit propoſé de préparer l'*éthiops martial*, en précipitant du nitrate de fer par l'ammoniaque. Dans cette

précipitation que j'ai répétée un grand nombre de fois, il ſe dégage une grande quantité de petites bulles qui ne ſont que du gaz azote, & l'oxide brun de fer devient noir en cédant une portion de ſon oxigène à l'hydrogène de l'ammoniaque. La même réduction eſt plus prompte, plus facile, & ſa cauſe bien plus manifeſte en chauffant dans un appareil pneumato-chimique, un oxide de fer brun ou rouge avec de l'ammoniaque liquide; on voit naître une effervefcence très-ſenſible; on obtient du gaz azote, & l'oxide de fer rouge paſſe à l'état d'oxide de fer noir ou d'*éthiops martial.*

Le mercure a toujours été pour les chimiſtes un objet de recherches & d'obſervations; tout n'eſt point encore découvert dans ce métal, & pluſieurs phénomènes très-remarquables de ſes diſſolutions & de ſes précipitations, n'ont point encore été décrits & appréciés. L'acide nitrique concentré verſé ſur du mercure, produit une effervefcence remarquable par un grand nombre de petites bulles qui ne montent pas d'abord juſqu'au haut du liquide, mais qui s'arrêtent & diſparoiſſent à quelque diſtance de la ſurface du métal. Le fluide élaſtique qui les forme, & qui eſt de vrai gaz nitreux, ſe diſſout dans l'acide & lui donne une oculeur verte: cette couleur va en augmentant de bas en haut de la liqueur; mais bientôt celle-ci s'échauffe; alors les bulles montent juſqu'à la ſurface, & forment la vapeur rouge nitreuſe qui annonce la combinaiſon du gaz nitreux avec l'air vital atmoſphérique. Cette chaleur dégageant peu-à-peu & le gaz qui continue à ſe former par l'action de la diſſolution, & celui qui étoit diſſous dans l'acide froid, le liquide ſe décolore & devient entièrement blanc. La couleur que cet acide prend pendant la diſſolution de pluſieurs métaux, tient donc à l'attraction qu'il a pour le gaz nitreux: après cette obſervation qui avoit échappé aux recherches des chimiſtes, occupons nous de l'action de l'ammoniaque ſur les diſſolutions de mercure & ſur les oxides de ce métal.

On ſait que le ſulfate & le nitrate de mercure ſont précipités en jaune orangé ou briqueté par les terres alcalines & par les alcalis fixes ; mais l'ammoniaque les précipite en gris noir. Pendant cette dernière précipitation, il ſe dégage des bulles de gaz azote, & l'on voit que la couleur & la réduction de ce précipité ſont dues à la décompoſition de l'ammoniaque. Ce précipité noir obtenu du ſulfate & du nitrate de mercure par l'ammoniaque, ſe réduit entièrement en globules de mercure coulant lorſqu'on le fait ſécher à l'air ſur le filtre. J'ai confirmé la théorie de cette réduction due à la décompoſition de l'ammoniaque, en traitant avec cet alcali les précipités jaunes & briquetés obtenus de ces deux diſſolutions par les alcalis fixes ; ces oxides deviennent gris & noirs par le contact de l'ammoniaque aidée de la chaleur, & il ſe dégage avec une efferveſcence très-ſenſible du gaz azote. Mais le muriate oxigéné de mercure, ou *ſublimé corroſif*, ne ſe comporte pas de la même manière avec les alcalis fixes & l'ammoniaque ; les premiers en ſéparent un oxide de mercure plus rouge que ceux qu'ils précipitent du ſulfalte & du nitrate du même métal ; & l'ammoniaque, même miſe en excès, n'en précipite jamais qu'un oxide blanc. Lorſqu'on arroſe avec cet alcali volatil les précipités du même ſel par les alcalis fixes, l'ammoniaque commence par les blanchir, & il ne les colore en noir qu'à l'aide de beaucoup de temps. Pour bien concevoir la cauſe de cette différence & la raiſon des phénomènes qui ont lieu dans ces divers cas, il faut ſe rappeler que chaque acide exige dans un métal des quantités différentes d'oxigène pour s'y unir ; que l'acide muriatique ne ſe combine en général qu'avec les métaux très-chargés de ce principe ou très-oxidés ; que le mercure paroît être plus oxidé dans le muriate corroſif que dans le ſulfate & le nitrate. D'après ces conſidérations, il eſt aiſé de ſentir que l'ammoniaque qui trouve dans le muriate mercuriel oxigéné un oxide plus avancé, le réduit moins, tant qu'on n'ajoute point de

chaleur, que celui qui eſt combiné avec les acides ſulfurique & nitrique. A la vérité, cette ſeule différence d'une oxidation plus complette dans le mercure uni à l'acide muriatique, n'explique pas pourquoi l'ammoniaque ne parvient pas à le réduire, & ſemble n'autoriſer tout au plus qu'un temps plus long & une quantité plus conſidérable d'ammoniaque pour opérer la réduction de cet oxide. Et en effet, l'oxidation plus avancée n'eſt pas la ſeule cauſe de ce phénomène; il en exiſte encore une autre dans la nature même de ce précipité blanc qui n'eſt pas un pur oxide de mercure, mais un vrai ſel triple irréductible par ce procédé: il faudroit des détails très-longs & d'ailleurs trop éloignés de l'objet de ce Mémoire, pour faire connoître ce qui ſe paſſe dans cette précipitation. Je réſerverai ces détails, ainſi que pluſieurs autres faits relatifs aux diverſes précipitations des diſſolutions mercurielles, pour d'autres Mémoires. Je dois continuer à pourſuivre dans celui-ci l'examen de l'action de l'ammoniaque ſur les diſſolutions & les oxides métalliques.

Les oxides de plomb précipités des diſſolutions de ce métal par l'ammoniaque, ne diffèrent pas ſenſiblement de ceux qui ſont ſéparés par les alcalis fixes. Cependant l'ammoniaque a une action très-ſenſible ſur pluſieurs oxides de ce métal. L'oxide vitreux de plomb, qu'on connoît dans les arts ſous le nom de *litharge*, mis en contact avec l'ammoniaque, devient blanc & produit une effervefcence due au dégagement du gaz azote: cette effervefcence qui annonce la décompoſition de l'ammoniaque, eſt rendue beaucoup plus ſenſible par la chaleur.

Les acides arſenique, molybdique & tunſtique éprouvent auſſi une altération très-marquée par l'ammoniaque: ſi l'on chauffe lentement l'arſeniate ammoniacal, ce ſel, au lieu de laiſſer diſſiper l'ammoniaque & d'offrir l'acide arſenique ſeul pour réſidu, comme cela a lieu dans le procédé de M. Pelletier où il faut employer un grand feu, ſe décompoſe en ſes deux matériaux. L'hydrogène de l'ammoniaque

enlève à l'arſenic la portion d'oxigène qui le rend acide, ſans prendre celle qui le tient à l'état d'oxide; l'acide arſenique repaſſe donc à l'état d'oxide arſenic blanc, mais jamais à l'état métallique; il ſe dégage du gaz azote, & il ſe forme de l'eau pendant cette opération. L'acide molybdique traité de même par l'ammoniaque, perd ſon acidité & devient oxide gris de molybdène; l'acide tunſtique, en ceſſant d'être acide par le même traitement, perd ſa couleur jaune & en prend une blanche. Il y a toujours effervescence dans ces procédés, & elle eſt toujours due au dégagement du gaz azote & à la décompoſition de l'ammoniaque.

Je n'ai trouvé que l'étain, le zinc, l'antimoine, le cobalt & le biſmuth, dont les oxides ſont inaltérables par l'ammoniaque; encore les deux derniers métaux offrent-ils un commencement d'altération par le contact de ce ſel.

En réſumant ſur l'action générale & réciproque de la plupart des oxides métalliques & de l'ammoniaque, ſoit ſeule & pendant le contact immédiat de ces corps, ſans mélange d'autres ſubſtances, ſoit modifiée par les acides auparavant unis aux oxides métalliques, on peut réduire cette action, ou plutôt les degrés de cette action, à pluſieurs phénomènes différens qui tiennent aux attractions électives & comparées de l'oxigène pour l'azote, l'hydrogène, & pour les ſubſtances métalliques.

1.° L'ammoniaque n'a nulle action ſur quelques oxides métalliques, qui conſéquemment ne la décompoſent point; tels ſont les oxides de zinc, d'antimoine, de biſmuth, de cobalt & d'étain: on voit ici que ces métaux ſont auſſi ceux qui ne cèdent que difficilement leur oxigène aux autres corps.

2.° L'ammoniaque détruit l'acidité en enlevant la portion d'oxigène vraiment acidifiante aux acides métalliques, arſenique, tunſtique & molybdique; mais il ne leur enlève point la dernière partie de l'oxigène qui réduit ces corps à l'état d'oxides.

3.° Il y a des oxides métalliques non acidifiables, ou qu'au moins on n'eſt pas encore parvenu à mettre à l'état d'acides, & qui ne cèdent qu'une portion de leur oxigène à l'ammoniaque. C'eſt ainſi que les oxides rouges & jaunes de plomb, l'oxide brun de fer, l'oxide brun de manganèſe, l'oxide vert de cuivre, ſe rapprochent de l'état métallique, ſans ſe réduire tout-à-fait par l'action de l'ammoniaque.

4.° Les quantités d'oxigène que l'ammoniaque enlève à ces oxides non entièrement réductibles par ſon action, ſont différentes dans les différens métaux; mais l'addition de la chaleur augmente ces quantités d'oxigène ſéparé par l'ammoniaque.

5.° Il y a quelques oxides métalliques que l'ammoniaque réduit tout-à-fait à froid, ou ſimplement aidée par les rayons du ſoleil; tels ſont les oxides d'argent, d'or & de mercure.

6.° L'union des acides aux oxides métalliques modifie cette action, & s'oppoſe en général à la réduction complette, en faiſant varier les attractions électives; c'eſt ainſi que tous les oxides de mercure purs ſont réduits facilement par l'ammoniaque, tandis qu'unis aux acides, ils ne font que ſe rapprocher de l'état métallique au moment où l'ammoniaque les en ſépare.

7°. La chaleur augmente tellement l'action & la décompoſition réciproque de l'ammoniaque & des oxides métalliques, qu'elle opère ſubitement & quelquefois même avec une détonation bruyante, la réduction de quelques oxides par ce ſel. Telle eſt la théorie de la réduction des oxides de cuivre par l'ammoniaque que l'on diſtille ſur ces oxides, de la fulmination par le feu de l'oxide d'or ammoniacal, & de celle de l'oxide d'argent ammoniacal par le plus léger frottement.

Tous les effets, tous les phénomènes variés que préſentent les précipitations des ſels métalliques par l'ammoniaque, tiennent donc à l'attraction des principes de l'ammoniaque pour ceux des oxides métalliques, & à celle de ces deux compoſés pour les acides : ces deux ordres d'attractions

électives

électives représentent des forces compliquées dont il étoit autrefois impossible de saisir les résultats. Pour résoudre ces problèmes, il falloit d'abord les simplifier & connoître l'action réciproque des oxides métalliques isolés & purs, & de l'ammoniaque. Je n'ai fait qu'établir les principes généraux de ces attractions, & déterminer leur influence générale dans les précipitations métalliques par l'ammoniaque. Une étude plus approfondie de chaque attraction en particulier, donnera par la suite des connoissances plus exactes sur chaque sel métallique; mais il faudra pour les acquérir, des expériences très-multipliées, puisque les seuls phénomènes des décompositions des sels mercuriels par l'ammoniaque m'ont occupé long-temps, comme je le dirai dans des Mémoires qui feront suite à celui-ci.



MÉMOIRE

Sur une détonation produite par une ſubſtance connue ſous le nom de Sel de verre, *lorſqu'étant en fuſion on la jette dans de l'eau.*

Par M. FOUGEROUX DE BONDAROY.

Lû le 23 Déc. 1788.

LES travaux des chimiſtes ayant porté très-loin nos connoiſſances ſur la nature & les propriétés des différens gaz, pluſieurs membres de cette Académie ſe ſont occupés d'expliquer les détonations dues à ce gaz, & principalement celles des chaux métalliques précipitées par un alkali volatil. J'ai donc cru que je ferois plaiſir à pluſieurs de mes confrères, en leur préſentant un fait dans ce genre dont ils ſont plus à portée que d'autres de donner l'explication, ſoit que la détonation dont je vais parler, doive ſon exiſtence à un gaz, ou qu'elle ne ſoit produite que par une ſimple expanſion de l'eau raréfiée par une extrême châleur.

Le fait dont il s'agit eſt connu depuis long-temps dans les verreries, où l'on emploie pour *fondans* des ſoudes de varech, & en général de celles qui contiennent beaucoup de ſel marin.

Je dois prévenir que du verre en parfaite fuſion étant jeté dans de l'eau, n'y produit aucune détonation. On emploie ce moyen pour rétablir un verre qui a été mal fabriqué, & lorſqu'on ſe propoſe de changer la compoſition qui l'a rendu défectueux. On connoît cette opération ſous le nom d'*éteindre le verre.* Il perd ainſi ſa tranſparence, ſe réduit enſuite facilement en poudre lorſqu'on le pile, & on eſt à portée pour-lors de former un nouveau mélange de matières vitrifiables, &c. dont il réſulte ſouvent un

verre d'une qualité plus parfaite que le premier. On pratique ce moyen avec avantage dans toutes les verreries, sans qu'il y ait aucune apparence de détonation & sans courir le moindre danger.

Mais voici ce qui occasionne la détonation dont j'ai parlé. Lorsque les cendres de varech, que l'on emploie dans certaines verreries comme fondans, & qui contiennent beaucoup de sel marin, ont été mêlées avec le sable, on expose ce mélange à la chaleur du four, où il se convertit en verre; & lorsque la fusion est complette, *le sel de verre* se sépare de la substance vitrifiée, & monte jusqu'aux bords du pot où il surnage. Autrefois on laissoit ce sel exposé à la chaleur du four assez de temps pour qu'il se sublimât, & sous ce sel on trouvoit le verre exempt de *points* & en état d'être travaillé en *verres à plats*, ou en cylindres appelés *manchons*, &c. Depuis peut-être 40 à 50 ans, on a reconnu qu'on consumoit du bois en pure perte en laissant ainsi ce sel s'évaporer, & qu'il y avoit un avantage à l'enlever dès le moment que séparé du verre il surnage.

C'est cette opération qui offre de grands inconvéniens dans les fours de verreries, les halles ou chambres closes, lorsqu'on ne prend pas, en l'exécutant, les attentions convenables & que nous allons indiquer. Dans chacune des grandes verreries, on a des cuillers de fer dont le manche est long de six pieds environ; on s'en sert pour puiser dans le pot ce sel de verre liquide, qu'on emporte & qu'on verse dans un trou ou dans une fosse placée près du grand four, afin qu'elle soit séche & chauffée convenablement.

Il faut savoir, pour suivre les détails de cette opération, que le verre ne s'attache pas au fer, à moins que ce fer n'ait acquis un certain dégré de chaleur qui approche de l'incandescence; ce qui oblige de faire chauffer les *cannes* ou *selles* de fer, &c. lorsqu'on veut avec ces outils *lever* du verre pour le *souffler* ou le *travailler*. Les cuillers ou poches avec lesquelles on enlève le sel de verre, s'échauffent

ſuffiſamment dès la ſeconde fois qu'on les a employées; pour que le verre y adhère : il eſt donc néceſſaire de changer de poches auſſi ſouvent que le verre s'y attache. Ainſi quand on a retiré deux fois du ſel de verre, il faut laiſſer refroidir la poche ou cuiller ; & pour accélérer ce refroidiſſement on la jette dans une grande auge de bois contenant de l'eau : mais auparavant on a grand ſoin de s'aſſurer qu'il n'y reſte pas de ſel de verre : s'il y en avoit dans la poche au moment où on la jette dans l'eau, il ſe feroit une exploſion comme celle d'une pièce d'artillerie. La même choſe arriveroit ſi la poche étoit humide, ou s'il y reſtoit de l'eau lorſqu'on la replonge dans le ſel de verre ; l'exploſion dans ce cas ſeroit ſi terrible, qu'il pourroit arriver que la poche lancée avec violence, traverſât le four & allât percer le mur fait de charpente & de terre ou de torchis, au grand riſque des ouvriers qui garniroient cette halle. Ce malheur n'eſt pas ſans exemples dans les *grandes verreries*. Cette exploſion, comme on voit, expoſe aux plus grands dangers lorſqu'elle a lieu dans un four & dans une halle ou endroit clos; il n'en eſt pas de même lorſqu'elle ſe fait en plein air.

Une verrerie ſituée en haute Normandie dans les domaines d'un prince recommandable par ſes vertus (1), comptant ſur la viſite dont il vouloit bien l'honorer, avoit raſſemblé à ſon arrivée des ouvriers qui portoient chacun dans une poche une certaine quantité de ſel de verre en fuſion, & la jetoient les uns après les autres dans un baſſin qui contenoit de l'eau, ce qui imitoit aſſez parfaitement une décharge de boîtes ou d'autres pièces d'artillerie.

On remarquera que ceci n'a lieu que quand le ſel de verre provient de ſoudes de varech. Le ſel de verre de ſoudes d'alicanthe, ou de potaſſe, ne donne aucune

(1) M.gr le duc de Penthièvre, à ſon comté d'Eu.

détonation ; & j'ai reconnu que ce ſel de verre ne contient que du tartre vitriolé & une magnéſie, tandis que le ſel de verre des ſoudes de varech donne du ſel marin à baſe alkaline, d'autre à baſe terreuſe, & du ſel de Glaubert.

Lorſqu'on eſt préſent à l'incinération des varechs ou goeſmons qui ſont employés à la fabrique de ces ſoudes, il eſt facile de ſe convaincre que ces fucus contiennent beaucoup d'alkali volatil.

Ne peut-on pas croire que pendant la combuſtion de ces plantes qui contiennent une ſubſtance analogue à la matière cornée des animaux, il s'eſt déjà fait une décompoſition du ſel marin par l'alkali volatil, & qu'il en réſulteroit une détonation? Si toutefois elle ne provenoit pas de la dilatation de l'air contenu dans l'eau, ce ſeroit pourlors l'effet d'un gaz particulier au ſel marin, & réſultant, comme je l'ai dit, de ſa décompoſition par l'alkali volatil.

Au reſte, je ne me ſuis propoſé que d'expoſer le fait ; je laiſſe à mes confrères, particulièrement à M.rs Berthollet & de Fourcroy, à en donner l'explication. Les travaux de ces habiles chimiſtes ſemblent nous donner lieu d'attendre d'eux qu'ils l'appuyeront par des expériences; & celles qu'a faites récemment M. Berthollet, ſemblent avoir de l'analogie avec la détonation dont je viens de faire part à l'Académie.



OBSERVATIONS

Sur plusieurs anciens Monumens gothiques que j'ai remarqués dans cette Capitale, sur lesquels sont gravés les signes du Zodiaque, & quelques hyérogliphes Égyptiens, relatifs à la religion d'Isis.

Par M. LE GENTIL.

Lû le 14 Nov. 1787.

DEPUIS environ seize ans que je suis de retour de l'Inde, & que j'ai fait connoître l'astronomie des Indiens proprement dits, plusieurs savans se sont occupés de différentes recherches sur cette astronomie, sur le zodiaque & sur ses douze signes. Ce cercle presqu'aussi ancien que le monde, me paroît, comme les hommes, originaire d'Asie. On le trouve en effet établi de temps immémorial chez différentes nations de ce vaste continent, sur-tout dans l'Inde; & par-tout il paroît avoir une origine commune.

Il est vrai qu'il est aussi très-anciennement connu des Égyptiens; mais j'ai fait voir dans une dissertation imprimée dans les volumes de l'Académie, que le zodiaque considéré à une certaine époque convient parfaitement au climat de l'Inde, ce qu'on ne peut pas dire aussi exactement du climat de l'Égypte; & que par conséquent les Indiens ont autant de droit à soutenir qu'il est originaire de l'Inde, que les Égyptiens en ont à croire qu'ils l'ont inventé, comme l'ont aussi pensé quelques savans. Le zodiaque que j'ai apporté de l'Inde, que j'avois trouvé en usage parmi les Brames, quoique différent dans quelques points du zodiaque Égyptien, est cependant le même quant au fonds.

Les Indiens, comme je le dis dans ma dissertation, ne se sont pas bornés à ce seul zodiaque composé de douze

constellations; ils en ont un autre qui me paroît beaucoup plus ancien, c'est celui de la Lune, composé de 27 constellations qu'ils nomment encore lieux de la Lune dans les douze signes. Ce zodiaque que j'ai également apporté de l'Inde, leur a servi à composer celui du Soleil, dont le mouvement n'a pu être connu qne fort long-temps après celui de la Lune, par la raison qu'il ne fait qu'en 365 jours une route que la Lune parcourt en 29 environ; mais il ne sera question ici que du zodiaque ou cercle des douze signes, tel qu'on le trouve à plusieurs anciennes églises à Paris.

L'étude de l'astronomie ancienne nous apprend que chez plusieurs peuples orientaux, le zodiaque étoit en quelque sorte sacré; une espèce d'almanach ou de calendrier religieux, lié avec les travaux de la campagne, gravé sur des pierres, & déposé dans les temples : c'est ainsi qu'en ont usé les Égyptiens, ce qu'avoient pratiqué les Phéniciens long-temps avant eux.

On trouve encore dans Josèphe des traces de ce que nous disons. Il est hors de doute que les Hébreux en sortant d'Égypte, emportèrent avec eux quantité de coutumes, de rites, même d'idoles, & de cérémonies religieuses en usage alors chez les Égyptiens. Ils prirent aussi le zodiaque de ces peuples, ce qui seul a droit de nous intéresser ici. Josèphe donc en décrivant d'après Moïse & différentes archives de sa nation, l'habillement du grand-prêtre, tel que Moïse le composa ou sortir d'Égypte dans le désert, dit positivement qu'il représentoit, avec le tabernacle & les vases sacrés, tout le monde; ce qui prouve, selon lui, que le législateur des Juifs étoit un homme divin; qu'il ne sauroit par conséquent assez s'étonner sur le sujet de l'injustice de ceux qui haïssoient les Hébreux & les traitoient d'impies, à cause qu'ils méprisent les divinités qu'ils adorent, mais qu'on voyoit que c'étoit très-faussement qu'on les accusoit.

Or, l'habillement du grand-prêtre laissoit sur le milieu

de la poitrine une ouverture de quatre doigts en quarré; & Josèphe nous dit que cette ouverture étoit couverte par une pièce d'étoffe que les Grecs nomment *logion*, c'est-à-dire, rational ou oracle; que sur cette pièce nommée *rational*, étoient attachées douze pierres précieuses, d'une si extrême beauté qu'elles n'avoient point de prix; qu'elles étoient placées en quatre rangs de trois chacun, séparées par de petites couronnes d'or; que dans chacune de ces pierres précieuses étoit placé le nom des douze fils de Jacob; & qu'enfin elles représentoient les mois ou les douze signes figurés par ce cercle que les Grecs nomment *zodiaque*.

Il sembleroit, d'après ce récit de Josèphe, que les douze patriarches ou enfans de Jacob étoient censés présider aux douze signes du zodiaque, à peu-près comme en Égypte, ce cercle étoit présidé par douze grands personnages ou divinités. Quoi qu'il en soit, l'on voit toujours que dans la plus haute antiquité, le zodiaque a été regardé comme une espèce de tableau sacré qui représentoit une partie du monde ou de la nature; & que l'on se faisoit un devoir de religion de le laisser en dépôt dans la race sacerdotale, parce qu'alors il n'y avoit d'astronomes, ou pour mieux dire d'astrologues, que dans la tribu des prêtres. Dans l'Inde, encore aujourd'hui, les Brames qui sont les prêtres des Gentils, ont seuls le dépôt des sciences, & par conséquent de l'astronomie.

Les Romains qui sont modernes en comparaison des Hébreux, & qui tenoient leur religion des Égyptiens & des Grecs, les Romains, dis-je, gravoient aussi quelquefois le zodiaque sur les vases qui servoient aux sacrifices. (*Voyez Montfaucon, T. II, 1.ere part. p. 143, pl. LXX.*)

J'ai dit que le zodiaque, tel que je l'ai apporté de l'Inde, vient des Brames. Il est en usage dans toute la presqu'île en deçà le Gange, & à Benarés; on ne peut donc se refuser d'en reconnoître l'authenticité. On trouve outre cela dans l'Inde, quelques traces du zodiaque dans quelques

quelques pagodes : M. Call, ingénieur en chef à Madraſſ, en a découvert un très-bien conſervé, dans le temps que je me diſpoſiois à repaſſer en Europe. J'ignorois qu'il en exiſtât dans ces édifices : mes interprètes ne m'en avoient rien dit, ſoit que le ſachant ils ayent oublié de m'en parler, ſoit qu'ils l'ignoraſſent eux-mêmes. Pour moi, il ne m'a été poſſible d'entrer que dans une ſeule pagode, celle de Vilnour, dont j'ai parlé & dont j'ai donné la deſcription dans mon voyage, & je puis aſſurer n'y avoir vu aucune marque de zodiaque ; mais M. Call, que ſon état d'ingénieur mettoit à portée néceſſairement de viſiter différens cantons & différentes provinces de l'Indoſtan, s'eſt trouvé dans le cas de rencontrer celui dont nous parlons. Il envoya en 1771, à M. Maskelyne, un deſſin de ce précieux monument; cet Aſtronome l'a fait graver & inſérer dans les Tranſactions philoſophiques de l'année 1772, & M. Bailly l'a également fait graver & placer dans ſon hiſtoire de l'aſtronomie ancienne. On ne peut pas trop multiplier ni répandre la connoiſſance de pareils monumens.

Il ſe rencontre quelques petites différences entre ce zodiaque & celui que je tiens des Brames. Malgré ces petites différences, qui m'ont à la vérité fait croire que ce zodiaque étoit l'ouvrage des architectes Indiens, & non des Brames, je le regarde avec MM. Maskelyne & Bailly, comme très-curieux, & encore comme très-ancien; & je lui dois ce qui fait l'objet de ce Mémoire.

Ce zodiaque en effet m'a fait réfléchir à une choſe que j'avois dite dans mon voyage, c'eſt que notre ancienne architecture gothique eſt dans le goût Indien, en ſorte que cette architecture, bien antérieure à celle que nous avons priſe depuis des Grecs & des Romains, vient comme le zodiaque d'une ſource commune ; d'où je conclus que le même génie doit avoir guidé nos anciens architectes Goths & les architectes Indiens. D'après cette idée, je cherchai dans nos anciennes égliſes gothiques, s'il ne ſe trouveroit pas quelques traces des ſignes du zodiaque, dans le goût,

ou à peu-près, de celui des Tranſactions philoſophiques. J'eus bientôt la ſatisfaction d'en trouver un ſous une des portes de l'égliſe de Paris.

Je fus tout étonné de le voir pour la première fois, au bout de trente ans & plus de ſéjour dans cette capitale.

Ce zodiaque eſt très-bien conſervé, ſi on en excepte le Sagittaire, le Capricorne & le Verſeau, qui ſont un peu mutilés. On le voit au bas de la tour ſeptentrionale à droite & à gauche de l'entrée de l'égliſe, ſur deux eſpèces de pilaſtres, en ſorte qu'il y a ſix ſignes de chaque côté. A gauche, ils commencent en bas par le Verſeau, & finiſſent au Lion placé au haut du pilaſtre. A droite, les ſix autres commencent par le Capricorne, & finiſſent au Cancer, placé vis-à-vis le Lion au haut de la colonne; mais l'ordre des ſignes m'a paru interverti, en ce que le Lion eſt mis où devroit être placé le Cancer, & réciproquement.

A côté de ces ſignes, ſur l'autre face des pilaſtres, on a mis autant de figures ſymboliques, qui repréſentent les travaux & les occupations de la campagne, pendant que le ſoleil parcourt les douze ſignes. Je ferai obſerver ici une choſe importante, c'eſt que ces ſymboles ſont accommodés au climat de Paris & des environs. J'ai fait deſſiner le tout avec beaucoup de ſoin; j'y ai joint le zodiaque des Tranſactions philoſophiques : j'ai préſenté le tout à l'Académie, avec des réflexions ſur ces deux monumens; on peut les voir parmi les Mémoires de cette Académie, pour 1785. J'avois laiſſé là ce zodiaque depuis cette époque; mais quelques réflexions que pluſieurs ſavans curieux d'antiquités m'ont fait faire, principalement M. l'abbé le Blond, de l'Académie des belles-lettres, ſont cauſe que j'y ſuis revenu, & je ne regrette pas le temps que j'y ai employé.

J'avois négligé de marquer dans mon deſſin douze autres figures également ſymboliques, que j'avois cependant bien remarquées d'abord; mais je ne voyois pas alors qu'elles euſſent un rapport bien évident avec les douze ſignes du zodiaque. Ayant jugé depuis que tout devoit former une

eſpèce de tableau relatif au même objet, j'en ai fait le ſujet d'un autre Mémoire; & j'ai fait faire un deſſin de ces douze tableaux, pour le joindre au premier (on le verra parmi les planches) : je dois dire ici en deux mots en quoi il conſiſte.

La porte où l'on voit le zodiaque, eſt ſéparée en deux par un mur que ſoutient en dedans une colonne d'un goût gothique & très-ancien, au-devant duquel eſt une eſpèce de pilaſtre qui déborde un peu le mur de chaque côté.

C'eſt ſur les faces latérales de ce pilaſtre que ſont ſculptées les douze figures ſymboliques dont je viens de parler, & en face par conſéquent de celles qui ſont à côté des douze ſignes du zodiaque. Parmi ces figures, on en remarquera principalement une à deux faces qui regardent l'une l'orient & l'autre le couchant, & qui ne peut être que le Janus des anciens Latins, comme nous le ferons voir ci-après, & non point ce qu'en diſent MM. Dupuis & Lalande. Au-devant de ce pilier eſt un piédeſtal gothique, ſur lequel poſe une figure de la Vierge avec l'enfant Jéſus entre ſes bras. Plus bas, on a mis autour du piédeſtal, en petites figures comme ſont celles du zodiaque, l'hiſtoire abrégée d'Adam, celle d'Eve & du ſerpent; ce monſtre paroît ſous une forme ſingulière, entre les branches d'un arbre qui s'élève du milieu des figures. Son corps, beaucoup plus gros que ne ſemble le demander la petiteſſe de ſa queue, avance le long du piédeſtal, & s'y ſoutient au moyen de deux eſpèces de pattes comme celles des lézards; ſa queue eſt entortillée entre les branches de l'arbre; & ſa tête, ſous la forme d'une eſpèce de figure humaine, poſe ſous le pied droit de la Vierge qu'elle ſemble écraſer : enfin Adam & Eve ſont chaſſés du paradis terreſtre. Je ne parlerai point ici, dans la crainte d'être trop long, d'un zodiaqe à peu-près pareil que l'on peut voir à l'abbaye des Bénédictins à Saint-Denys, où l'on a mis auſſi un Janus à deux faces, mais que je ne fais qu'indiquer ici, pour paſſer à un autre monument de cette eſpèce, que j'ai encore

découvert, depuis plus d'un an, dans l'églife de Sainte-Geneviève de Paris. Il a cela de commun avec celui des tours de Notre-Dame, qu'il eſt accompagné également de l'hiſtoire de la création, de la chute d'Adam & d'Eve, & de la punition qui fuivit; mais le zodiaque de Saint-Geneviève eſt peut-être plus curieux que celui de Notre-Dame, en ce qu'il m'a paru qu'on y remarquoit des veſtiges d'hiéroglyphes Égyptiens, & qu'on ne trouve point à Notre-Dame; ce qui femble cependant prouver que dans ces temps-là, on les employoit quelquefois à fervir d'ornemens dans les égliſes. Cela m'a paru encore très-évident, par les choſes que j'ai vues à la baſilique de Saint-Germain-des-Prés, bâtie, felon la tradition, fur les ruines d'un temple d'Iſis.

Pour revenir à notre nouveau zodiaque, il eſt ſculpté fur les chapiteaux des colonnes de la nef. Il n'eſt pas ſi apparent, à beaucoup près, que celui de Notre-Dame, parce qu'il eſt environné de quantité d'ornemens, parmi leſquels les ſignes ſont, pour ainſi dire, confondus; cependant dans un beau jour, on les diſtingue très-bien en y donnant un peu d'attention.

Deux choſes m'ont arrêté quelque temps, lorſque j'ai voulu décrire ce zodiaque. La première, c'eſt que l'ordre des ſignes eſt tellement interverti, que j'ai balancé fur celui que je ſuivrois.

La feconde, c'eſt que le Cancer & le Scorpion ne s'y trouvent point; & que comme les ſignes ne ſont point ſur deux pilaſtres, comme à Notre-Dame, qu'ils ne ſe ſuivent point dans leur ordre ordinaire, il ne m'a pas été facile de deviner ce qu'on a voulu dire par les figures qui ſont à la place de ces ſignes qui manquent. Le Cancer ſemble avoir été déſigné de temps immémorial par le ſigne naturel, c'eſt-à-dire, par un crabe, ou par une groſſe écreviſſe de mer, comme il eſt à Notre-Dame; de même le Scorpion l'a été par l'animal connu ſous ce nom. Dans le zodiaque de Sainte-Geneviève, on ne voit ni l'un ni l'autre. J'ai ſeulement remarqué qu'à côté du

Lion, on avoit placé un grand oiseau qui a le bec long & crochu, & à côté du Sagittaire, une espèce de dragon; & entre le Verseau & le grand oiseau dont je viens de parler, un animal que je ne saurois désigner bien exactement: c'est bien une espèce de lézard approchant de la forme de la salamandre, mais cet animal est pourvu de six pattes. Nous allons cependant essayer d'expliquer ces trois symboles, & de découvrir lequel de ces trois animaux désigne le Cancer, lequel représente le Scorpion. Nous croyons l'avoir découvert; nous n'en serons pas moins disposés à recevoir & à admettre toute autre explication qu'on pourroit nous proposer, préférable à la nôtre.

Nous observerons avant tout, que ce zodiaque est sur deux seules colonnes; qu'il n'y a que cinq signes sur l'une des deux, & que les sept autres sont sur l'autre colonne.

Pour aider à le reconnoître, je dirai que la nef de Sainte-Geneviève est soutenue par huit colonnes, dont quatre de chaque côté. Je fais commencer le zodiaque à la seconde colonne des quatre qui sont à la gauche en entrant. C'est autour du chapiteau de cette seconde colonne que sont ciselés les cinq premiers signes; les sept autres sont autour du chapiteau de la quatrième colonne parmi les quatre que l'on trouve à droite. On voit donc sur le chapiteau du second pilier de la gauche, & sur la face qui regarde la nef,

1.° Le capricorne, désigné par une chèvre & un bouc qui se suivent; la Chèvre est debout à droite, le bouc à gauche. Cette figure-ci est terminée comme nous terminons encore aujourd'hui le Capricorne, par une longue queue de poisson, mais repliée deux fois sur elle-même. Ensuite tournant autour de la colonne, en la tenant sur la droite on voit sur la seconde face,

2.° Les Poissons, désignés par deux poissons avec leur lien, comme ils sont figurés par tout. En continuant de faire le tour on voit sur la troisième face,

3.° Le Taureau sur la droite;

4.° Le Bélier sur la gauche.

Enfin, ſur la quatrième face on voit au milieu,

5.° Les Gémeaux, déſignés en effet par deux enfans naiſſans qui ſe tiennent ſous les bras.

De-là traverſant la nef par une ligne diagonale, on arrive à la quatrième colonne du ſecond rang. Là, on voit ſur la face du chapiteau qui regarde la nef,

6.° Le Cancer, qui m'a paru déſigné ſous la figure d'un ibis, eſpèce de cigogne, oiſeau de paſſage qui étoit en Égypte l'avant-coureur du débordement du Nil & du lever du grand Chien, qui arrivoient ſous le ſigne du Cancer.

Pour rendre raiſon de ceci en deux mots, nous ferons obſerver que chez les Égyptiens, le zodiaque étoit partagé en douze maiſons, gouvernées ou dominées chacune par un génie particulier; c'étoient les douze grands dieux d'Égypte. Le Cancer fut le partage de Mercure; de-là, la ſeptième maiſon, qui eſt celle du Cancer, parce qu'ils commençoient à compter par le Capricorne, étoit conſacrée au génie ou dieu Hermanubis, c'eſt-à-dire, à Mercure, qu'ils repréſentoient ſous la figure d'un ibis, &c. A Racota, contrée d'Égypte, ſur le bord de la mer, où depuis fut bâtie Alexandrie, les habitans honoroient Mercure ſous la forme de cet oiſeau; & dans les anciens planiſphères Égyptiens on trouve en effet le Cancer déſigné ſous cette forme, ou bien ſous celle d'une tête & d'un cou de cigogne, avec une queue d'écreviſſe. *(Voyez Kircher, Œdip. Egypti, tom. I & II.)*

7.° A droite de l'ibis eſt le Lion, ſous la forme d'un véritable lion qui ſeroit de bout; puis tournant la colonne la laiſſant à gauche, on voit ſur la ſeconde face du chapiteau,

8.° La Balance, déſignée par une figure de femme qui tient en effet une balance dans la main gauche.

9.° A droite eſt une figure mutilée, qui me paroît être une femme, & qui en conſéquence ne peut être que la Vierge. Continuant de faire le tour, on voit ſur la troiſième face,

10.° Le Sagittaire, ce monstre composé d'un corps entier de cheval, sur lequel s'élève un corps humain armé d'un arc & d'une flèche qu'il est censé lancer sur le Scorpion : mais ici la partie humaine de ce monstre est dans une position opposée à celle qu'elle a dans nos cartes célestes; elle est tournée vers la croupe ou le derrière de l'animal; dans cette attitude elle lance sa flèche. A droite, on voit sur la même face,

11.° Le Scorpion, désigné, à ce que j'ai jugé, sous la forme d'un dragon qui tourne la tête du côté opposé au Sagittaire, comme pour s'échapper. Celui-ci au contraire, par son attitude d'avoir le corps & la tête tournés du côté du dragon, semble en effet ne s'être retourné que pour lui lancer sa flèche. Voici l'explication de ce symbole.

Selon Kircher, le Scorpion est Typhon que poursuit le Sagittaire, & qu'on représente ordinairement sous la forme d'un énorme géant, le corps entortillé de serpens, dont les doigts sont également de longs serpens, & dont les pieds qui se joignent, finissent en queue de serpent. Mais le pere Kircher ajoute que quelques auteurs racontent que Typhon étoit un insigne dragon qui portoit le ravage & la désolation par-tout; c'est ce qui m'a fait conjecturer qu'à Sainte-Geneviève on avoit mis à la place du Scorpion, le géant Typhon sous la figure du dragon que l'on trouve à côté du Sagittaire.

Enfin la quatrième face représente,

12.° Le Verseau. C'est un homme debout, qui renverse une cruche pleine d'eau qu'il a entre ses bras. D'un côté, à gauche, auprès de la chute de l'eau, on voit un poisson qui lance de l'eau par la bouche. C'est le poisson austral, l'Oxirinque & le Lépidote des Egyptiens & des Grecs, & l'Oannès des Chaldéens, qui dans les anciennes cartes de la primitive sphère étoit représenté à-peu-près ainsi, c'est-à-dire, recevant dans sa bouche l'eau du Verseau. *(Voyez Hygin.)*

De l'autre côté du Verſeau à droite, on voit dans un coin l'animal à ſix pattes dont j'ai parlé, ſous la forme alongée d'un lézard, & que j'ai ſuppoſé être un ſymbole de l'eau, parce que ſemblable au poiſſon auſtral, il lance de l'eau par la bouche. Par-là j'ai jugé que cet animal d'un côté, le Poiſſon auſtral de l'autre, & le Verſeau entre deux, formoient un ſeul & même ſymbole qui déſigne le ſigne du Verſeau.

Une choſe qui m'a paru ſingulière, c'eſt que ce même animal avec huit pattes au lieu de ſix, eſt dans le zodiaque de Saint-Denys, à la place où paroîtroit devoir être le Scorpion, comme on verra ci-après.

Tels ſont les douze ſignes du zodiaque, ſculptés dans l'égliſe de Sainte-Geneviève. Je me ſuis déterminé à faire faire des deſſins correcls de ces curieux chapiteaux, avec d'autant plus d'empreſſement qu'ils intéreſſent l'hiſtoire de l'aſtronomie, que cette égliſe va bientôt ſe trouver dans le cas d'être renverſée, & qu'il eſt par conſéquent important de les conſerver & de les faire connoître.

En face de ce dernier pilier, de l'autre côté de la nef, on a mis autour du chapiteau de la colonne qu'on y voit, l'hiſtoire de la Genèſe, comme on a fait à Notre-Dame.

On voit la formation d'Eve d'une côte d'Adam, qui paroît pendant ce temps fort tranquille dans un coin. Une inſcription latine qu'on lit au haut, annonce l'eſpèce de raviſſement où il ſe trouva en voyant une compagne: mais pendant qu'il s'occupe à dormir, Eve s'amuſe à converſer avec le ſerpent; celui-ci lui offre la pomme fatale, elle la prend de ſa propre bouche: elle eſt chaſſée du paradis terreſtre avec Adam, comme au zodiaque de Notre-Dame.

Mais ce chapiteau renferme à la ſuite, des figures dont je n'ai pû encore découvrir le ſens ou l'allégorie; on en voit une, par exemple, au milieu d'une eſpèce de treille garnie de grappes de raiſin, que j'aurois volontiers priſe pour Noé, ſi ce n'eſt qu'elle ſe termine par une longue queue de poiſſon. Tel toute l'antiquité nous peint Dagon,

le

le Dieu des Phéniciens, telle encore on nous peint la Déesse de Syrie, qui est l'Isis des Égyptiens.

Quant à l'antiquité de ce zodiaque, j'avoue qu'il est fort difficile de fixer son époque d'une manière bien précise; nous allons cependant hasarder ici notre opinion, sans prétendre vouloir batailler pour la soutenir. A en juger par le goût de l'architecture, de la sculpture, les traits des figures, & par les emblèmes qui y sont, il m'a paru qu'il faudroit faire remonter ce monument aux premiers siècles de la monarchie, vers les temps de Clovis; & c'est en effet à cette époque, ou à peu-près, que les fondemens de la basilique de Saint-Pierre & de Saint-Paul, qui est aujourd'hui Sainte-Geneviève, furent jetés. Je ne peux pas, à la vérité, ignorer que cette église fut pillée, & peut-être en partie brûlée ou renversée par les Normands. Cependant il y a toute apparence que les colonnes de la nef ne furent pas toutes détruites, & qu'on a rétabli cette église successivement, en laissant subsister ce qui existoit déjà, ou en se servant des anciens matériaux; car c'étoit assez l'usage de ces temps-là. Une chose est vraie dans tout ceci, c'est que le portail ou l'ancienne entrée de ce temple qui étoit du temps de Clovis, subsiste encore aujourd'hui, ainsi que les deux figures qui représentent Saint-Pierre & Saint-Paul, à qui cette basilique fut d'abord dédiée: ce sont encore des restes évidens de l'ancien portail; le dessus qui s'en alloit de vétusté, a été refait au commencement de ce siècle.

Ces figures de Saint-Pierre & de Saint-Paul, sont dans le même goût que celles que l'on voit sous le portail de l'abbaye Saint-Germain, qui sont-là depuis la même époque, ainsi que tout le portail & la grosse tour qui pose dessus, jusqu'à l'endroit où sont les bourdons; car la partie où ils sont, a été construite depuis. En général, je dirai ici en deux mots que les recherches que j'ai faites à cette occasion, m'autorisent à pouvoir avancer que nos anciennes églises, l'abbaye Saint-Germain, celle de Saint-Denys en France, Notre-Dame de Paris, ont été bâties à plusieurs

fois, & que le devant de ces églises, jusqu'à une certaine hauteur & même une partie du bas de la nef, comme à Saint-Deuys, sont des restes des premiers édifices élevés dans les premiers siècles de la monarchie; la même chose peut être arrivée à Saint-Geneviève. *(Premier volume de l'histoire de Paris, histoire de Saint-Germain & de Saint-Denys.)*

La religion d'Isis, qui n'est autre chose que le culte rendu à la nature personnifiée, étoit venue dans les Gaules s'y établir avec les Romains leurs conquérans. Cette religion qui s'étoit pour ainsi dire humanisée & civilisée chez les Romains, & qui n'avoit par conséquent rien de fort austère, eut par cette raison bientôt forcé les Druides barbares & sanguinaires, à lui céder le terrain. On sait qu'on l'a professée principalement à Paris & dans les environs ; mais elle devint bientôt foible & languissante sous nos premiers rois ; cependant dans cet état, elle dominoit encore, & ce ne fut que sous le roi Childebert qu'elle fut enfin bannie de Paris & des pays qui étoient soumis à ce prince, sans qu'il fût permis de la professer publiquement. Quoiqu'il ne lui fût plus possible de se relever, il dut rester encore pendant quelque temps des traces de cette ancienne religion; c'est selon moi la raison pour laquelle on voit dans ces anciennes églises dont nous parlons, des monumens qui tiennent encore à Isis.

C'étoit alors l'affaire des maçons, architectes, sculpteurs Goths, que je suppose qu'on laissoit absolument libres sur cet article; car, quant aux astronomes, il est bien certain que si l'on peut dire qu'il y en eut alors à Paris, ces astronomes n'ont point guidé les architectes, & n'ont eu aucune part à ces ornemens. Par conséquent, ces signes du zodiaque intervertis dont nous venons de parler, ne sont qu'un ouvrage d'idée de ces sculpteurs Goths, encore infectés sans doute de la religion d'Isis.

Une autre raison semble se joindre à celle-ci. Dom Bouillard, dans son histoire de Saint-Germain des Prés,

nous dit que l'opinion commune étoit qu'à l'endroit où est aujourd'hui cette église, les prètres d'Isis avoient un temple, & que c'est sur cet ancien temple, qui tomboit en ruine, que fut bâtie la basilique de Saint-Vincent, aujourd'hui Saint-Germain, afin, ajoute-t-il, de faire succéder le culte du Dieu du ciel à celui des fausses divinités. Si cela est ainsi, on attachoit donc alors une espèce de devoir religieux à bâtir nos temples sur les temples payens ou idolâtres; on ne prenoit donc pas à tâche d'en bannir les ornemens Égyptiens & Isiaques, lorsqu'ils pouvoient y être. Dès-lors, ils dûrent se trouver mêlés avec ceux qu'on tiroit du fond de notre religion; & cela est bien évident à Saint-Germain, car on y voit des espèces d'hiéroglyphes qui ont rapport au culte que l'on rendoit à la nature dans la religion d'Isis; & quoiqu'on n'y trouve du zodiaque que le seul signe des Poissons, ce signe, tel qu'il est désigné ici, me porteroit assez à croire que dans le principe tout le cercle entier y fut sculpté. Quoi qu'il en soit, en entrant dans cette église par le grand portail, on trouve à gauche un pilier engagé dans le mur, d'une médiocre grosseur, & qui aide avec le mur à soutenir la tour de ce côté: le chapiteau de ce pilier, reste vraisemblablement du vestibule du temple d'Isis, engagé qu'il est dans le mur, ne présente que trois faces. Or, ces trois faces offrent un symbole aquatique des plus singuliers, en ce qu'il m'a paru être, à quelques légères différences près qui ne touchent point au fond de la chose, celui que le père Kircher nous donne pour le signe des Poissons dans l'ancien système Egyptien. On y voit donc cinq poissons qui paroissent là jetés comme au hasard; une assez grande figure, dont la tête représente une personne d'un âge mûr, accompagnée d'une chevelure qui ressemble beaucoup à celle qu'on donne quelquefois à Isis & à Osiris; mais la partie inférieure se termine en poisson. Cette figure a une espèce de main, qui lui sert à saisir un des poissons. Vis-à-vis d'elle, est une pareille figure à visage humain, & dont

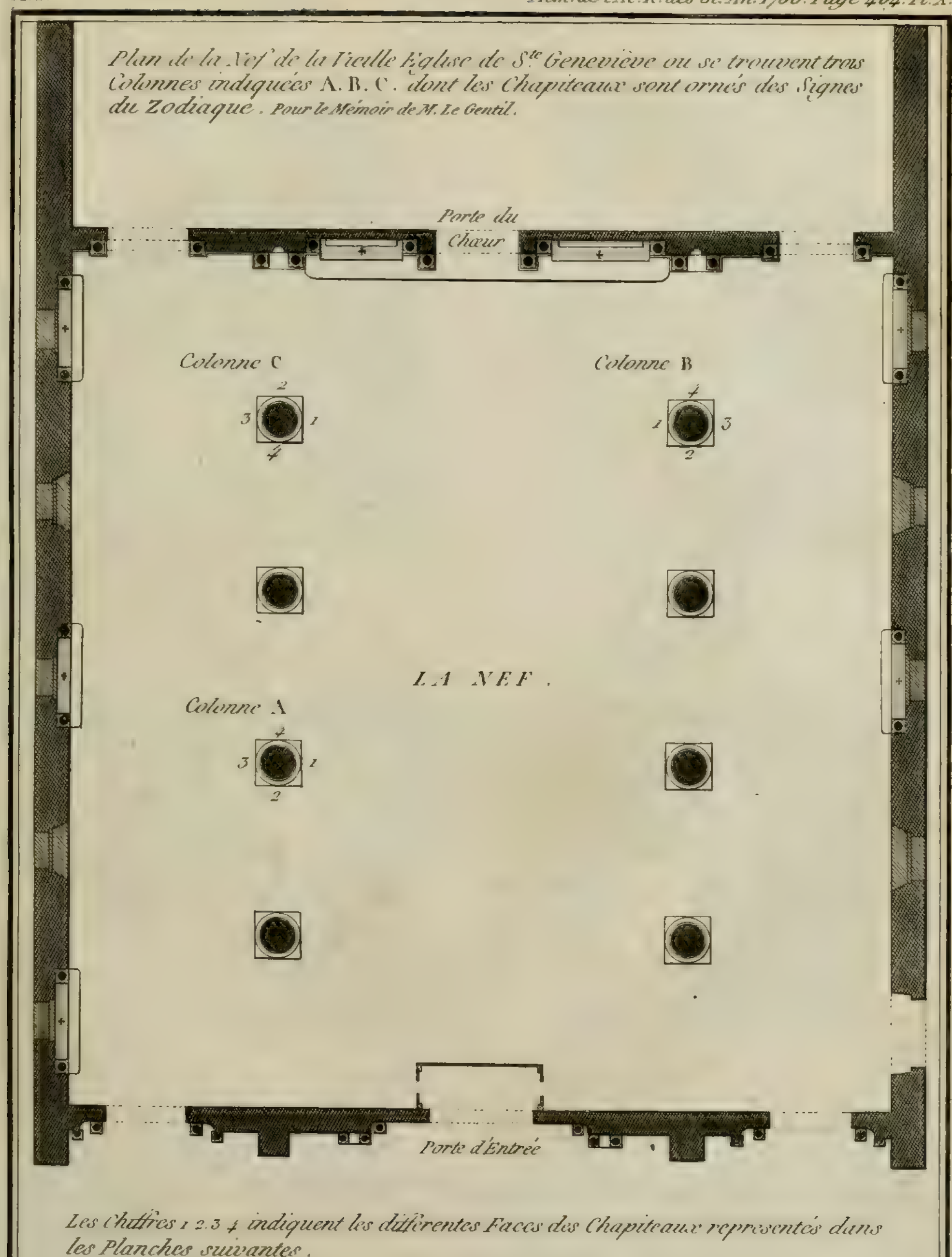
la partie d'en bas finit également en poiſſon; elle en tient auſſi un ſous ſon bras. Enfin, au bas de cette eſpèce de tableau, on a placé les deux poiſſons du zodiaque avec leur lien.

C'eſt au ſigne des Poiſſons que toutes ces choſes ont rapport, puiſqu'il eſt évident qu'ils y ſont. Mais pourquoi placer au même endroit cinq autres poiſſons, & deux monſtres moitié hommes & moitié poiſſons, tenant chacun un de ces poiſſons entre leurs bras? il me paroît que le père Kircher va nous en donner l'explication.

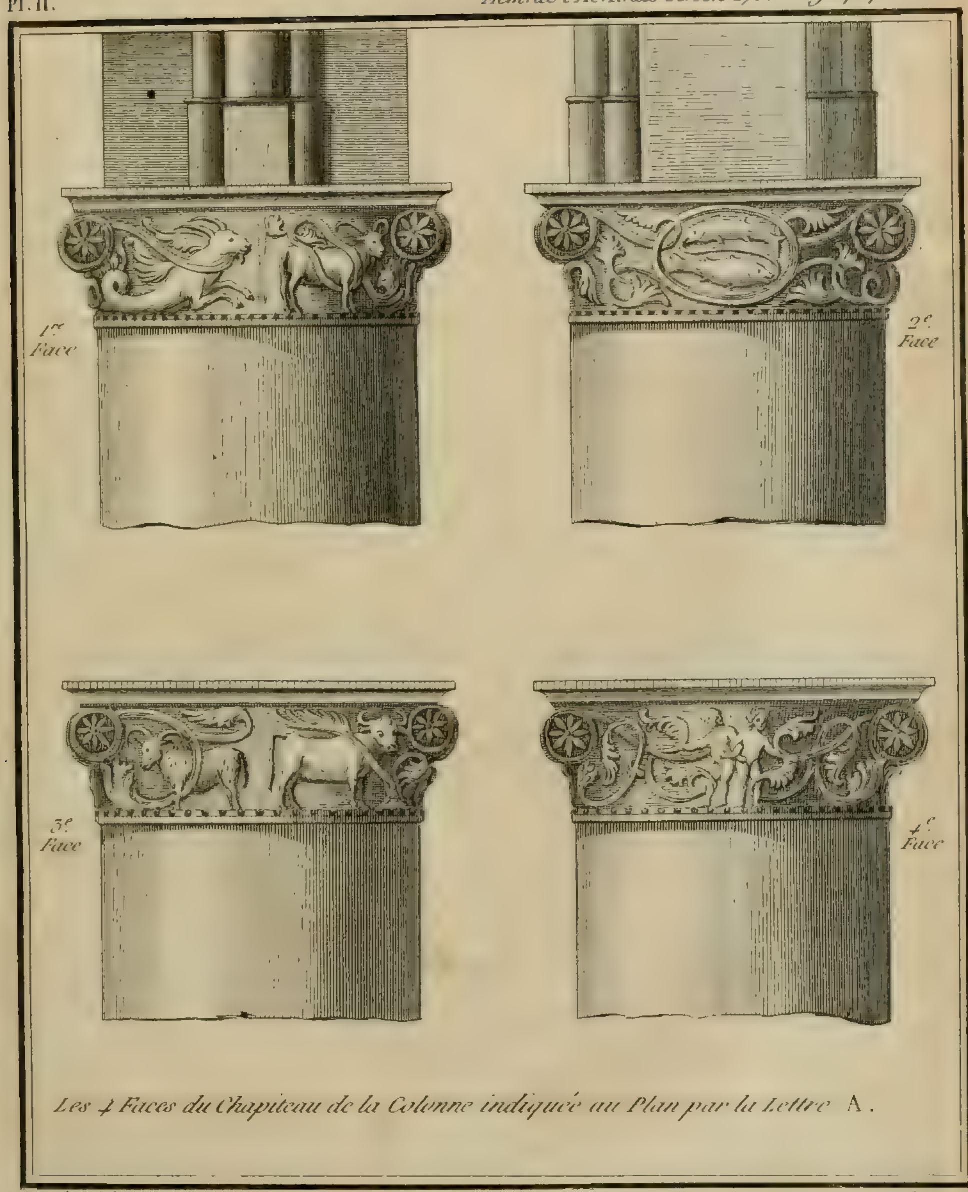
Chez les Égyptiens, le ſigne des Poiſſons ou la troiſième maiſon du zodiaque, à commencer toujours par le Capricorne, étoit dédié ou conſacré au génie Icton; & par ce génie, ils entendoient, ſelon Jambique, une repréſentation de la nature, ſource de la fécondité univerſelle. Or, les Égyptiens ne crurent pouvoir mieux repréſenter & avec plus d'énergie, cette fécondité univerſelle de la nature, que par l'emblème des poiſſons dont la fécondité eſt immenſe; en conſéquence, ils peignirent dans leur zodiaque ce génie univerſel, ſous la figure d'une femme depuis la ceinture juſqu'à la tête, & qui ſe terminoit en poiſſon par la partie inférieure; ils joignoient ces deux poiſſons avec un lien. Cette figure avoit deux bras & deux mains; c'étoit au fond l'Iſis de Syrie. (*Kircher*, *Œdip. Égypt. t. II.*)

Voilà donc, à ce qu'il nous ſemble, un ſymbole ou hiéroglyphe Égyptien, relatif au zodiaque, & par conſéquent à l'aſtronomie, dans la baſilique de Saint-Germain. C'eſt un monument que tout le monde eſt à portée de voir par ſoi-même.

C'eſt à quoi ſe réduiſent les marques d'un zodiaque à Saint-Germain; les piliers de la nef ſont garnis de beaucoup d'autres figures, mais qui n'ont aucun rapport à ce cercle. Les chapiteaux de ceux de la droite contiennent des accouplemens de différens animaux monſtrueux, & dans le goût Égyptien. Pluſieurs ont, comme les Égyptiens la donnoient auſſi quelquefois à Oſiris, une tête d'épervier,



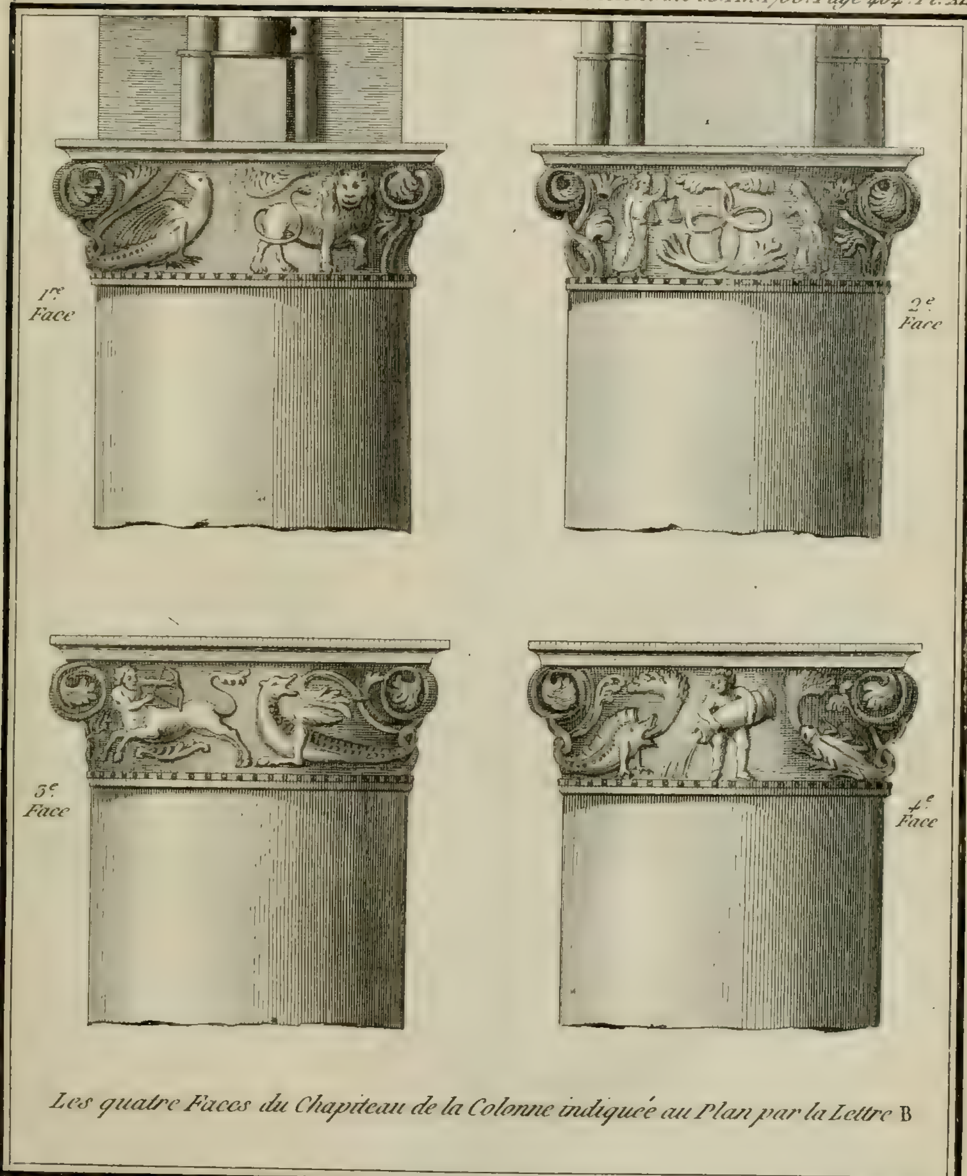
Fossier del. F. Le Gouaz sc.



Les 4 Faces du Chapiteau de la Colonne indiquée au Plan par la Lettre A.

Fossier del. *Y. Le Gouaz sc.*

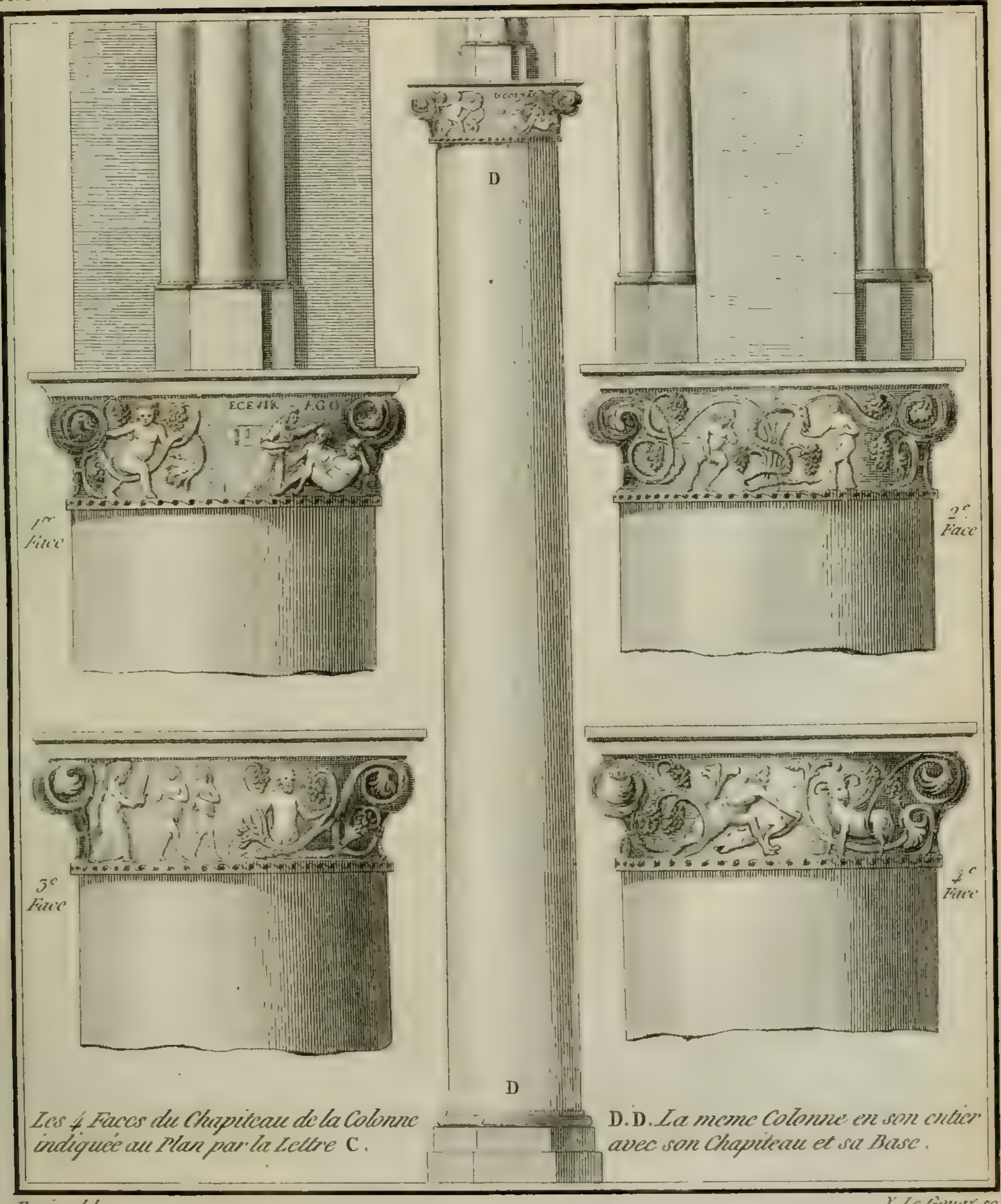




Les quatre Faces du Chapiteau de la Colonne indiquée au Plan par la Lettre B

Fossier del. *Y. Le Gouaz sc.*





Les 4 Faces du Chapiteau de la Colonne indiquée au Plan par la Lettre C.

D.D. *La meme Colonne en son entier avec son Chapiteau et sa Base.*

Fossier del. *Y. Le Gouaz sc.*

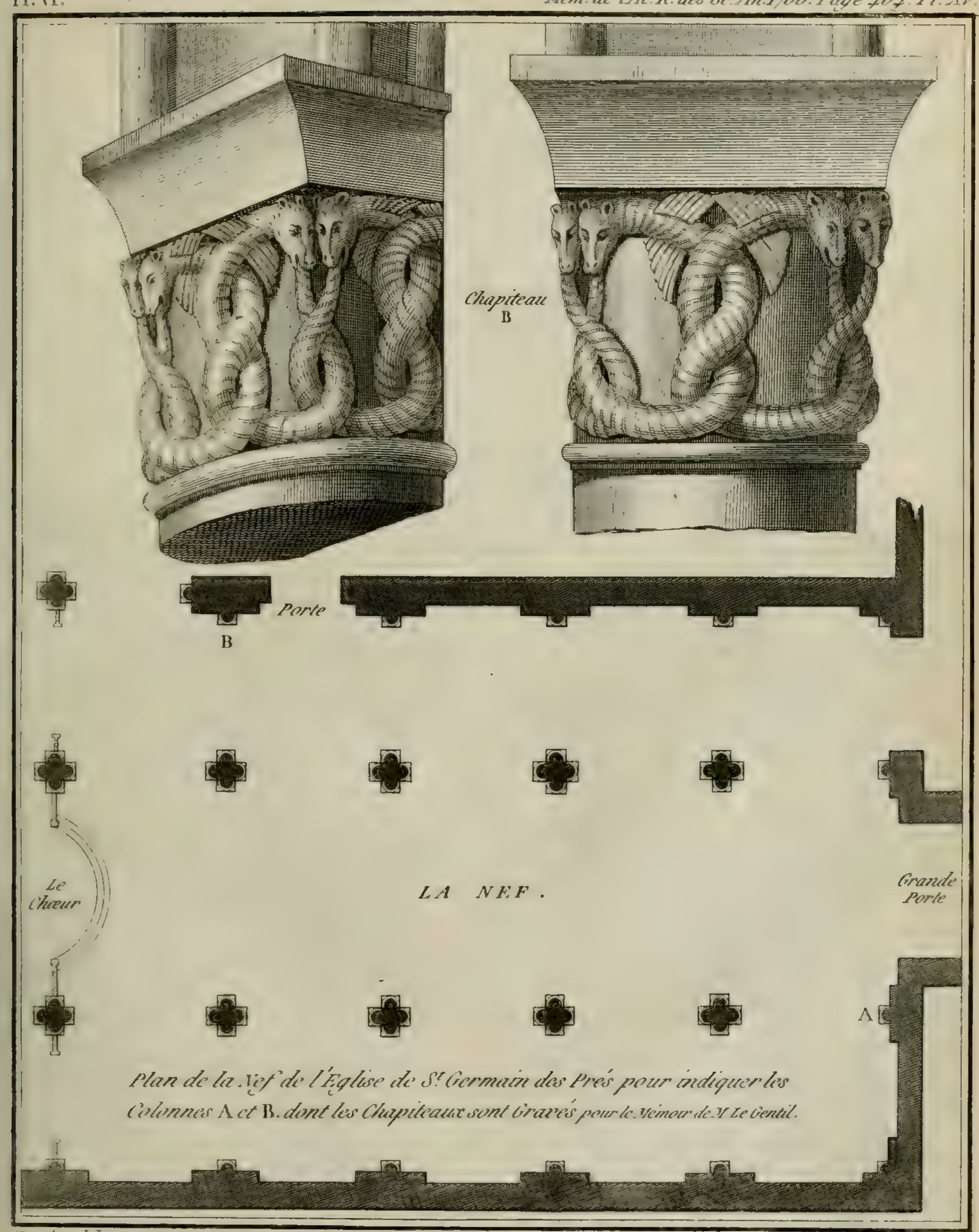


Fossier del.

Y. Le Gouaz sc.

Portail de la Vieille Eglise de S.te Genevieve ou l'on voit les parties A.B.C.D. qui sont d'Ancienne Construction.





Plan de la Nef de l'Eglise de St. Germain des Prés pour indiquer les Colonnes A et B. dont les Chapiteaux sont Gravés pour le Mémoir de M. Le Gentil.

Fossier del. Y. Le Gouaz sc.





Fossier del.

Y. Le Gouaz sc.



(l'on peut consulter Kircher, dom Montfaucon, ou enfin l'histoire du ciel par Pluche, qui n'a fait que copier ces deux auteurs, au mot *Horus;*) & si on regarde au contraire les chapiteaux des colonnes opposées, ou de la gauche, ils sont garnis de figures tirées évidemment du fond de la religion catholique, & qui paroissent aussi anciennes que les autres. Mais toutes ces figures, quelque intéressantes qu'elles puissent être par elles-mêmes, ne sont point de notre ressort : nous devons donc nous contenter de citer encore ici pour dernières marques de symboles Égyptiens, & en même temps astronomiques à Saint-Germain, plusieurs grands serpens, tels qu'on nous peint certains serpens ailés de la Libye ou d'Arabie que le vent apportoit en Égypte, pour y être la proie & la pâture des ibis. Ces serpens ont en effet de même des ailerons sur le cou, & sur la tête des espèces de crêtes ou de couronnes, comme Kircher les leur donne; ils sont de plus entrelacés deux à deux en formant quatre nœuds, & ils finissent par se dévorer le bout de la queue. Or, le père Kircher nous dit que cette espèce de symbole, qui vient encore des Égyptiens, désignoit chez eux l'année hyérophantique ou hiéroglyphique de 1460 ans, de 365 jours & $\frac{1}{4}$ chacune; & les quatre plis, les années bissextiles de quatre ans en quatre ans.

On remarquera aisément le pilier où ce monument se trouve, si l'on entre par le portail latéral de Saint-Germain; il est à droite, le premier pilier engagé que l'on trouve, faisant très-vraisemblablement avec le mur les restes de l'ancien temple. Ce pilier est presque contigu à un autre, mais très-moderne, d'une architecture Corinthienne, & qui forme seul le coin de la chapelle Saint-Maur de ce côté.

Je suis très-surpris que le père Mabillon qui s'est attaché à décrire le portail de Saint-Germain avec un soin si scrupuleux, à cause de son antiquité, n'ait pas dit un mot des chapiteaux des colonnes de la nef, qui sont peut-être plus curieux encore & plus intéressans.

DESCRIPTION

Du zodiaque que l'on voit à l'Abbaye des Bénédictins, à Saint-Denys en France.

Par M. LE GENTIL.

Ce zodiaque, comme celui de Notre-Dame de Paris, est sur deux pilastres, à la porte d'entrée au bas de la tour septentrionale : cette tour a une flèche.

Il manque à la rigueur trois signes, sans qu'il soit possible de deviner la cause de cette omission, si ce n'est le caprice de l'architecte. C'est sans doute par une raison à peu-près la même, que les neuf signes seulement qu'on y voit sont intervertis. Ces neuf signes sont le Taureau, le Bélier, les Poissons, le Verseau, les Gémeaux, la Balance, le Sagittaire & le Capricorne : j'ai compté pour un signe une espèce de salamandre, ou espèce de lézard à huit pattes, pareil à celui du zodiaque de Sainte-Geneviève, placé entre la balance & le sagittaire. Le pilastre à gauche en entrant, est divisé comme celui de la droite en dix cadres ou carrés, de la grandeur à peu-près de ceux qui sont à Notre-Dame.

CADRES de la GAUCHE, en commençant par le haut.

1.er *Cadre.* C'est une figure de femme nue, couchée sur une espèce de linceul.

2.e *Cadre.* Il représente des fleurons, & ne contient que des ornemens.

3.e *Cadre.* Il renferme le Taureau.

CADRES de la DROITE, en commençant par le haut.

1.er *Cadre.* Les Gémeaux.

2.e *Cadre.* Il contient des ornemens seulement; c'est une espèce de rose.

3.e *Cadre.* C'est la Balance; il représente une figure de femme assise dans un fauteuil, tel qu'on fait voir celui de Dagobert. Cette femme tient une balance en l'air, comme dans le zodiaque de Sainte-Geneviève.

CADRES de la GAUCHE.

4.e Cadre. Il ne contient que des ornemens, & un enfant qui repose au centre, la tête appuyée sur la circonférence d'une espèce de cerceau.

5.e Cadre. Il renferme le bélier.

6.e Cadre. Il n'est rempli que d'ornemens.

7.e Cadres. Ce sont les Poissons.

8.e Cadre. Il est rempli d'ornemens, qui représentent une touffe de feuilles de roseaux, à ce qu'il sembleroit; deux oiseaux à bec assez long, sont entre les feuilles, & qui semblent se becqueter comme font des tourterelles.

9.e Cadre. Le Verseau; c'est un homme debout, & qui renverse une cruche ou un pot plein d'eau.

CADRES de la DROITE.

4.e Cadre. Il ne renferme que des ornemens; ce sont des espèces de fleurons.

5.e Cadre. Il renferme un animal à huit pattes, pareil exactement à celui que l'on voit à Sainte-Geneviève, mais qui n'en a que six. C'est à ce qu'il m'a paru une espèce de lézard; il est entre la Balance & le Sagittaire, & paroît par cette raison répondre au Scorpion.

6.e Cadre. Il n'est rempli que d'ornemens.

7.e Cadre. C'est le Sagittaire, comme celui de Sainte-Geneviève, & dans la même attitude.

8.e Cadre. Espèces de grandes fleurs; une femme nue, groupe avec ces fleurs.

9.e Cadre. Le Capricorne; c'est un bouc dans le goût de celui de Sainte-Geneviève: il n'a que les deux pieds de devant; le reste de son corps se termine en queue de poisson repliée, comme à Sainte-Geneviève, deux fois sur elle-même.

CADRES de la GAUCHE.

10.e Cadre. C'eſt une figure dont la tête eſt entière à la vérité, mais le viſage eſt détruit en partie. Cette figure eſt aſſiſe, une jambe ployée, & dont le pied poſe à terre, c'eſt le gauche; l'autre jambe élevée en l'air comme cherchant à l'appuyer contre le mur; & qui ſemble en même temps de ſes deux mains & de ſa tête ſoutenir le haut du cadre, & par conſéquent, tous les neuf autres qui avec celui-ci forment la hauteur du pilaſtre.

CADRES de la DROITE.

10.e Cadre. C'eſt une figure pareille, & dans la même attitude à peu de choſe près que celle qui eſt à la gauche, déſignée ſous le même numéro. Ces deux figures ſont couvertes chacune d'un linceul.

Il n'y a point ici de figures ſymboliques à côté de ce zodiaque, comme à Notre-Dame; c'eſt ce qui fait que ceux qui ſont allés le voir depuis que je l'ai fait connoître, n'en ont pu voir, mais je les ai trouvés cet automne.

On les a placées au bas de l'autre tour, qui n'a point de flèche. Elles ſont évidemment relatives au zodiaque & aux douze mois de l'année : il y en a pluſieurs qui offrent les mêmes idées que celles de Notre-Dame, & qui repréſentent les mêmes occupations ruſtiques dans les mêmes temps de l'année.

Ces emblèmes ſont également dans les deux pilaſtres qui forment l'entrée de l'égliſe au bas de la tour; ce ne ſont point des quarrés, mais des médaillons.

Deſcription des douze ſymboles qui répondent aux ſignes du zodiaque dont on vient de voir la deſcription.

MÉDAILLONS de la GAUCHE.

En tête des médaillons de la gauche, eſt une figure toute nue qui ſemble ſe repoſer, & même dormir.

MÉDAILLONS de la DROITE.

En tête des médaillons de la droite, eſt une figure nue qui ſemble également dormir, & ſe repoſer.

MÉDAILLONS

MÉDAILLONS de la GAUCHE.

1.er *Médaillon.* Il représente un champ de blé, un homme qui moissonne avec une faucille.

2.e *Médaillon.* Il représente une figure qui a les bras cassés, en sorte qu'on ne peut point juger ce qu'elle faisoit.

3.e *Médaillon.* Il représente deux hommes qui entonnent du vin.

4.e *Médaillon.* Figure qui gaule du gland, & deux pourceaux à ses pieds.

5.e *Médaillon.* C'est une figure qui plonge un animal entier dans un baril, & semble lui couper le cou; on n'en voit que les deux pieds de devant & la tête. A côté, un porc mort est attaché par les pieds de derrière à un poteau garni d'étaux.

MÉDAILLONS de la DROITE.

1.er *Médaillon.* Il représente une figure qui semble ratisser. A côté d'elle, on voit une espèce d'arbre.

2.e *Médaillon.* Il représente un cheval sellé, bridé, un cavalier prêt à monter tenant une bannière. Il paroît prêt pour aller à une expédition militaire, puisqu'il a le signal de ralliement. Il répond au signe du Taureau, temps où s'ouvrent les campagnes militaires.

3.e *Médaillon.* Figure debout, les bras étendus à droite & à gauche, & paroissant de chaque main saisir une plante, & l'arracher.

4.e *Médaillon.* Il représente deux figures. L'une a une jaquette & un coqueluchon; l'autre n'a que la jaquette. Elles semblent l'une couper du bois à un arbre; l'autre bêcher la terre.

5.e *Médaillon.* Ce sont deux figures en face l'une de l'autre, assises chacune dans un fauteuil, vêtues comme en hiver: celle à droite paroît lire; celle à gauche avec une espèce de long bâton à chaque main, paroît remuer, ou arranger le feu devant lequel elles se chauffent.

MÉDAILLONS de la GAUCHE.

6.e Médaillon. Ce sont deux figures mutilées, à table, & debout; une espèce de cheminée à côté où il y auroit du feu. Ces figures tiennent quelque chose à une main : on croiroit que celle à gauche y eut un morceau à manger.

MÉDAILLONS de la DROITE.

6.e Médaillon. Figure à deux visages. L'un des deux est mutilé & paroît jeune; celui qui ne l'est pas, a le menton garni d'une longue barbe & paroît vieux. Cette figure est à moitié couverte d'un linceul, comme celle de Notre-Dame, & debout. Deux espèces de tourelles, sont l'une à droite, l'autre à gauche; un enfant entre dans l'une, pendant qu'un autre enfant semble sortir de l'autre, la figure à double visage étend chaque main sur la tête de chacun des enfans. Tous ces médaillons, tant ceux de la gauche que ceux de la droite, sont soutenus par un lion qui est au-dessous, & couché comme exprès.

Ce sixième médaillon d'une figure à deux têtes ou deux visages, m'a paru le plus intéressant de tous, en ce qu'on l'a placé ici pour répondre au Verseau, pendant que la figure à deux têtes, dans le zodiaque de Notre-Dame, répond au Taureau; c'est une singularité dont il est très-curieux de trouver la cause. Nous la donnerons dans notre réponse à l'écrit de M. de Lalande qui doit naturellement venir à la suite de cette description. On y verra que MM. Dupuis & de Lalande se sont singulièrement mépris sur la signification de la figure à deux têtes que l'on voit dans le zodiaque de Notre-Dame.

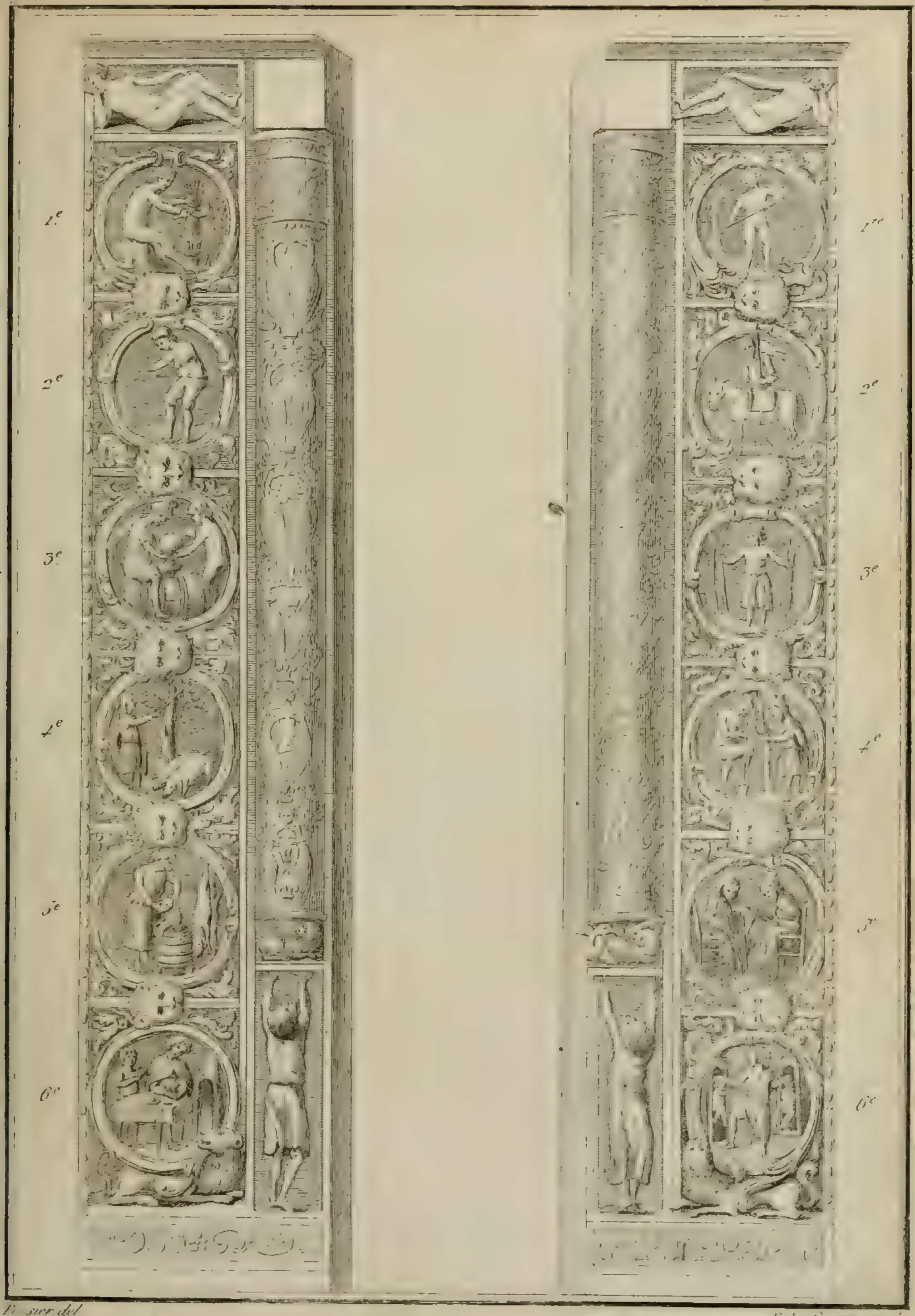




Jossier del. Y. Le Gouaz sc.

Figures du Zodiaque qui sont sur deux Pilastres au bas de la Tour Septentrionale de l'Eglise de S.t Denis en France.





Figures Emblematiques qui sont sur deux Pilastres au bas de la Tour Méridionale de l'Eglise de St. Denis en France



OBSERVATIONS

Sur un Écrit de M. de Lalande, inséré dans le Journal des Savans du mois de Juillet 1788, dans lequel cet Académicien rend compte de mon Mémoire sur le Zodiaque de Notre-Dame de Paris, comparé au Zodiaque Indien des Transactions philosophiques de 1772, & inséré dans le volume de l'Academie, année 1785.

Par M. LE GENTIL.

Nous allons rapporter les propres termes de cet Académicien, sans nous permettre le moindre changement ni la moindre transposition dans les mots; ensuite nous hasarderons nos observations, & nous laisserons la décision au public; car je suis bien éloigné de souscrire ici au jugement de M. de Lalande, & à la décision qu'il porte dans son imprimé en faveur de M. Dupuis, sur l'objet qui nous sépare, ce savant & moi, au sujet du zodiaque Indien, & de celui que j'ai trouvé à l'église de Paris. C'est donc au public à juger: mais nous croyons devoir le prévenir que comme M. de Lalande n'a fondé son écrit que d'après un système que M. Dupuis paroît s'être formé sur le zodiaque de Notre-Dame, système qu'il s'est contenté de communiquer à M. de Lalande, sans l'avoir encore soumis au jugement du public par l'impression, nous nommerons indistinctement M. de Lalande & M. Dupuis dans nos observations, & souvent tous les deux ensemble.

J'ajouterai ici que je connois aujourd'hui mieux que jamais, & sans pouvoir en douter, la façon de penser de M. Dupuis, ayant eu l'honneur de m'entretenir avec lui sur cette matière; je sais que dans tout ce qu'il propose, il ne cherche que la vérité. Nous la cherchons également de

notre côté, & l'eſprit de critique n'entre pour rien dans nos obſervations. Nous ne demandons qu'à être éclairés; nous croyons en conſéquence que nos obſervations ne peuvent pas déplaire à M. Dupuis. Entrons en matière.

« Dans un autre Mémoire, dit M. de Lalande (*p. 1521* » *& ſuiv.*), M. le Gentil compare le zodiaque Indien décrit » dans les Tranſactions philoſophiques de 1772, avec celui » qui eſt ſur la porte de Notre-Dame de Paris; il en a fait » graver la figure. Il ſe propoſe d'expliquer dans ſon ouvrage » ſur le zodiaque, pourquoi l'on trouve ſur pluſieurs » anciennes égliſes ces figures de douze ſignes. Il remarque » ici que le zodiaque Indien n'eſt pas auſſi ancien que » M. Dupuis l'avoit préſumé; mais cela n'intéreſſe point la » découverte de celui-ci ſur l'explication des fables ».

Je ſais bien que ce que j'ai remarqué du zodiaque Indien, n'intéreſſe point la partie de l'ingénieux ſyſtème de M. Dupuis ſur l'explication des fables. J'ai annoncé le premier dans ma Diſſertation contre le ſyſtème de M. Dupuis, que cette partie n'étoit point de mon reſſort. Or, dans mes Obſervations ſur le zodiaque Indien (*année 1785*) relativement au ſyſtème d'antiquité que M. Dupuis lui attribue de repréſenter l'ordre des choſes, lorſque la Vierge étoit au ſolſtice, quatre mille ans environ avant Jéſus-Chriſt; & que par conſéquent ce zodiaque prouvoit d'une manière indirecte, que le Capricorne a occupé dans le principe, c'eſt-à-dire, quatorze mille ans environ avant Jéſus-Chriſt, le ſolſtice d'été (*pag. 399*), j'ai dit, je le dis & le dirai encore s'il le faut, que ce zodiaque ne me paroît nullement être l'ouvrage des aſtronomes Indiens, par les raiſons détaillées dans mon Mémoire; que nous ne pouvons rien remarquer dans ce zodiaque qui puiſſe nous donner à ſoupçonner qu'il prouve l'opinion de M. Dupuis, qu'il ne repréſente par conſéquent point l'état du ciel dans l'âge où la Vierge occupoit le ſolſtice, comme le penſe M. Dupuis; qu'en analyſant ce zodiaque, on voit évidemment que ce ne ſont pas les angles des quadrilatères

qui désignent les solstices & les équinoxes, ce que je prouve dans mon Mémoire (*volume de l'Académie, année 1785, p. 17 & suiv.*); & qu'en conséquence ce zodiaque, au lieu d'indiquer l'époque à laquelle la Vierge occupoit le solstice, quatre mille ans avant Jésus-Christ, comme paroît le penser M. Dupuis, indiqueroit au contraire celui où le Lion occupoit ce même solstice; que ce seroit donc l'ordre des signes du zodiaque, deux mille cinq cents ans environ avant Jésus-Christ. Je ne prétends donc point, comme l'on voit, que ce zodiaque représente l'ordre des choses, deux mille cinq cents ans avant Jésus-Christ.

« Nous pouvons même annoncer actuellement, continue » M. de Lalande, que M. Dupuis, d'après les recherches » longues & curieuses sur l'astronomie sacrée des anciens, » ne regarde plus ce zodiaque que comme un monument » de la religion Isiaque ».

J'avoue que je n'entends point ce raisonnement de M. de Lalande; car de ce que M. Dupuis ne regarde plus ce zodiaque que comme un monument de la religion d'Isis, il ne me paroît nullement s'ensuivre qu'il ne soit pas aussi ancien qu'il a voulu insinuer qu'il l'est dans son systême. En effet, M. de Lalande peut-il nous assurer, au milieu des ténèbres qui couvrent l'origine du zodiaque & celle de la religion d'Isis, que cette religion ne soit pas presqu'aussi ancienne que le monde, puisqu'elle paroît aussi ancienne que le zodiaque, qui lui-même paroît presqu'aussi ancien que le monde? Qui peut donc avoir assuré à M. de Lalande que ce zodiaque ne puisse pas remonter quatre mille ans environ avant Jésus-Christ, parce que M. Dupuis ne le regarde plus aujourd'hui que comme un monument de la religion d'Isis? Cette religion ne paroît-elle pas aussi ancienne que cette époque?

« Il est, continue M. de Lalande, de la même nature que » celui de Notre-Dame, qui lui ressemble à beaucoup » d'égards. »

Les zodiaques des différentes nations de la terre, quelque éloignées qu'elles sont entr'elles, soit par la distance des lieux, soit par celle des temps, sont tous de la même nature, & se ressemblent autant les uns que les autres à beaucoup d'égards; & on peut dire qu'ayant tous une origine commune, comme l'a prouvé le premier M. Bailly, il n'est pas étonnant qu'ils ayent tous un très-grand air de famille, si l'expression est permise ici; car enfin ils sont tous composés des mêmes signes, à quelques légères différences près qui tiennent à quelques coutumes locales. Mais si le zodiaque des Transactions ressemble en quelques points à celui de Notre-Dame, on peut dire qu'il en diffère dans plusieurs autres fort essentiels, comme nous allons le faire voir.

« Dans l'un & dans l'autre (c'est M. de Lalande qui parle) » on voit au sommet du cadre, le Lion & le Cancer, les » deux domiciles du Soleil & de la Lune. Sous chacun de ces » deux signes, sont placés par ordre sur deux lignes paralleles, » les domiciles des cinq planètes. Cela a donné lieu à » M. le Gentil de croire que l'ordre naturel des signes » avoit été interverti par ignorance; mais on y trouve au » contraire beaucoup d'esprit ».

1°. Le zodiaque de Notre-Dame n'est point autour d'un cadre ou carré, divisé de trois en trois signes, ayant par conséquent trois signes pour chaque côté, comme dans le zodiaque des Transactions; mais il est sur deux pilastres seulement, six signes de chaque côté, ce qu'il est très-important d'observer ici, à cause de la ressemblance qu'on veut mettre entre ces deux monumens, & des conséquences qu'on en veut tirer.

2.° S'il y a entre ces deux zodiaques une ressemblance, en ce que le Lion est en haut, en tête d'un côté & à gauche, le Cancer de l'autre côté ou à droite, & aussi en tête, il y a en même temps une différence sensible & essentielle entr'eux, en ce que les signes marchent à Notre-Dame dans un ordre renversé de celui auquel ils marchent dans

le zodiaque Indien; en ſorte que dans ce zodiaque-ci le Lion eſt où il doit être, & que naturellement l'ordre des ſignes n'eſt point interverti.

Les figures, dans le zodiaque Indien, vont de droite à gauche, comme cela doit être; elles vont au contraire de gauche à droite dans celui de Notre-Dame, d'où il ſuit que le Lion eſt naturellement placé à gauche, dans le zodiaque Indien, & que pour y correſpondre, il auroit dû être placé à droite à Notre-Dame, & non point où il eſt. C'eſt cette marche naturelle de droite à gauche, dans le zodiaque Indien, qui met néceſſairement, je le répète, le Lion à gauche; & ſi à Notre-Dame on avoit ſuivi l'ordre naturel dans la marche des figures, tel qu'on doit ſe le repréſenter en tournant la face au midi, pour paſſer le zodiaque en revue de l'eſt à l'oueſt, on verroit que le point du ciel qui eſt entre le Lion & le Cancer, étant au méridien, le Lion ſeroit en effet à gauche, & le Cancer à droite; mais en même temps tous les ſignes qui dans le zodiaque de Notre-Dame ſont à gauche, ſeroient véritablement à droite, comme dans le zodiaque Indien, & réciproquement; & cela comme l'on voit n'auroit en aucune façon troublé le domicile du Soleil, ni celui de la Lune, ni ceux des planètes, domiciles qu'il eſt difficile de prouver qu'on ait eu en vue ici; car on ne voit aucune trace de ces domiciles, ni dans l'un ni dans l'autre zodiaque. J'en demande bien pardon à M. Dupuis & à M. de Lalande, & j'en ſuis bien fâché pour les ſculpteurs, mais je ne trouve point ici beaucoup d'eſprit.

« C'eſt un enſemble ingénieux de trente-ſix tableaux » qui renferment, dit M. de Lalande, les opérations » agricoles de chaque mois, avec les gradations de la lumière » & de la chaleur ».

D'accord pour les occupations de la campagne, & je n'ai jamais dit le contraire; mais non pour les gradations de la lumière & de la chaleur, & je le prouve.

Ce ſont en effet les douze figures ſymboliques qui accompagnent les douze ſignes, qui prouvent que le Lion

eſt déplacé ; elles ſemblent exiger, dis-je, que le Lion ſoit à la place du Cancer, & réciproquement. La moiſſon ſe fait ſous le ſigne du Lion, & non ſous l'Écreviſſe : or la figure qui accompagne le Cancer, eſt un homme qui éguiſe ſa ſaux, vrai ſymbole de la moiſſon qui ſe fait le Soleil étant dans le ſigne du Lion ; on auroit donc dû placer le Lion à côté de ce ſymbole, comme on a placé à côté du Scorpion un homme qui sème du blé, vrai ſymbole des ſemailles, en octobre ; & à côté de la Balance, un jeune homme qui foule le raiſin, vrai ſymbole de la vendange dans ce temps-là, c'eſt-à-dire, lorſque le Soleil eſt dans la Balance. De plus, je ne ſais pas ſi M. de Lalande pourroit me citer un ſeul exemple, que les ſignes du Lion & du Cancer dans l'antiquité ayent jamais été déplacés de l'ordre naturel, à cauſe des domiciles ou maiſons du Soleil & de la Lune. Le ſculpteur de Notre-Dame auroit-il eu plus d'eſprit en cela que les anciens ? auroit-il voulu qu'on dévinât ſans les indiquer, les domiciles du Soleil & de la Lune ? Peut-on dire qu'il les connut ?

Il eſt impoſſible à M. de Lalande de nous prouver que dans le zodiaque Égyptien, qui eſt une repréſentation vraie & naturelle de la religion Iſiaque, le Lion ſoit déplacé comme il l'eſt à Notre-Dame. Comment donc peut-il décider ſi affirmativement que c'eſt une copie, de quelque temple Égyptien ? Il n'y a pas même lieu à le conjecturer ; le zodiaque de Notre-Dame n'eſt point Égyptien.

Nous avons beaucoup de monumens anciens, ſur leſquels on voit un zodiaque gravé : j'en connois pluſieurs ; dans tous, l'ordre naturel eſt obſervé.

Dans les recherches que j'ai faites au ſujet de la religion Iſiaque, j'en ai trouvé dans dom Montfaucon, parmi les abraxas, trois. Dans deux, l'ordre des ſignes va de droite à gauche, comme dans le zodiaque Indien ; & dans le troiſième, ils vont de gauche à droite, comme à Notre-Dame ; mais ni dans l'un ni dans l'autre cas, l'ordre naturel n'y eſt point troublé. On trouve auſſi dans dom

dom Monfaucon, parmi les vaſes ſacrés des Romains, une patère, autour de laquelle ſont gravés les douze ſignes du zodiaque, allant de gauche à droite comme à Notre-Dame; le Cancer & le Lion ſont au haut, le premier à gauche, le Lion à droite. Parmi les pierres précieuſes du cabinet de M. le duc d'Orléans, que M. l'abbé le Blond a publiées, on voit une agate-onyx, ſur laquelle ſont gravés les jeux ſéculaires célébrés ſous Domitien: le cercle qui renferme les ſignes du zodiaque, les repréſente marchant de gauche à droite, les Gémeaux & le Cancer occupent le haut du tableau; le Lion ſuit, mais il n'eſt pas déplacé.

Dans une autre pierre agate-onyx, tirée du même cabinet, eſt une tête de Méduſe. Le revers de la pierre repréſente un zodiaque, dans lequel les ſignes vont au contraire de droite à gauche, comme dans le zodiaque Indien, & le Lion y occupe la partie ſupérieure du cercle à droite, pendant que la Vierge eſt à la gauche; mais au-deſſous du Lion eſt l'Écreviſſe à droite, comme dans le zodiaque Indien: néanmoins l'ordre n'eſt point interverti; car enfin, pour quelle raiſon troubleroit-on, ſans en prévenir, l'ordre de ces ſignes qui ſont deſtinés à nous repréſenter la marche du Soleil & de la Lune? n'eſt-il pas indifférent au fond, que le domicile du Soleil ſoit à droite ou à gauche de celui de la Lune? Les domiciles n'étant point partie eſſentielle du zodiaque, mais ſeulement une eſpèce d'acceſſoire, ſans lequel il peut exiſter, quelle raiſon, dis-je, pourroit-on avoir de ne pas reſpecter cet ordre?

Ce que je dis ici me paroît évident par les médailles de l'empereur Antonin, frappées en Égypte. M. l'abbé Barthélemi nous les a fait connoître: les domiciles, par exemple, y ſont marqués; mais M. l'abbé Barthélemi a penſé ſavamment que l'ordre naturel des ſignes devoit être reſpecté, & reſter tel qu'il eſt repréſenté.

Le Cancer, domicile de la Lune, eſt à la tête avec

le ſigne de la Lune; & le Lion, en ſuivant l'ordre des ſignes, eſt à la gauche de la Lune, avec le ſymbole du Soleil. Un ſigne tranſpoſé ſans aucune marque de domicile, ne peut donc point prouver qu'un ſculpteur ait eu en vue ces prétendus domiciles; mais le reſte du zodiaque dans ces médailles, ſuit par diviſion de trois en trois en allant de gauche à droite. Enfin cet intervertiſſement d'ordre des ſignes à Notre-Dame dans le Lion & le Cancer, ne doit point ſurprendre, & on n'y peut voir, à mon avis, aucun myſtère ni beaucoup d'eſprit, à moins qu'on n'en voie également & infiniment davantage dans le zodiaque de Saint-Denys & de Sainte-Geneviève, où l'ordre des ſignes eſt encore plus interverti qu'à Notre-Dame: c'eſt à MM. Dupuis & de Lalande à nous l'apprendre.

« Ce n'eſt point à la place de la Balance, continue M. de » Lalande, qu'on voit la figure du ſtatuaire, comme l'a cru » M. le Gentil, mais à la place de la Vierge qui ſe trouve » dans le milieu. »

Je réponds ici, que je n'ai jamais cru que la figure du ſtatuaire fût à la place de la figure qui repréſente la Balance, je conviens que j'ai mis dans mon diſcours imprimé l'un avant l'autre; mais c'eſt une pure inadvertance ou tranſpoſition, faute occaſionnée peut-être par trop de confiance à l'imprimeur, & par conſéquent un peu de négligence de ma part; car MM. Dupuis & de Lalande ont pu obſerver, s'ils ont voulu, que la faute n'eſt point dans la gravure, ni par conſéquent dans le deſſin; que cette gravure eſt de la dernière exactitude, comme tout le monde en convient, & très-bien exécutée; & ſi en corrigeant mon épreuve de l'Imprimerie royale, j'avois eu ce deſſin ſous les yeux, comme j'avoue que j'aurois dû faire, je ne me ſerois pas expoſé à recevoir ces reproches de ces deux ſavans; car enfin ils conviendront, je penſe, que dans une pareille deſcription, on doit ſuivre ſervilement l'ordre

qui eſt dans le tableau ; c'eſt donc par pure inadvertance que j'ai mis dans ma deſcription un ſigne avant l'autre.

Mais voici la preuve complette de ce que j'avance, que je préſente au public impartial, & à M. de Lalande lui-même. Le reproche que me fait cet Académicien, reproche que j'aurois pu m'épargner, en veillant davantage l'imprimeur, m'a rappelé que j'avois prié M. l'abbé de Fontenay, par une lettre du 29 de mars 1786, long-temps avant que dût paroître le volume de l'Académie pour 1785, d'inſérer dans ſon Journal général de France, le zodiaque que j'avois trouvé à Notre-Dame; il me rendit le ſervice de ſatisfaire mon déſir le 6 d'avril ſuivant : or, voici ce que porte ce journal :

6.° (Eſt-il dit) par une ſingularité digne de remarque, le Lion au lieu du Cancer.

7.° A droite en redeſcendant, le Cancer repréſenté par un homar ou groſſe écreviſſe de mer, vis-à-vis du Lion.

8.° Au lieu de la Vierge eſt repréſenté un jeune homme, un bonnet ſur ſa tête, & qui paroît tailler de la pierre.

9.° A la place de la Balance, une jeune fille tenant devant elle les bras, à ce qu'il ſembleroit, d'une balance.

Enfin, ſi MM. de Lalande & Dupuis avoient bien voulu ſe rappeler ce que je dis dans la ſuppoſition que je fais, que le zodiaque Indien eſt l'ouvrage d'un maçon, ils auroient vu que je place le ſtatuaire à la place de la Vierge.

Il eſt donc certain que je n'ai pas cru que la Vierge fût à la place de la Balance dans le zodiaque de Notre-Dame, & que c'eſt une faute d'impreſſion faite à l'Imprimerie royale ; d'ailleurs, c'eût été un ordre interverti dont j'aurois certainement prévenu le public, comme j'ai fait pour le Lion & le Cancer qui occupent la place l'un de l'autre. Au ſurplus, je reçois avec reconnoiſſance l'avis de ces deux ſavans, qui me rendra plus

circonſpect dans l'ouvrage que je prépare, où tous ces objets ſeront de nouveau traités.

« Elle tient, dit M. de Lalande, le Dieu de la lumière,
» ſous l'emblème d'un enfant naiſſant, tel que les anciens
» repréſentoient le Soleil au ſolſtice d'hiver; car ils lui
» donnoient alors la figure d'un enfant, enſuite celle d'un
» jeune homme au printemps, d'un homme fait au ſolſtice
» d'été, & d'un vieillard en automne ».

On voit par ce paſſage, que MM. Dupuis & de Lalande cherchent à faire un enſemble, un tout, ou une eſpèce de tableau du frontiſpice de Notre-Dame, tendant au même but; mais je ne crois pas qu'ils réuſſiſſent jamais au ſujet de la Vierge; car, quand on fait la copie d'un tableau, on ne doit rien oublier. Or, MM. Dupuis & de Lalande ont oublié de faire mention ici d'un morceau du tableau le plus intéreſſant & le plus eſſentiel, & qui détruit abſolument leur aſſertion: c'eſt l'hiſtoire de la chute d'Adam & d'Eve, en petites figures comme toutes les autres qui accompagnent le zodiaque, de leur excluſion du paradis terreſtre; & enfin c'eſt le ſerpent dont la Vierge écraſe la tête. Or, cet emblème ne convient qu'à la Vierge Marie, & les Égyptiens dans leurs emblèmes de la religion d'Iſis, n'ont rien qui y reſſemble. L'enfant qu'elle tient entre ſes bras, eſt donc évidemment l'Enfant Jéſus, & non le Dieu de la lumière, dans le ſens que l'entendent MM. Dupuis & de Lalande.

Il eſt aſſez dans l'ordre que la ſtatue repréſentative de la Vierge Marie, ſoit à l'entrée d'un temple élevé ſous ſon invocation au maître de la nature. Donc pour le dire ici en paſſant, la ſtatue de la femme que l'on trouve à cette entrée de Notre-Dame, & iſolée du zodiaque, n'eſt point Iſis qui tient Orus dans ſes bras, mais la Vierge Marie & l'Enfant-Jéſus, objets de notre culte.

« Auſſi, dit M. de Lalande, le ſtatuaire a-t-il eu ſoin
» de repréſenter à côté, ſur la face intérieure de la colonne du
» milieu de la porte, ſix autres figures, qui depuis l'enfance

» jusqu'à la décrépitude, marquent la gradation de la vie. Le
» premier ou le plus bas, paroît un enfant de douze ans;
» au-dessus il y a un jeune homme de dix-huit à vingt ans;
» le troisième est un homme de vingt-cinq à trente ans;
» ensuite on en voit de quarante, soixante & quatre-vingts
» ou quatre-vingt-dix, ce qui se reconnoît aux traits qui
» caractérisent chaque âge, & à la barbe qui devient plus
» longue & plus touffue. Le dernier ou le plus haut, repré-
» sente la plus grande décrépitude, & le plus bas l'adoles-
» cence: il y a six tableaux, parce que les jours ont une durée
» égale durant les deux mois de l'année qui sont également
» distans de chaque solstice. Sur l'autre face latérale de la
» colonne, on voit six autres tableaux qui représentent la gra-
» dation de la chaleur. Au plus haut, ou au solstice d'été, est
» un jeune homme tout nu, à l'ombre d'un arbre; au-dessous,
» le même jeune homme est nu en grande partie, si ce n'est
» vers la ceinture, & au-dessous où il est couvert d'un voile
» léger. Au troisième tableau qui répond aux équinoxes, le
» même jeune homme est représenté avec deux visages, l'un
» jeune & l'autre vieux; il est couché presque horizontale-
» ment. Le visage jeune regarde la partie supérieure du ciel,
» le vieux la partie inférieure, & le manteau qu'il porte ne
» couvre que la moitié de son corps. Toute la partie jeune
» & supérieure, qui répond au printemps & à l'été, que la
» ligne équinoxiale sépare des deux autres saisons, est nue, &
» la partie vieille qui répond à l'automne & à l'hiver, est
» couverte. Dans le tableau qui est au-dessous, le froid étant
» plus rigoureux, le même homme est tout entier enveloppé
» dans son manteau. Dans le cinquième tableau, il est courbé
» sous le faix d'un fagot; & dans le tableau qui est le plus
» bas, il est assis devant un grand feu, & a du bois auprès
» de lui. En comparant le dernier tableau avec le premier,
» l'homme qui se chauffe avec celui qui est tout nu à
» l'ombre, & tous deux avec celui du milieu, moitié nu,
» moitié couvert, il est difficile de ne pas apercevoir
» une suite d'idées, une progression dans les périodes de la

» chaleur, comme on a vu ſur l'autre face, celle de l'augmen-
» tation de la lumière, dont la marche progreſſive étoit
» aſſimilée à celle de la vie de l'homme.

» Rien n'étoit plus naturel que de tracer dans un monu-
» ment relatif à l'année ſolaire, les gradations de la cha-
» leur & de la lumière qui correſpondent à ſes principales
» diviſions. C'eſt par la même raiſon que le ſtatuaire a placé
» à côté des douze ſignes, les tableaux des opérations agri-
» coles & des opérations de l'homme qui correſpondent à
» chaque mois. On voit à côté du Bélier, ou en mars,
» l'homme qui émonde les arbres & qui les taille; en mai,
» un homme qui tient des fleurs & des oiſeaux; en juin,
» un autre homme qui éguiſe ſa faulx; en août, des épis
» que l'on coupe; en ſeptembre, un homme qui foule la
» cuve; en octobre, un autre qui sème; en novembre, un
» homme qui abbat le gland dont il nourrit ſes pourceaux;
» & en décembre, on le voit tuer ſon porc ».

Avant de répondre à cet article, il eſt important que nous mettions ici la deſcription des douze ſymboles dont parlent MM. Dupuis & de Lalande, qui ſont ſur les deux faces latérales du pilaſtre au-devant duquel on a mis la figure de la Vierge & de l'Enfant-Jéſus.

CADRES de la GAUCHE.

1.er Cadre. Il repréſente un jeune homme debout, au pied d'un arbre garni de ſes feuilles : la main droite étant caſſée, on ne peut, pas dire ce qu'il en paroiſſoit faire; de la gauche, il ſemble tenir un paquet de feuilles. Il doit répondre au Cancer.

2.e Cadre. Il repréſente une figure nue qui paroît être une femme : elle a un

CADRES de la DROITE.

1.er Cadre. Il repréſente un vieillard fort âgé, ſans paroître décrépit. Il ſemble ſe repoſer; il eſt bien vêtu, & le jeune homme qui y répond à gauche, ou de l'autre côté eſt tout nu. (L'on peut voir ci-devant page 34 & 35).

2.e Cadre. Il repréſente un vieillard comme le précédent, ſans la moindre

CADRES de la GAUCHE.

caleçon, la main gauche appuyée sur sa hanche; sa droite pose sur un paquet de linge, à ce qu'il m'a paru, qui seroit sur quelque banquette. C'est sans doute quelqu'un qui vient de faire sa lessive; pratique en usage dans bien des campagnes, avant le temps des travaux de la campagne pour les moissons. Il doit répondre aux Gémeaux.

3.*e* *Cadre.* C'est une figure qui n'a qu'un seul corps & deux têtes ou deux visages. Il sembleroit qu'une moitié fût celle d'une femme, avec la tête; ou du moins d'un jeune homme en assez bon point, dont la tête est tournée vers le haut du cadre. L'autre demi-figure avec la tête, est celle d'un homme fait, qui semble regarder vers le bas du cadre: un simple linceul paroît couvrir cette moitié seule. La figure entière est un peu penchée, & a les genoux un peu pliés; elle répond au Taureau.

4.*e* *Cadre.* On y voit une figure enveloppée dans une capotte à longues

CADRES de la DROITE.

marque de décrépitude. Il semble également se reposer; il est également bien vêtu, pendant que la figure qui lui répond est nue, à un simple caleçon près, & même fort léger.

3.*e* *Cadre.* » Il représente encore un vieillard, bien vêtu & qui se repose.

4.*e* *Cadre.* Ce ne sont plus ici des vieillards. Cette figure-ci représente un

Cadres de la gauche.	*Cadres de la droite.*
manches, ayant un coqueluchon qui lui enveloppe également la tête.	perſonnage dans la force de l'âge, qui de la main droite tient un chien en leſſe, & de la gauche un oiſeau ſur le poing. C'eſt certainement l'emblème de la chaſſe, à laquelle la vieilleſſe n'eſt guère propre. Elle répond en octobre, & eſt vêtue d'une longue robe avec une ceinture.
5.ᵉ *Cadre.* C'eſt un homme courbé ſous le poids d'un fagot, tenant de ſa main gauche un long bâton qui lui ſert à ſe ſoutenir, & dont il s'appuie.	5.ᵉ *Cadre.* C'eſt une figure entourée d'arbres, c'eſt-à-dire, vraiſemblablement le chaſſeur précédent, au milieu des bois; elle a la main droite caſſée, l'avant-bras gauche également caſſé. A côté, dans le haut des arbres, eſt un oiſeau un peu mutilé; il paroît voler.
6.ᵉ *Cadre.* C'eſt une figure enveloppée de ſon coqueluchon, & qui ſe chauffe devant un bon feu. Les bûches ſont debout, au lieu d'être en travers; ce qui indique ſans doute un uſage alors en règne.	6.ᵉ *Cadre.* C'eſt une figure qui repréſente une perſonne faite, qui paroît être une femme. Elle a une coiffe qui lui enveloppe la tête. De ſes deux mains dont les extrémités ſont caſſées, elle tenoit les deux bouts de ſa coiffe au-deſſous de ſon menton.

Toutes ces figures ont des robes, & des ceintures pour ſerrer leur vêtemens.

D'après

D'après cette deſcription qui eſt très-exacte, il eſt aiſé de comprendre qu'il y a ſix cadres figurés de chaque côté, parce qu'il y a ſix ſignes de chaque côté, & douze mois dans l'an qui répondent aux douze ſignes du zodiaque. On ne comprend point également que ces ſix tableaux ſoient là parce que les jours ont une durée égale durant les deux mois de l'année, qui ſont également éloignés de chaque ſolſtice; opinion cependant que MM. Dupuis & de Lalande ont adoptée. Ces ſix figures de chaque côté correſpondant donc à celles qui ſont à côté des douze ſignes, elles repréſentent donc toutes les vingt-quatre les occupations ruſtiques pour notre climat; excepté la figure à deux têtes, dont le même emblème répété au zodiaque de Saint-Denys, m'a fait découvrir le vrai ſens. On ne voit donc point ici, comme le dit M. Dupuis, qu'on ait eu en vue la gradation ſeule de la chaleur, comme ſi on avoit uniquement voulu faire faire à ces figures l'office de thermomètre : & ce jeune homme à deux viſages, à qui M. Dupuis attribue de déſigner la ſéparation du printemps & de l'été d'avec l'automne & l'hiver, ne ſignifie rien de tout cela, ſelon moi; il n'eſt point couché preſqu'horizontalement, comme le diſent MM. Dupuis & de Lalande, il eſt au contraire poſé preſque verticalement. (*Voyez la figure, & à Notre-Dame*, car c'eſt aux yeux à en juger.)

Ces ſix cadres ne paroiſſent donc qu'un tableau de ce qui ſe paſſe à la campagne, pendant les ſix premiers mois de l'année ; ils ſont en face des ſix cadres du zodiaque, qui ſont également des ſymboles relatifs aux mêmes occupations pendant le même temps.

On remarquera par la deſcription que j'ai faite de toutes ces figures, qu'elles ſont chacune accompagnées de ſymboles particuliers. Cette remarque a trop été négligée par MM. Dupuis & de Lalande; car d'elle dépend en grande partie la ſolution de l'énigme ou de l'emblème que renferme chacun de ces cadres en parti-

culier. En général, toutes ces figures paroissent tenir à quelques us & coutumes de ces temps éloignés, coutumes dont plusieurs sont abolies aujourd'hui.

Par exemple, le sixième cadre de la gauche nous fait voir, selon moi, qu'alors sans doute c'étoit l'usage de mettre au feu les bûches debout, & de les allumer par les bouts d'en haut. Actuellement on les met en travers, & on les brûle en quelque façon par les deux bouts à la fois, quoique le bois soit aujourd'hui infiniment plus rare qu'il ne l'étoit alors.

Quant à la figure à deux têtes qui répond au Taureau, & non au Bélier, comme l'a cru M. Dupuis, j'avouerai que je n'ai pas saisi son allégorie au premier coup-d'œil, & j'ai eu besoin d'être éclairé par le zodiaque de l'église des Bénédictins de Saint-Denys. En effet, le même symbole d'une figure à deux têtes, & plus significatif encore, est répété à cette basilique, comme on a vu ci-dessus. Or, cette figure à deux têtes est placée à Saint-Denys pour répondre au Verseau, pendant qu'à Notre-Dame elle répond au Taureau; c'est une singularité dont il étoit très-curieux de trouver la cause.

Certainement ce symbole ne peut pas s'appliquer à la séparation du printemps & de l'été d'avec l'automne & l'hiver par la ligne équinoxiale, comme le disent MM. Dupuis & de Lalande de celui de N. D. de Paris. C'est donc ici le cas de faire à MM. Dupuis & de Lalande la question qu'ils m'ont faite, comme on verra ci-après, au sujet de mon hypothèse sur l'origine du zodiaque, qui ne cadre point avec un des signes du zodiaque Indien des Transactions philosophiques. Que devient donc l'hypothèse de M. Dupuis sur cette figure à deux têtes, qui, dans le zodiaque de Notre-Dame, répond non au Bélier, mais au Taureau; & dans celui de Saint-Denys, répond au contraire au solstice d'hiver, ou plus exactement au Verseau? A Saint-Denys, point de séparation par la ligne équinoxiale du printemps & de l'été d'avec l'automne & l'hiver, puisque la figure se trouve à l'extrémité de l'année, & par conséquent

du zodiaque, c'est-à-dire, à un point qui étoit pour ainsi dire la fin de l'année & le commencement de la suivante.

Il ne m'a pas été difficile de deviner, après l'inspection du zodiaque de Saint-Denys, que la figure à deux têtes dans l'un & dans l'autre zodiaque est Janus, qui fait à peu de chose près la même fonction dans l'une & dans l'autre position, c'est-à-dire, en répondant au Taureau comme à Notre-Dame, & au Verseau comme à Saint-Denys. Or voici ce que signifie l'emblème de Janus à deux têtes chez tous mes mythologistes.

Janus à deux têtes ou deux visages, étoit censé être le Soleil qui regardoit les deux principales parties du monde, l'orient & le couchant, qu'on nommoit *les deux portes du Soleil.* Janus ou le Soleil, en se levant, en ouvroit une, & en se couchant il fermoit l'autre. Janus ou le Soleil étoit par-là censé être le maître du jour dont il regarde le levant & le couchant. En ce sens Horace, dans deux vers, lui adresse ainsi la parole :

« Père du matin, ou bien Janus, si vous aimez mieux » que je vous invoque sous ce nom, qui êtes le signal du » commencement des travaux journaliers des hommes, &c.

Matutine pater, seu Jane libentiùs audis,
Undè homines operum primos, vitæque labores
Instituunt.

Janus étoit encore chez les anciens l'emblème du cours & de la révolution de l'année; par cette raison il étoit censé l'ouvrir, & par cette fonction il présidoit au mois de janvier, qui fut institué par Numa pour être le premier mois de l'année. Ce fut, comme le dit Macrobe, le mois du dieu à double face, qui regarde la fin de l'année qui vient de s'écouler, & le commencemens de celle qui va suivre :

Ac de duobus mensibus (januario & februario), priorem januarium nuncupavit, primumque anni esse voluit, tanquam

bicipitis Dei mensem, respicientem ac prospicientem transacti anni finem, futurique principia. (Macrob.)

Ce fut sans doute pour cette raison, que Numa lui fit bâtir un temple à deux portes.

Ovide s'est souvenu de cette double fonction de Janus, quand il dit :

Jane biceps, anni tacitè labentis imago.

Il ne nous en faut pas davantage pour rendre raison des figures à deux têtes qui sont à Notre - Dame & à Saint - Denys.

A Notre - Dame, la figure à deux têtes n'est point horizontale, comme le dit M. de Lalande, nous le répétons; elle n'est point tout - à - fait debout, comme le sont les cinq autres figures du même côté; elle est un peu penchée, & dans cette attitude, une des têtes regarde l'orient, & l'autre le couchant. Elle répond au Taureau, pour nous dire que les travaux rustiques de l'année commençant lorsque le Soleil entre dans ce signe, on doit alors se lever au moment que ce flambeau du monde commence à répandre sa lumière, & ne quitter le travail que lorsqu'il semble s'éteindre en se plongeant sous l'horizon.

Janus donc nous indique, par la tête qui regarde le levant, l'homme laborieux dont les occupations journalières exigent qu'il se lève chaque jour avec le Soleil; l'autre moitié couverte d'un linceul & qui regarde le couchant, est pour l'avertir qu'au coucher du Soleil, il est temps qu'il quitte les champs pour se reposer, afin de pouvoir se trouver en état le lendemain matin de reprendre ses travaux.

Tout cela s'accorde parfaitement avec ce que nous savons du calendrier des anciens, qui commençoient l'année rustique lorsque le Soleil entroit dans le signe du Taureau. L'on peut voir à ce sujet la note de Scaliger sur le beau vers suivant, qui est le 217.e du premier livre des Géorgiques :

Candidus auratis aperit cum cornibus annum
Taurus.

Voilà ce que j'entends par la figure à deux têtes du zodiaque de Notre-Dame.

Celle qui eſt à Saint-Denys eſt la même choſe, & c'eſt également Janus à deux têtes.

Le ſymbole des deux enfans qui ſont l'un à droite & l'autre à gauche de cette figure-ci, & dont l'un entre dans une eſpèce de tour, pendant que l'autre ſort d'une pareille tour, dénote évidemment qu'on a voulu déſigner à Saint-Denys, ce que nous avons rapporté de Janus d'après Macrobe, la double fonction qu'il faiſoit de fermer une année & d'ouvrir l'autre. Cette apparence de deux tours peut très-bien repréſenter auſſi ce temple à deux tours que lui dédia Numa. Il répond ici au mois de janvier pouae Verſeau, parce que c'étoit alors le commencement de l'année civile dans la nouvelle forme du calendrier adopté par Numa. Le linceul qui ne couvre que la moitié du corps eſt ſans doute, comme dans le zodiaque de Notre-Dame, relatif aux occupations journalières de l'homme, qui reprend chaque jour ſon travail au lever du Soleil, & qui le ſoir ſe repoſe de toutes ſes fatigues; car l'homme agricole trouve toujours aſſez à s'occuper dans quelque temps que ce ſoit de l'année. Cette figure à deux têtes, dont la moitié couverte d'un linceul, qui ſemble âgée, avec une longue barbe, doit donc être le ſymbole de la fin de l'année; & la moitié nue qui paroît jeune, celui de la renaiſſance de l'année: voilà ce que m'ont offert de plus vraiſemblable ces deux figures, dans l'un & dans l'autre zodiaque.

Il me paroît également évident que les ſix cadres de la droite du pilaſtre, ne ſont point deſtinés à nous repréſenter l'augmentation de la lumière, & que ſa marche progreſſive n'a jamais été aſſimilée à celle de la vie de l'homme, dans le ſens que le préſentent ici MM. Dupuis & de Lalande.

J'admets la marche progreſſive de la lumière du ſolſtice d'hiver à celui d'été, c'eſt-à-dire qu'elle eſt beaucoup plus

ſenſible & plus vive en juillet qu'en décembre : cela me paroît évident, mais il ne l'eſt pas pour moi, & je ne comprends pas que le ſtatuaire ait voulu repréſenter le peu de force de la lumière en hiver, par un jeune homme de vingt ou trente ans, qui a toute ſa chaleur; & la force que cette même lumière a acquiſe en été, par un vieillard décrépit, qui a naturellement perdu les trois quarts de la chaleur qu'il avoit à trente ans, & que par conſéquent la marche progreſſive de la lumière ait jamais été aſſimilée à celle de la vie de l'homme. J'ai toujours au contraire entendu aſſimiler la vieilleſſe à l'hiver. Ici, c'eſt le contraire, ſelon MM. Dupuis & de la Lande; la décrépitude répond à l'été, ou à la plus grande lumière & chaleur. Le ſtatuaire ne ſe ſeroit-il point trompé, & n'auroit-il pas dû bien plutôt, par analogie, la placer au ſolſtice d'hiver? Il eſt donc bien difficile de croire que ces ſix cadres repréſentent l'augmentation de la lumière de l'été à l'hiver.

D'ailleurs, je ne vois point ici cette gradation marquée que M. Dupuis nous propoſe de croire dans les âges que nous font voir les ſix figures de ces ſix cadres.

Les trois figures d'en bas paroiſſent des perſonnes d'un âge fait, & les trois autres au-deſſus, des vieillards. Le premier de ces trois-ci, à qui M. Dupuis ne donne que quarante ans, me paroît auſſi âgé que le troiſième, à qui il prodigue quatre-vingts ou quatre-vingt-dix ans, c'eſt-à-dire une fois plus.

Je donne vingt à trente ans environ à la première figure en bas, à qui M. Dupuis n'en donne que dix à douze : les deux qui ſuivent en montant, ont encore à peu-près cet âge; mais ici la ſcène change ſubitement, & d'une manière bien ſenſible, car la première des trois figures ſuivantes, eſt exactement un vieillard de ſoixante ans au moins, & non un homme de quarante ans, qui eſt la force & la vigueur de la vie de l'homme.

Ces trois vieillards en outre ſemblent ſe repoſer, pendant que tout le reſte du tableau paroît en action.

N'eſt-ce pas là une eſpèce de contraſte, ſur-tout avec les trois figures oppoſées de la gauche ? celles-ci ſont des perſonnages jeunes, ſorts, vigoureux, & de plus ils ſont tout nus. Cela ne ſemble-t-il pas nous dire, ſans y chercher beaucoup de fineſſe, que c'eſt à la vieilleſſe à ſe repoſer, pendant que la jeuneſſe active doit épargner les vieillards, & ſouffrir à ſon tour les travaux de la campagne & les durs exercices de la chaſſe, &c ?

La vieilleſſe demande à être vêtue en tout temps, pendant que la jeuneſſe active & laborieuſe eſt forcée, pendant la force de la chaleur, d'être à ſon aiſe & ſans habits, pour ſupporter plus facilement la force du travail & le poids de la chaleur.

Voilà, je penſe, l'explication la plus naturelle & la plus raiſonnable de ces douze tableaux ou cadres.

« M. Dupuis, continue l'extrait, conclut de cet examen, » que ce monument qui contient trente-ſix tableaux, tous » relatifs au même objet, eſt une copie groſſière de quelque » frontiſpice d'ancien temple d'Iſis, déeſſe dont le culte étoit » établi anciennement dans la Gaule, & ſur-tout à Paris. En » effet, les anciens Francs étoient ſortis des contrées où Tacite » nous dit que l'Iſis Égyptienne étoit adorée, & le vaiſſeau » ſymbolique faiſoit partie des monumens de ſon culte. »

Après tout ce que nous venons de dire, il doit être difficile de croire que le monument dont nous parlons ſoit une copie de quelque frontiſpice d'ancien temple d'Iſis : il faudroit encore que le ſculpteur eût accommodé au climat de Paris ſon tableau, ou les vingt-quatre emblèmes qui accompagnent le zodiaque ; car ces emblèmes ne ſont point Égyptiens ni Iſiaques, comme on peut l'obſerver. Ils ſont relatifs au climat & aux ſaiſons qui règnent ici pendant le cours de l'année. *(Voyez ci-devant, page 422 M. de Lalande lui-même.)* Alors ce ne ſeroit plus une ſimple copie d'un frontiſpice de quelque temple Égyptien. On ne ſe chauffe point en Égypte ; la moiſſon ne s'y fait point en juillet, mais elle eſt toute finie en mai, &c.

Enfin, on ne peut conclure rien autre chose de tout cet assemblage, sinon qu'il a été imaginé pour représenter,

1.° La mort, par la chute d'Adam;

2.° La vie ou la résurrection spirituelle par la Vierge; qui, en tenant l'Enfant-Jésus entre ses bras, écrase la tête du serpent, source de la mort; & tout cela selon l'idée que nous en donne notre religion;

3.° Les travaux rustiques, auxquels l'homme est condamné depuis la chute d'Adam, ou les occupations de la campagne pendant que le Soleil parcourt les douze signes du zodiaque, le tout relativement à notre climat, ainsi que quelques coutumes qui nous sont propres, ou qui l'étoient à nos ancêtres, & rien de plus. Tout cet assemblage est donc une espèce de tableau moral, fait pour montrer au peuple les obligations auxquelles l'auteur de la nature l'a astreint depuis le péché d'Adam. Voilà tout ce que j'ai vu dans ce curieux frontispice de Notre-Dame, & si j'y voyois Isis, je le dirois avec la même sincérité & la même franchise.

« Il est donc très-possible, dit l'extrait, que le zodiaque » Indien, au centre duquel on voit une femme qui paroît » être Isis, sous la forme de laquelle Horus Apollo dit » qu'on représentoit l'année, ne soit aussi qu'une copie des » monumens de la religion Isiaque & du culte des Égyptiens, » dont les images symboliques ont pu aussi bien passer en » Orient, qu'elles ont passé à Rome & dans tout l'Occident.

» Ainsi, on doit regarder ces deux zodiaques plutôt » comme un monument religieux que comme des monu- » mens astronomiques, d'autant plus que l'un & l'autre » sont sculptés sur des murs de temples. Il seroit à désirer » que l'on prît soin de rassembler ces différens monumens » de l'astronomie sacrée, dont nos temples gothiques ont » conservé des copies. Il y en a à Saint-Denys & ailleurs. »

Je réponds à cela que je n'entends point ce raisonnement de M. de Lalande.

1.° De ce qu'il est possible qu'une chose soit d'une certaine façon, on ne peut pas en conclure qu'elle existe

réellement

réellement de cette façon, & qu'on doive en conſéquence la conſidérer ſous cette façon plutôt que ſous une autre auſſi poſſible.

M. Call, dans ſa Lettre à M. Maskelyne, en lui envoyant ſon zodiaque Indien, ne raiſonne pas ainſi; il penſe fort ſagement qu'on peut ſoutenir avec une égale probabilité, que le zodiaque & le culte de la vache furent portés de l'Inde en Égypte, ou d'Égypte dans l'Inde. (*Voyez auſſi ma Diſſertation ſur le Zodiaque*).

2.° MM. Dupuis & de Lalande voient Iſis par-tout: il faut que je n'aie pas de ſi bons yeux que ces deux ſavans; car je ne la vois ni au zodiaque de Notre-Dame, ni au centre de celui de la pagode Indienne. La Vierge à Notre-Dame n'eſt point Iſis; nous l'avons prouvé. Quant au zodiaque Indien, je l'ai bien examiné & fait examiner par de très-bons artiſtes en ce genre, & par des perſonnes très-capables d'en juger; la figure qui eſt au centre n'eſt point une figure de femme, mais celle d'un homme. J'ai fait deſſiner & graver ce deſſin d'après celui des Tranſactions: on y a apporté le plus grand ſoin; ainſi, je puis aſſurer qu'il eſt exactement conforme à celui des Tranſactions. Qu'on ſe donne donc la peine d'examiner ce zodiaque d'un peu près, & j'oſe me flatter qu'on ne verra point au centre un corps de femme. Que l'on compare, pour mieux s'en aſſurer, cette figure du centre avec celle de la Vierge du même zodiaque, & on ſera à portée de juger de la différence; elle eſt frappante pour quiconque a des yeux exempts de préjugé.

Les Indiens ne ſe trompent pas ſi groſſièrement; ils caractériſent mieux les ſexes de l'eſpèce humaine que ne le penſent MM. Dupuis & de Lalande. La Vierge, nous le répétons, eſt dans le carré qui ſuit le Lion; c'eſt-là un véritable corps de femme; il eſt parfaitement caractériſé, car il a de groſſes mamelles ſaillantes, parfaitement arrondies. Les ſculpteurs Indiens n'oublient jamais de bien marquer ces parties ſi intéreſſantes & en même temps ſi

caractériſtiques de la femme, & peut-être plus dans l'Inde qu'ailleurs. Nous diſons donc que la figure du milieu du zodiaque Indien, eſt celle d'un jeune homme, & que ce n'eſt point par conſéquent Iſis.

Cette figure reſſemble beaucoup au dieu *Sommonocodom* des Banians de l'Inde. On voit encore chez les Indiens, des religieux pénitens de la ſecte des *Joguis*, qui ſe tiennent perpétuellement dans cette attitude ; mais je crois plus volontiers encore que cette figure eſt Witthnou, dans ſa neuvième incarnation. Cette incarnation porte le nom de *puiſſant.* Le dieu & la déeſſe ſignifient ici la matière & le principe des êtres ; ce qui me paroît convenir parfaitement au centre d'un zodiaque où la Vierge occupe un des ſignes.

A l'egard des quatre points de la diviſion du zodiaque Indien, qui ſont marqués au milieu des quadrilatères, M. de Lalande retourne adroitement le ſensde la choſe, & il me fait dire ce que je n'ai jamais ni penſé, ni dit. « M. le Gentil, dit ce ſavant, les regarde comme faiſant » les commencemens de chaque ſaiſon, au Verſeau, au » Taureau, au Lion & au Scorpion. M. Dupuis ne croit » pas que ce ſoit une preuve qu'il repréſente l'état du » ciel, environ deux mille cinq cents ans avant l'ère » chrétienne, lorſque le Taureau, le Lion, le Scorpion » & le Verſeau occupoient les équinoxes & les ſolſtices, » puiſque nous ſavons que les anciens, lors même que le » Bélier, le Cancer, la Balance & le Scorpion répondoient » à ces quatre points cardinaux, avoient cependant fixé » au Verſeau, Taureau, Lion & Scorpion, le commen- » cement des ſaiſons, comme on peut le voir dans Varron, » *de re ruſticâ*, liv. 1. c. 18. »

Je n'ai rien aſſuré au ſujet de l'antiquité du zodiaque Indien ; j'ai ſeulement oſé dire, puiſqu'il faut le répéter ici, que ce ne ſont pas, à mon avis, les angles des quadrilatères qui déſignent dans ce planiſphère les ſolſtices & les équinoxes, comme l'a cru M. Dupuis, attendu

qu'il ſe trouve quatre ſignes dans chacun des quadrilatères & qu'il devroit n'y en avoir que trois, &c. *(Voyez ci-deſſus, p. 412 & 413)*; d'où j'ai conclu, & je perſiſte dans ma concluſion, qu'au lieu de repréſenter l'ordre des choſes lorſque la Vierge étoit au ſolſtice, comme l'a cru M. Dupuis, ce ſeroit au contraire l'ordre des choſes, le Lion étant au ſolſtice. Je n'ai donc rien aſſuré que contre l'opinion de M. Dupuis. Je ne pouvois pas en effet rien aſſurer au ſujet de l'antiquité de ce monument, moi qui le regardois, non comme un ouvrage des Brames, mais comme le travail d'un ſculpteur Indien, pendant que M. Dupuis y croyoit voir des preuves, indirectes à la vérité (car il faut être fidèle dans ſes citations) de l'origine du zodiaque lorſque le Capricorne étoit au ſolſtice d'été, quatorze mille ans environ avant Jéſus-Chriſt.

Quant à l'argument tiré de Varron, j'avoue que je ne l'entends guère; car, que les anciens, c'eſt-à-dire, ſans doute les Romains, ayent fixé ou non le commencement des ſaiſons au Verſeau, &c. c'eſt une eſpèce de diviſion politique de ces peuples, qui n'empêche pas que deux mille cinq cents ans avant Jéſus-Chriſt, le Lion n'ait été vraiment au ſolſtice, & que ce ne fût à ce point que les anciens, bien des ſiècles avant les Romains, ont commencé l'année; car tout le monde ſait que c'étoit à ce point qu'étoit, bien anciennement avant Hypparque, le point du départ du Soleil & de l'année.

« Le zodiaque Indien, dit l'extrait, n'eſt pas plus fa-
» vorable au ſyſtème de M. le Gentil ſur la génération des
» deux enfans Gémeaux, fils de la Terre ou de la Vierge,
» puiſque ce zodiaque ne nous répréſente point d'image,
» ni d'un, ni de deux enfans, dans le lien des Gémeaux,
» mais celle d'un homme fait qui ſoutient deux globes.
» Que devient la ſuppoſition de M. le Gentil ſur les
» deux Jumeaux naiſſans au bout de neuf mois que le
» ſoleil a parcouru la Vierge? Ici point d'enfance, mais
» un homme qui tient deux globes unis. »

Je ſavois bien que mon hypothèſe ſur l'origine du zodiaque, ne cadre point avec le zodiaque Indien pour les Gémeaux; mais je ne voyois pas la néceſſité qu'elle y cadrât. M. Dupuis lui-même dit le contraire dans ſon ouvrage.

Après l'explication des douze ſignes dans ſon hypothèſe, & ſur-tout du ſigne du Sagittaire, qui n'eſt pas fort heureuſe, M. Dupuis finit en diſant :

« Quoi qu'il en ſoit, quand même nous ne ſaiſirions pas » au juſte l'idée qu'on a voulu préſenter par ces douze » emblèmes; il ſuffit qu'il s'en trouve pluſieurs dont le » ſens ſoit ſi naturel qu'il ne puiſſe ſouffrir d'équivoque.... » Tout ce qu'on pourroit conclure de l'inſuffiſance de » l'explication de quelques-uns de ces ſignes, c'eſt que » l'intelligence du ſens qu'il renferme, dépend de l'hiſtoire » naturelle de ce pays, ou des occupations de ces peuples, » ou du préjugé qui leur faiſoit attribuer certaines qualités » à tels ou tels animaux, &c. »

Je n'aurois donc jamais imaginé de la part de M. Dupuis qui poſſède ſi bien la matière que nous traitons tous les deux, une pareille objection ; j'ai peine encore à me figurer qu'on me la faſſe ſérieuſement : comme ſi mon hypothèſe devoit s'accorder avec des figures qui tiennent évidemment à quelques coutumes ou uſages qui ſont dans tel ou tel pays, & qu'on ne connoît point dans un autre; & ne pouvoit pas jouir du privilége de liberté que M. Dupuis donne à la ſienne.

Comme ſi, excepté ce zodiaque, les Gémeaux n'étoient pas dans tous les zodiaques de l'univers connu ; comme ſi on pouvoit me prouver que les Indiens n'ont point en effet les Gémeaux dans leur zodiaque, à moi, dis-je, qui les ai trouvés dans celui que j'ai apporté de l'Inde. *(Voyez mon Voyage, Tom. I.)* Comme ſi mon hypothèſe ſeroit à rejeter parce que le zodiaque de Sainte-Geneviève que je peux ſans le moindre ſcrupule comparer ici au zodiaque Indien, n'a point réellement le Cancer ni le

Scorpion, mais une cigogne & un ſerpent, & parce qu'à Notre-Dame un ciſeleur en pierre ou en bois eſt à la place de la Vierge.

Comme ſi enfin mon hypothèſe devoit s'accorder avec un zodiaque que MM. Dupuis & de Lalande ne regardent point eux-mêmes comme un monument aſtronomique, & qui en effet ne me paroît qu'un ouvrage de ſculpteur, comme ceux qui ſont à Paris dans nos égliſes gothiques, & comme je le dis ailleurs *(volume de l'Académie 1785)*.

Mon hypothèſe, je le répète, eſt conforme au zodiaque que j'ai apporté de l'Inde, conſacré chez les Brames à repréſenter les mouvemens du Soleil & de la Lune; elle s'accorde avec celui que l'on trouve dans la grammaire Indienne du pere Beſchio, jéſuite Italien, dont j'ai parlé ailleurs; elle s'accorde avec le zodiaque de toutes les nations connues pour en avoir un, puiſque toutes elles ont deux gémeaux ou deux chevreaux: c'eſt toujours le ſymbole de fécondité que j'ai eu en vue, & tout cela me ſuffit. La figure de l'ibis qui eſt à Sainte-Geneviève, n'empêche pas que le Cancer ne ſoit cenſé y être; le dragon n'empêche pas que le Scorpion n'y ſoit.

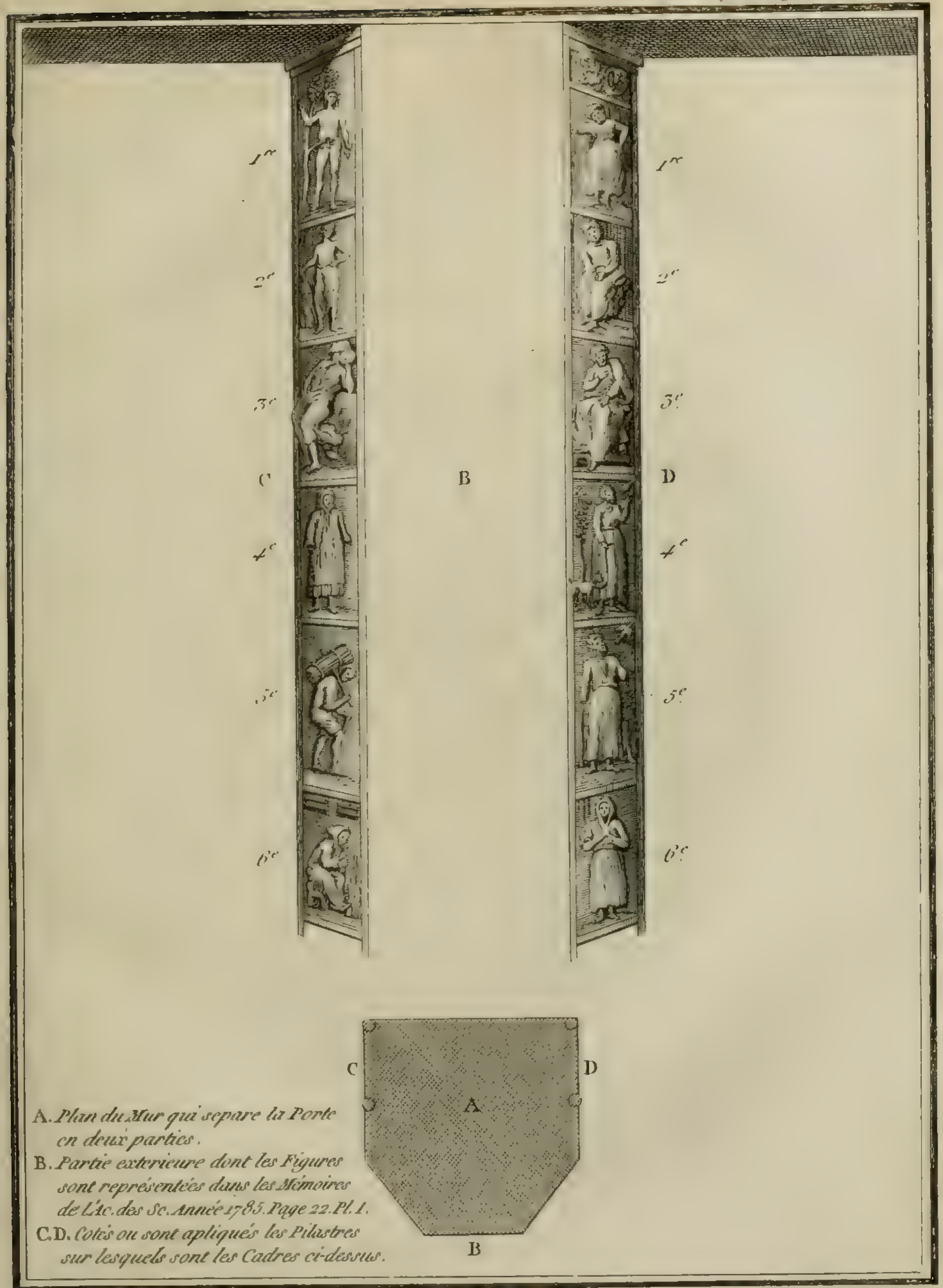
A Saint-Denys, l'eſpèce de lézard à huit pattes qui tient lieu du Scorpion, n'empêche pas que le Scorpion ne ſoit en effet caché à cette même place ſous la forme de ce lézard. Nous jugeons de même de ce jeune homme qui dans le zodiaque Indien, tient la place des Gémeaux; ce ſigne-ci y eſt toujours, caché ſous l'emblème d'un jeune homme: cela tient ſans doute à quelque coutume du pays, ou à quelque uſage plus récent, comme l'uſage étoit en Egypte de peindre un ibis à la place du Cancer, &c. Peut-être ſeroit-il poſſible de rendre raiſon de ce ſymbole qu'on voit dans le zodiaque Indien. Nous la haſarderons une autre fois.

« Quoi qu'il en ſoit, nous avons des obligations à M. le » Gentil, conclut enfin M. de Lalande, d'avoir publié un » monument auſſi curieux que celui de Notre-Dame, &

» c'eſt pour tendre au même but que nous avons placé ici » les réflexions que M. Dupuis nous avoit communiquées » au mois d'octobre 1786, ſur ce monument de la religion » payenne de nos ancêtres. »

La concluſion de M. de Lalande eſt flatteuſe aſſurément, & je lui ſais gré, ainſi qu'à M. Dupuis, de leurs obſervations; & comme il paroît que nous tendons les uns & les autres au même but, c'eſt pour ne pas nous en écarter que nous venons de faire les réflexions ptécédentes ſur celles de MM. Dupuis & de Lalande au ſujet du zodiaque de Notre-Dame; monument à la vérité auſſi curieux qu'intéreſſant, & dont nous croyons avoir aſſigné l'origine; mais où nous ne remarquons aucune trace particulière d'ancien temple Egyptien.





Fossier del. Y. Le Gouaz sc.

Figures Symboliques qui sont sur les côtés du Pilastre qui est au milieu de la Porte de la Tour septentrionale de l'Eglise de N. D. de Paris.



OBSERVATIONS

Sur une espèce de Varech qui croît sur les côtes occidentales de la Basse-Normandie, & sur une petite Coquille qui se loge dans le tronc de cette plante, & y prend son accroissement.

Par M. LE GENTIL.

PENDANT les différens séjours que j'ai faits sur les bords de la mer, en 1787 & 1788, pour y observer les réfractions horizontales, je me suis en même temps occupé d'observations de physique en tout genre. Celle que je vais rapporter ici, m'a paru mériter l'attention de l'Académie.

Les naturalistes connoissent beaucoup d'espèces de plantes de varech. M. de Jussieu, de cette Académie, en a particulièrement une très-belle collection & très-bien conservée, qu'il a bien voulu me faire voir; mais je n'y ai pas bien parfaitement reconnu celle qui fait le sujet de ce Mémoire, & j'ignore si elle est bien connue des naturalistes qui ont parlé de ces plantes. Ayant consulté M. de Jussieu, qui a bien voulu m'aider de ses lumières, nous l'avons cherchée dans Linné, & M. de Jussieu a trouvé qu'elle est dans la classe du *fucus palmatus*.

La tige de cette plante s'élève à la hauteur de deux à trois pieds, ronde, sur une grosseur qui va peu en diminuant: je n'en ai pas vu qui eussent plus de onze à douze lignes de diamètre. Son pied est garni d'une prodigieuse quantité de fortes racines qui doivent la tenir fermement attachée sur les rochers; elle croît fort avant dans la mer, à ce qu'on m'a assuré. Du haut de la tige part une grande feuille, de même longueur à peu-près, large de quatre à cinq ou six pouces au moins, mince, lisse; & ce qui est plus remarquable, cette feuille est d'une très-belle couleur verte, pendant que

la tige eſt jaunâtre, ce qui n'eſt pas ainſi des autres eſpèces connues; mais l'un & l'autre perdent cette couleur en ſe deſſéchant. Cette feuille reſſemble à un large ruban, & eſt ſi mince, qu'elle ne peut ſe ſoutenir; elle retombe ſur elle-même le long de la tige. Si on la prend dans le ſens de ſa longueur, elle ſe déchire avec la plus grande facilité, & on la trouve rarement ſans l'être, ce qui au premier coup-d'œil me fit croire que cette plante avoit en effet pluſieurs grandes feuilles; mais je reconnus par la ſuite, en l'examinant bien, qu'elles n'étoient que la même feuille, plus ou moins déchirée par les vents & les lames de la mer qui bat perpétuellement ces plantes, ſoit lorſqu'elles ſont ſur pied, ſoit en les arrachant de leur place pour les amener au plein; car, comme je l'ai dit, elles y viennent de fort loin. Ces feuilles priſes en travers ou dans le ſens de leur largeur, ne ſouffrent pas qu'on les déchire avec la même facilité; elles réſiſtent fortement avant qu'on en vienne à bout.

Cette plante n'eſt pas fort commune, du moins ſur la côte que j'ai viſitée, ſi on la compare à l'immenſe quantité des autres eſpèces dont le fond de la mer eſt tapiſſé. On en trouve peu de celle-ci, & rarement d'entières, hors le temps des grandes marées, encore n'en voit-on pas à toutes les grandes marées. Ce fut une de ces marées extraordinaires, arrivées à la fin de février 1788, & dont je parlerai ailleurs, qui apporta pluſieurs plantes de cette eſpèce ſur la grève que j'habitois alors, & qui par ce moyen me procura le plaiſir de l'examiner à mon aiſe; car je n'en avois encore trouvé que quelques fragmens.

Les premières marées m'en ayant donc procuré quelques-unes d'aſſez entières, ce qui me ſurprit, fut de remarquer à preſque toutes les tiges de ces plantes, qu'elles avoient, principalement vers le pied, tout près des racines, une cavité parfaitement elliptique de quatre, cinq & ſix lignes, plus ou moins, de profondeur, liſſe & polie, & de la plus grande régularité. Curieux d'en ſavoir la cauſe, je parcourus la côte ce jour-là, dans une étendue de plus d'une lieue;

je

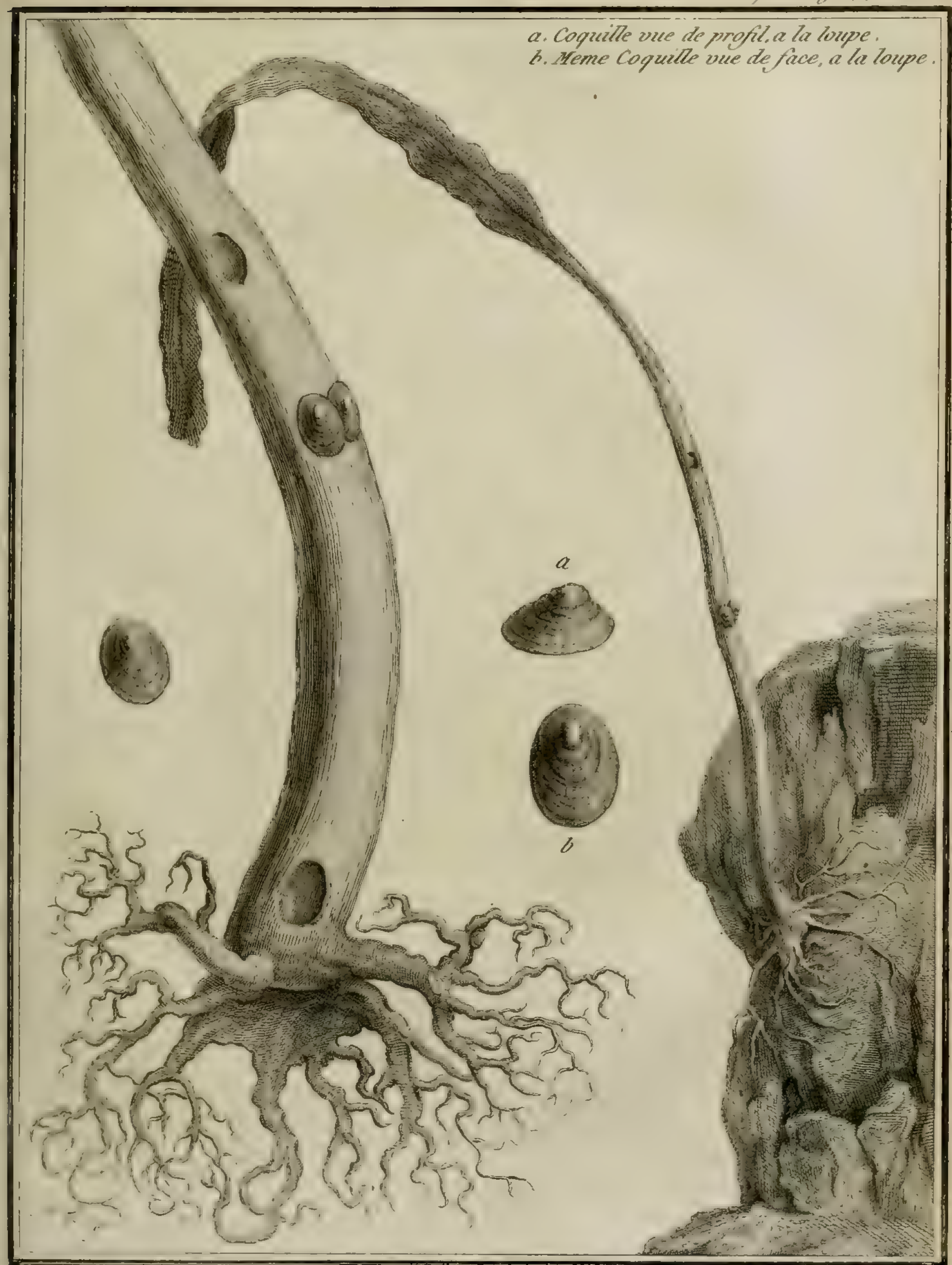
je trouvai encore çà & là quelques-unes de ces plantes fort entières au milieu d'une prodigieuse & immense quantité d'autres plantes de varech, que les paysans des environs enlevoient pour leur servir d'engrais. C'étoit l'ouvrage de la mer pendant les deux premiers jours de la marée. Or, je remarquai à chacune des plantes que je trouvai, la même cavité elliptique plus ou moins profonde, & par conséquent plus ou moins grande; je ne trouvai rien de plus. Enfin, le jour même de la plus forte marée, après la retraite des eaux, je rencontrai un gros paquet de ces plantes, & dans les tiges de quelques-unes, trois petites patelles qui étoient enfoncées dans chacune de ces cavités elliptiques dont j'ai parlé; l'extrémité de leur sommet assez saillant, étoit lisse & polie, & me parut ressembler à une petite perle. La coquille étoit de la couleur de la plante, savoir, olivâtre. En les touchant, je sentis que ces coquilles étoient fortement adhérentes au fond de leurs cellules; je parvins cependant à les ôter, sans les endommager: je détachai ensuite l'animal du fond de sa coquille avec le bout d'un canif; mais je fus surpris de voir que cet animal qui étoit de la couleur même de sa coquille, nageoit alors en quelque sorte dans une liqueur d'un bleu superbe. Je regardai pour-lors la coquille avec la loupe, & je vis qu'en effet le fond en étoit bien de la couleur de la tige; mais que de plus cette petite coquille étoit partagée, depuis son sommet jusqu'à sa base, par plusieurs bandes ou rubans d'un très-beau bleu; & que ces bandes étoient encore toutes séparées dans le même sens par autant de lignes ponctuées, & du même bleu, ce qui produit à la loupe un bel effet, & fait regretter que cette coquille ne soit pas plus grande: mais il semble que cet animal soit destiné à tirer sa subsistance de cette plante, & que par conséquent les plus grandes coquilles ne puissent excéder le diamètre de la tige. La plus grande de ce genre que j'ai trouvée, n'a que cinq lignes dans la plus grande largeur, & six dans son grand axe.

Je penſe que la mer entraîne avec elle çà & là du frai ou ſemence de cet animal; que ce frai s'attache à ces plantes quand il en rencontre; qu'il y trouve l'aliment qui lui convient, qu'il en fait ſa nourriture en ſe creuſant en même temps une cellule, qu'il agrandit par conſéquent à meſure qu'il prend ſon accroiſſement. Auſſi une fois détaché de ſa demeure & entraîné par la mer, il doit périr, par ce qu'il eſt difficile qu'il puiſſe rejoindre une ſemblable plante, & un autre aliment qui lui ſoit propre.

J'ai vu dans le cabinet de M. de Juſſieu deux ou trois coquilles que j'ai reconnues pour être de l'eſpèce de celles-ci; elles ſont de la même grandeur, elles ont vraiſemblablement la même origine.

J'ai fait faire un deſſin de la plante & des coquilles, que je joins à ce Mémoire.





Fossur del. Y. Le Gouaz sc.



RECHERCHES

Sur un Arbrisseau connu des Anciens sous le nom de Lotos de Lybie.

Par M. DESFONTAINES.

LES naturalistes anciens avoient donné, comme l'on sait, le nom de *lotos* à diverses espèces de plantes économiques, parmi lesquelles il en est deux qui ont eu la plus grande célébrité.

L'une, particulière à l'Égypte, croissoit dans les canaux qui servoient à conduire les eaux du Nil pour arroser & fertiliser les campagnes. C'est le nénufar des Arabes, connu des botanistes modernes sous le nom de *nymphæa lotus*, Lin. dont Prosper Alpin nous a laissé une histoire très-exacte & très-détaillée *(a)*. Cette plante remarquable par la beauté de ses fleurs qui ressemblent beaucoup à celles de notre volet blanc, *nymphæa alba*, Lin. est décrite dans les ouvrages de Théophraste & de Pline, sous le nom de *lotos* d'Égypte. Ses semences & ses racines étoient employées autrefois, & le sont encore aujourd'hui, à la nourriture des hommes *(b)*.

L'autre espèce de *lotos* qui va faire le sujet de ce Mémoire, aussi célèbre, mais beaucoup moins connue que

(a) Alpin, *Exot. p. 213.*

(b) On voit aussi sur d'anciennes médailles, sur des pierres gravées & sur des monumens Egyptiens, le fruit d'une autre espèce de *lotos*, qui est évasé comme un ciboire, & percé de trous ronds à son extrémité. Ce fruit appartient au *nymphæa nelumbo* Lin. Il paroît que c'est la fleur de cette plante qu'un poëte présenta comme une merveille à Hadrien, sous le nom de *lotos antinoïen*. Elle est représentée sur plusieurs monumens anciens, servant de siége à un enfant que Plutarque dit être le crépuscule, à cause de la couleur rose de la fleur du *nelumbo*. *(Acad. des Inscriptions, tome III, année 1723, p. 179).*

la précédente, croiſſoit naturellement ſur les côtes de la Lybie, & avoit donné ſon nom à un peuple nombreux de ces contrées, auquel elle ſervoit de principale nourriture.

La plupart des naturaliſtes & des hiſtoriens anciens ne nous en ont laiſſé que des deſcriptions très-imparfaites, & d'après leſquelles il eſt difficile de s'en former une idée juſte; auſſi leurs interprètes & leurs commentateurs ont-ils fait des efforts inutiles pour le reconnoître, & rarement même s'accordent-ils entr'eux. Les uns ont dit que c'étoit l'aliſier, *cratagus torminalis* Lin. D'autres l'ont pris pour le micocoulier, *celtis auſtralis* Lin. Quelques-uns ont penſé que c'étoit une eſpèce de plaqueminier, *dioſpyros lotus* Lin. Mais en liſant attentivement les deſcriptions du *lotos*, que Théophraſte, Polybe & Pline nous ont tranſmiſes, & en les comparant avec les arbres dont il vient d'être mention, on voit qu'elles ne peuvent s'y rapporter; & pour réfuter plus sûrement encore toutes ces conjectures, il me ſuffira d'aſſurer qu'aucun de ces arbres ne ſe trouve dans le pays des anciens Lotophages, où j'ai ſéjourné pendant long-temps, & que j'ai viſité avec beaucoup de ſoin.

Il eſt hors de doute que ces peuples habitoient particulièrement dans le voiſinage du golfe qui porte le nom de petite *Syrte*, ſur les confins de la partie méridionale du royaume de Tunis, où ſe trouve l'île *Gerba*, connue des anciens ſous le nom de *Lotophagitis*, parce qu'elle produiſoit abondamment du *lotos*.

Strabon déſigne le pays des Lotophages de manière à ne nous laiſſer aucun doute ſur ſa poſition. « A l'entrée de » la petite Syrte, dit ce géographe célèbre, eſt une île » oblongue, d'une moyenne étendue, nommée *Cercinna*, tout » près on en trouve une plus petite, appelée *Circinnitis:* (c)

(c) Ces deux îles, ſituées exactement comme le dit Strabon, ont conſervé leur ancien nom; on les appelle encore aujourd'hui les îles *Cercinna* ou *Karkana*.

» Là, ajoute le même auteur, commence la petite Syrte » ou Syrte des Lotophages ; sa circonférence est d'environ » 1600 stades, & sa largeur de 600. Vis-à-vis les deux » promontoires qui forment l'entrée du golfe, sont deux » îles voisines du continent ; l'une est celle de *Cercinna*, » qui vient d'être citée ; l'autre se nomme *Meninx*, que l'on » croit être le pays des Lotophages, dont Homere a parlé, » parce que le *lotos*, dont le fruit a une saveur très-agréable, » y croît en abondance ».

Pline confirme exactement ce que dit Strabon sur la situation de ce pays célèbre. « La partie de l'Afrique qui » regarde l'Italie, produit un arbre remarquable connu sous » le nom de *lotos* : il vient en grande quantité aux environs » des Syrtes ..... Son fruit a un goût si délicieux qu'il a » donné son nom à un peuple nombreux, & à toute l'étendue » du pays où il croît naturellement ».

C'est donc dans la partie méridionale du royaume de Tunis, & particulièrement aux environs de la petite Syrte, qu'il faut rechercher le *lotos*. Il est presqu'impossible qu'un végétal qui y fut autrefois assez abondant pour servir de principale nourriture aux hommes, & pour fournir, comme le dit Pline, à la subsistance des armées Romaines lorsqu'elles traversoient l'Afrique, ne se soit pas conservé dans ces contrées.

Le *lotos* de Lybie étoit un arbre, & non une herbe comme celui d'Egypte ; c'est un fait attesté par tous les naturalistes anciens qui en ont parlé, & que l'on ne peut révoquer en doute, comme nous le verrons ci-après.

Pendant le séjour que j'ai fait sur les côtes de Barbarie, & dans les lieux même où croissoit anciennement le *lotos*, je n'ai rien négligé pour découvrir un végétal aussi intéressant. J'avois lu avec attention les descriptions qu'en ont laissées les anciens, & entr'autres celles de Théophraste de Pline, & de Polybe qui avoit observé lui-même le *lotos*.

Les recherches que j'ai faites m'ont conduit à croire que c'étoit une espèce particulière de jujubier sauvage, qui est

encore aujourd'hui très-répandue dans toute la partie méridionale du royaume de Tunis, ſur les bords du déſert & aux environs de la petite Syrte. Le Docteur Schaw avoit le premier embraſſé cette opinion, ſans cependant qu'il l'ait appuyée ſur des preuves auſſi fortes que celles que je vais offrir. D'ailleurs, il n'en a donné qu'une deſcription très-imparfaite à la fin du catalogue des plantes imprimé à la ſuite de ſes voyages, avec une figure qui n'en repréſente ni les fleurs ni les fruits, & d'après laquelle il eſt très-difficile, pour ne pas dire impoſſible, de le reconnoître. Il le nomme *ziziphus ſylveſtris inſt. rei herb.* dénomination qui manque d'exactitude, puiſque Tourneſort déſigne par cette phraſe, une plante différente de celle qui eſt en queſtion.

Le jujubier décrit par Linné ſous le nom de *rhamnus lotus*, paroît bien être l'arbriſſeau dont j'offre ici l'hiſtoire; mais il faut avouer en même temps que les caractères qui le diſtinguent, ont échappé à ce célèbre naturaliſte; il paroît même qu'il n'en a parlé que d'après le Docteur Schaw. Je vais en donner une deſcription abrégée, & je diſcuterai enſuite les paſſages de quelques auteurs anciens où il eſt fait mention du *lotos*, & d'après leſquels il me paroît évident qu'il n'y a que l'arbriſſeau en queſtion qui puiſſe raiſonnablement s'y rapporter.

Le *rhamnus lotus* s'élève à la hauteur de quatre à cinq pieds. Ses rameaux nombreux & recourbés vers la terre, ſont garnis d'épines qui naiſſent deux à deux, & dont l'une eſt droite & l'autre courbe, comme celles du jujubier cultivé.

Ses feuilles tombent pendant l'hiver; elles ſont alternes, ovales, obtuſes, légèrement crénelées, larges de trois à quatre lignes, & marquées de trois nervures longitudinales.

Les fleurs naiſſent en petits groupes aux aiſſelles des feuilles, quelquefois elles ſont ſolitaires.

Le calice eſt à cinq diviſions ovoïdes, ouvertes, partagées longitudinalement par une petite ligne ſaillante.

La corolle eſt compoſée de cinq pétales plus courts que le calice, & creuſés en forme de demi-entonnoir.

Les étamines, au nombre de cinq, ſont oppoſées aux pétales, & les deux ſtyles ſont courts & rapprochés.

Le fruit eſt un drupe pulpeux à peu-près ſphérique, de la groſſeur d'une prunelle ſauvage, renfermant un noyau oſſeux, à une ſeule loge. En mûriſſant, il prend une couleur rouſſe approchante de celle de la jujube.

Le *rhamnus lotus* fleurit en mai, & ſes fruits ſont mûrs dans le courant d'août & de ſeptembre : leur goût approche de celui de la jujube, mais il eſt plus agréable.

Il eſt évident, d'après ce que je viens de dire, que cet arbriſſeau a de grands rapports avec le jujubier cultivé, dont il diffère ſur-tout par la forme de ſon fruit, qui eſt ſphérique, & au moins une fois plus petit que celui du précédent. Ses feuilles ſont auſſi moins alongées proportionnellement à la longueur. Le jujubier s'élève à la hauteur de vingt à vingt-cinq pieds : Le *rhamnus lotus* forme toujours un buiſſon ; il ſe trouve abondamment dans preſque toutes les plaines ſablonneuſes & arides du royaume de Tunis, particulièrement ſur les bords du déſert & aux environs de la petite Syrte.

Je vais maintenant rapporter les paſſages des auteurs anciens où il eſt fait mention du *lotos*, afin de les comparer avec mes obſervations, & d'établir les raiſons qui me portent à croire que c'eſt le jujubier que je viens de décrire, qui eſt le véritable *lotos* de Lybie.

Hérodote dit que le fruit du *lotos* a la forme des graines du lentiſque, qu'il a une ſaveur auſſi agréable que la datte, qu'il ſert d'aliment aux Lotophages, & qu'ils en font du vin. Ce récit ne nous donne à la vérité que peu de connoiſſance ſur le *lotos ;* mais du moins la comparaiſon que l'auteur fait de ſon fruit avec la ſemence du lentiſque, eſt exacte & conforme à ce que j'ai dit de celle du jujubier,

que je regarde comme le *lotos* : elles ont l'une & l'autre une figure à peu-près ſphérique, & elles ne diffèrent ſenſiblement que par la groſſeur.

Selon Théophraſte, le *lotos* qu'il nomme *celtis*, eſt à peu-près de la grandeur d'un poirier; ſes feuilles ſont découpées & reſſemblent à celles de *l'ilex*. Le fruit eſt de la groſſeur de la fêve d'Egypte (ou colocaſe); il mûrit comme les raiſins en changeant de couleur, & naît comme ceux du myrte, ſur les deux côtés des tiges qui ſont nombreuſes & touffues. . . . Sa ſaveur eſt douce, il ne fait aucun mal *(d)*. Celui qui eſt ſans noyau eſt préféré à l'autre : on en fait du vin, & l'arbre produit une très-grande quantité de fruits, &c.

Pline parle du *lotos* à peu-près dans les mêmes termes que Théophraſte; il le compare au *celtis* d'Italie, mais il dit que le climat l'a fait changer, qu'il eſt de la grandeur d'un poirier, quoique cependant Cornélius Népos aſſure qu'il a moins d'élévation. Ses rameaux ſont touffus comme ceux du myrte. La couleur du fruit qui imite celle du ſafran, change ſouvent avant la maturité, comme dans les raiſins. Si ces deux deſcriptions ne ſont ni auſſi préciſes ni auſſi détaillées qu'on pourroit le déſirer, du moins elles renferment pluſieurs caractères qui conviennent mieux à notre jujubier, qu'à aucun autre arbre du pays des anciens Lotophages. Ce que Théophraſte & Pline diſent de la forme du fruit, de ſa groſſeur, de ſon goût, de ſa couleur, de la manière dont il naît ſur des rameaux touffus comme ceux du myrte, &c. ſe rapporte parfaitement à l'arbriſſeau dont je viens de parler. Il ne paroît pas d'ailleurs que ces deux auteurs ayent eu des notions bien préciſes ſur le *lotos*; aucun d'eux ne dit l'avoir obſervé, & l'on voit qu'ils n'en parlent que ſur la foi d'autrui; il n'eſt donc pas étonnant que leurs deſcriptions manquent d'exactitude.

(d) Les noyaux des pêches, des ceriſes, des prunes, &c. s'oblitèrent quelquefois par la culture. (Duham. *Traité des arbres fruitiers)*.

Théophraſte

Théophraste raconte que le *lotos* étoit si commun dans l'île Lotophagite & sur le continent adjacent, que l'armée d'Ophellus ayant manqué de vivres en traversant l'Afrique pour se rendre à Carthage, se nourrit des fruits de ces arbres pendant plusieurs jours ; & précisément la plupart des plaines arides & incultes, qui conduisent de la partie méridionale du royaume de Tunis, vers les ruines de l'ancienne Carthage, sont encore aujourd'hui couvertes en beaucoup d'endroits de l'espèce de jujubier que je prends pour le *lotos* : je n'y ai observé aucun autre arbre ou arbrisseau avec lequel on puisse le confondre.

Si nous consultons Polybe qui avoit vu le *lotos* de Lybie, cet historien nous offrira encore des rapprochemens plus frappans que ceux que je viens de rapporter.

« Le *lotos*, dit cet auteur, est un arbrisseau rude & armé » d'épines; ses feuilles sont petites, vertes, semblables à » celles du *rhamnus*, mais plus larges & plus épaisses. Les » fruits encore tendres ressemblent aux baies de myrte : » lorsqu'ils sont mûrs, ils se teignent d'une couleur de » pourpre ; ils égalent alors en grosseur les olives rondes; » & chacun renferme un noyau osseux dans son intérieur ».

On voit que ces observations sont parfaitement conformes avec la description que j'ai donnée du *rhamnus lotus*. Je sais que quelques commentateurs regardent le *lotos* de Polybe comme une espèce différente de celle de Théophraste & de Pline ; mais il me semble que c'est sans fondement, car les descriptions de ces deux naturalistes ont plus de rapport avec le jujubier que j'ai indiqué pour le *lotos*, & qui est le même que celui de Polybe, qu'avec aucun autre arbre qui croisse sur les côtes de Barbarie.

Polybe ne s'est pas seulement borné à le décrire, il nous apprend aussi la manière dont on le préparoit autrefois, & ce qu'il en dit, servira encore à confirmer l'opinion que j'ai embrassée.

« Lorsque le *lotos* est mûr, les Lotophages le recueil- » lent, le broient & le renferment dans des vases. Ils ne

» font aucun choix des fruits qu'ils destinent à la nourriture » des esclaves, mais ils choisissent ceux qui sont de meilleure » qualité pour les hommes libres. Ils les mangent préparés » de cette manière : leur saveur approche de celle des figues » ou des dattes. On en fait aussi du vin, en les écrasant & » en les mêlant avec de l'eau. Cette liqueur est très-bonne à » boire, mais elle ne se conserve pas au-delà de dix jours, » c'est pourquoi ils n'en font qu'à mesure qu'ils en ont » besoin. »

Pline dit la même chose que Polybe sur la préparation du *lotos*, ce qui me porte d'autant plus à croire que c'est le même arbrisseau dont ils ont parlé l'un & l'autre; il ajoute seulement que le bois étoit recherché pour faire des instrumens à vent & divers autres ouvrages.

Aujourd'hui les habitans des bords de la petite Syrte & du voisinage du Désert, recueillent encore les fruits du jujubier que je prends pour le *lotos ;* ils les vendent dans les marchés publics, les mangent comme autrefois, & en nourrissent même leurs bestiaux. Ils en font aussi de la liqueur, en les triturant & en les mêlant avec de l'eau. Il y a plus, c'est que la tradition que ces fruits servoient anciennement de nourriture aux hommes, s'est même conservée parmi eux.

D'après toutes ces considérations, il me paroît évident que c'est le jujubier que je viens de décrire, qui est le véritable *lotos* des Lotophages. Il est le seul végétal des contrées qu'ils habitoient autrefois, qui puisse s'accorder avec ce qu'en ont dit les anciens, & sur-tout Polybe qui l'avoit observé lui-même.

Il est vraisemblable que c'est ce même *lotos* dont Homere a parlé ; mais son imagination féconde l'avoit entraîné un peu au-delà de la vérité, en lui faisant dire que « les fruits » de cet arbrisseau avoient un goût si délicieux, qu'ils faisoient » perdre aux étrangers le souvenir de leur patrie. » *(Odyssée, liv. IX.)*

Extraits des Auteurs anciens où il est mention du Lotos & des Lotophages, pour servir de preuves au Mémoire.

« CELTIS proprium genus præstat, magnitudine quanta » pyrus aut paulò minore incisuras foliorum habet ac ilicis » esse videantur.... Genera eius plura fructibus inter se discreta » produntur. Fructus magnitudine fabæ maturescit, uvarum » modo variè colores immutans. Nascitur quemadmodùm » myrtha adversa inter se densus super germina. Editur ab » iis quos Lotophagos vocant, prædulcis, suavis, innocuus » atque etiam bonæ frugis. Venustior est suavior qui sine » ligno interiori est; nam vel genus hujusmodi redditur & » vinum eo exprimitur. Multa hæc arbor fructuque copiosa » est; exercitum itaque Ophelli cùm in Carthaginem profi- » cisceretur vel eo fructu diebus pluribus pastum, commea- » tuum defectu, accepimus. Est igitur in insulâ Lotophagiâ, » Pharide vocatâ, largâ copiâ, cæterùm non minor in con- » tinenti, &c. *(Theophr. hist. Plant. lib. IV, caput 4, pag. 321;* » *edit. Amstelod. apud Henric. Laurentium. 1644.)* Theophrastes.

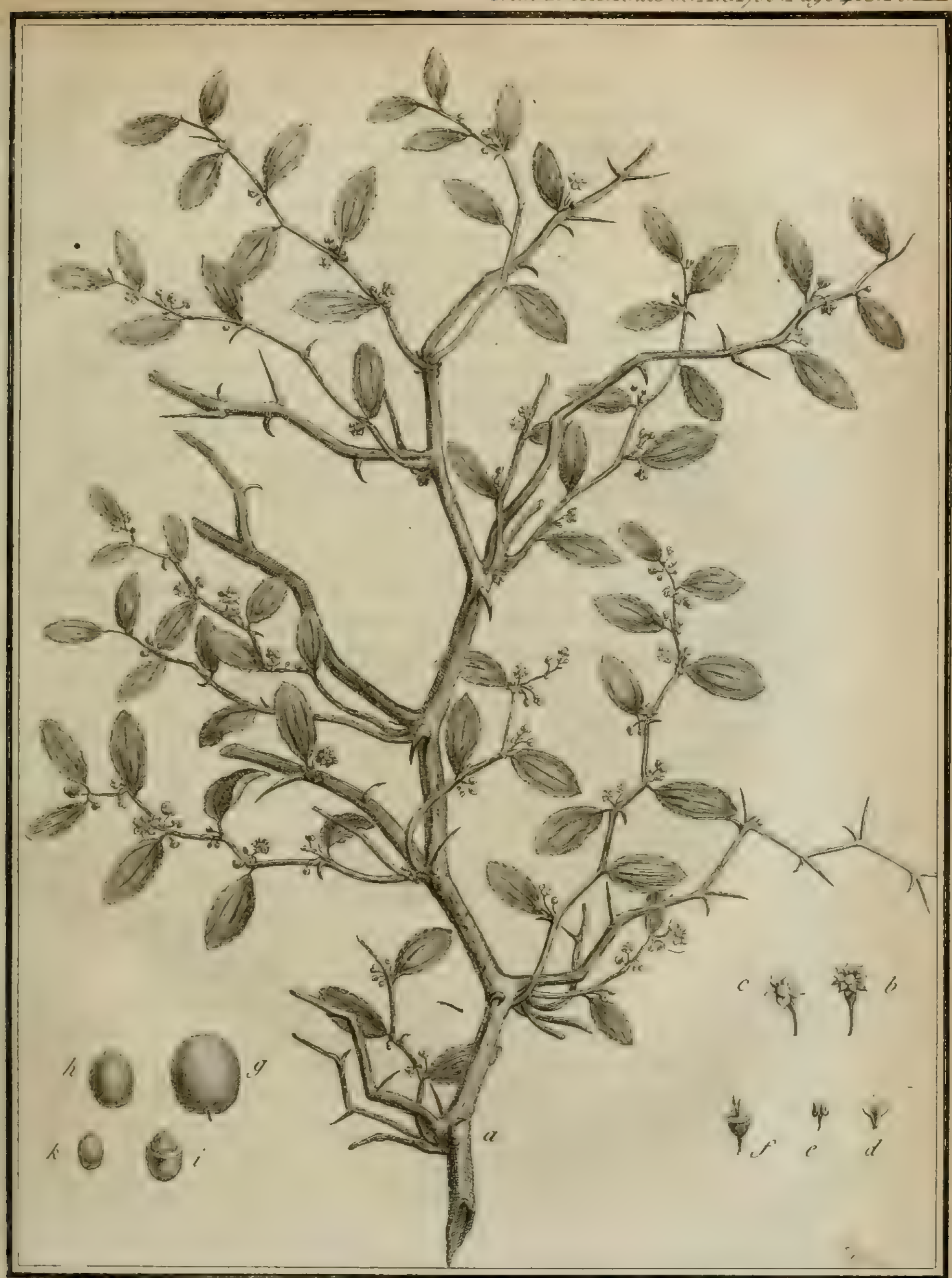
» Eadem Africa, quà vergit ad nos, insignem arborem loton » gignit quam vocant celtim, & ipsam Italiæ familiarem, sed » terrâ mutatam : precipuè est circa Syrtes atque Nazamonas... » Magnitudo quæ pyro, quanquam Nepos Cornelius brevem » tradat; incisuræ folio crebriores alioquin ilicis viderentur. » Differentiæ plures eæque maximè fructibus fiunt : magnitudo » huic fabæ, color croci, sed ante maturitatem alius atque » alius sicut in uvis. Nascitur densus in ramis myrti modo, » non ut in Italiâ cerasi, tam dulci ibi cibo ut nomen etiam » terræ gentique dederit, nimis hospitali advenarum obli- » vione patriæ. Ferunt ventris non sentire morbos qui eum » comedant. Melior sine interiore nucleo qui in altero genere » osseus videtur : vinumque exprimitur illi sine mulso quod » ultra denos dies negat durare idem Nepos; baccasque Plinius.

» contusas cum alica ad cibos doliis condi. Quin & exercitus » pastos eo accepimus, ultrò citròque commeantes per Afri- » cam. Ligno color niger; ad tibiarum cantus expetitur, & » radice cutellis capulos, brevesque alios usus excogitant. » Hæc ibi natura loti.

» Est autem eodem nomine & herba in Egypto caulis, in » palustrium genere; recedentibus enim aquis Nili riguis » provenit similis fabæ, caule foliisque densâ congerie » stipatis, brevioribus tantùm gracilioribusque, cui fructus » in capite papaveri similis incisuris omnique alio modo, » intus grana ceu milium. Incolæ capita in acervis putrefaciunt, » mox separant lavando & siccata tundunt, eoque pane utuntur. » Mirum est quod præter hæc traditur, sole occidente papa- » vera ea comprimi & integi foliis, ad ortum autem aperiri, » donec maturescant, flosque qui est candidus decidat : . . . . » radicem lotosque habet mali cotonei magnitudine, oper- » tam nigro cortice qualis & castaneas tegit, interius candidum » corpus gratum cibis sed crudum, gratius coctum sive aquâ » sive prunis, nec aliundè magis quàm purgamentis ejus sues » crassescunt. *(Plin. lib. XIII, cap. 17 & 18.)*

Herodotus. » Horum Gindanorum oram in mare porrectam incolunt » Lotophagi qui è solo loti fructu victitant, qui fructus est » instar fructûs lentisci, assimilis fructui palmarum : ex hoc » fructu Lotophagi vinum conficiunt. Lotophagis secundùm » mare vicini sunt Machyles loto & ipsi vescentes, sed minùs » quàm superiores : pertingunt usque ad ingentem amnem, » nomine Tritonem, in quo est insula quæ dicitur *Phla.* » *(Herod. lib. IV, pag. 123; edit. Henrici Stephani.)*

Strabo. » In principio Syrtis insula quædam est oblonga nomine » Cercinna, justæ magnitudinis, quæ urbem habet eodem no- » mine, item altera minor, Cercinnitis : his continua est minor » Syrtis quam Lotophagitin Syrtim vocant. Hujus sinûs am- » bitus est mille & sexcentorum fere stadiorum, oris latitudo » sexentorum. Juxta utrumque promontorium quæ os effi- » ciunt, insulæ adjacent continenti, Cercinna scilicet de quâ



Fossier del.

V. Le Gouaz sc.

Jujubier lotos. *Rammus lotus.*


NATURAL HISTORY

» diximus, & Meninx, magnitudine æquales. Menigem Lo-
» tophagorum terram putant cujus Homerus meminit....
» nam lotos arbor crebra in eâ est, fructu suavissimo. (*Strabo, p. 545, edit. Basil.*)

» Differit de loto dictâ in Lybiâ Polybius Megalopolitanus hoc pacto, *libro histor,* 120, quam se ipsum vidisse dicit: Polybius apud Athenæum.

» Est arbor loti non magna, at & aspera est, spinis armata, foliumque habet viride exiguum, rhamnoque simile, at latius & crassius. Fructus verò & colore & magnitudine similis est à principio albis myrti fructibus perfectis: ubi verò creverit, colore fit puniceus, magnitudineque simillimus olivis rotundis: at ubi perfectus est exiguum habet nucleum. Ubi verò factus fuerit maturus, eum colligunt atque hunc quidem famulis cum chondro cædentes in vasculâ constipant, illum autem deligentes eodem modo liberis pararunt, atque sic his vescuntur; est autem hoc epulum ficui persimile atque palmarum fructibus, odoris tamen suavitate jucundius. Vinum fit ex eo fructu irrigato atque cum aquâ contuso, quod gustui quidem est suave, voluptatemque affert, ac simile est mulso quo sine aquâ utuntur; ut non potest per majus spatium decem dierum perdurare quo fit ut paulatim faciant, veluti usûs ratio postulat. Faciunt ex illis acetum etiam. (*Polybius apud Athenæum, lib. XIV, caput. 12.*)

Explication de la Planche.

a. Une branche du *rhammus lotus.*
b. Une fleur.
c. Le calice.
d. Un pétale.
e. Une étamine.
f. Le pistil.
g. Le fruit.
h. Le noyau.
i. Le noyau ouvert.

MÉMOIRE

SUR LES INTÉGRALES DOUBLES.

Par M. LE GENDRE.

Préſenté le 12 Décemb. 1789.

JE me propoſe d'indiquer dans ce Mémoire, un moyen de transformation auquel on n'a pas fait attention juſqu'à préſent, & qui paroît très-propre à faciliter l'évaluation des intégrales doubles ou multiples, leſquelles ſervent à déterminer les ſolidités des corps, leurs ſurfaces courbes, la poſition de leurs centres de gravité, &c. L'objet que j'ai particulièrement en vue, eſt d'intégrer par ce moyen les formules qui donnent l'attraction d'un ſphéroïde elliptique quelconque ſur un point extérieur ; d'où réſultera la démonſtration directe de ce théorème déjà connu : *Si deux ſphéroïdes elliptiques ont leurs trois ſections principales décrites des mêmes foyers, les attractions qu'ils exercent ſur un même point extérieur, auront la même direction, & ſeront entr'elles comme leurs maſſes.*

Cette propoſition que j'avois démontrée rigoureuſement pour les ſphéroïdes de révolution *(Sav. étrang. Tom. X)*, & qui devenoit infiniment probable pour ceux dont toutes les coupes ſont elliptiques, a l'avantage de ramener le cas des points extérieurs à celui des points ſitués ſur la ſurface du ſphéroïde, & de réduire ainſi à une forme très-ſimple la valeur abſolue de l'attraction. Mais ſi la vérité de ce théorème peut être conſtatée aſſez facilement par l'induction & par une approximation pouſſée très-loin, il n'eſt pas auſſi facile de s'en procurer une démonſtration rigoureuſe, & je ne crains pas de dire que cette queſtion eſt une des plus épineuſes de l'analyſe. La ſeule ſolution qui en exiſte, eſt celle que M. de la Place a donnée dans les

Mém. de l'Académie, *année 1783;* mais la méthode de ce ſavant géomètre, quelque ingénieuſe qu'elle ſoit, laiſſe à déſirer un procédé plus direct, & ne répand d'ailleurs aucune lumière ſur l'intégration indéfinie.

La difficulté conſiſte en ce que la valeur de l'attraction, qui ſe réduit immédiatement à une intégrale double $\int P dx dy$, ne peut plus s'intégrer par les voies ordinaires, ni par rapport à x ni par rapport à y: l'une ou l'autre de ces intégrations ne pourroit donc s'effectuer qu'en introduiſant des tranſcendantes dont il ſeroit très-difficile de ſe débarraſſer pour obtenir le réſultat final ſous la forme la plus ſimple. En vain eſſayeroit-on de rendre l'une des deux intégrations poſſible par la transformation des coordonnées; ce moyen qui réuſſit dans d'autres occaſions, ne ſeroit dans celle-ci d'aucun ſecours.

Mais ſi la transformation des coordonnées, telle que la géometrie l'enſeigne, eſt un moyen limité & inſuffiſant, nous ferons voir que le changement des variables peut ſe faire d'une manière beaucoup plus générale; d'où réſulte un principe que je regarde comme très-fécond dans ces recherches, & très-propre à faciliter l'évaluation des intégrales doubles ou multiples.

Ce principe auquel j'étois parvenu par des conſidérations géométriques, & que j'ai examiné enſuite avec plus de ſoin, ne s'eſt point trouvé différent d'un moyen de transformation indiqué par M. de la Grange dans les Mémoires de Berlin, *an. 1773, pag. 125.* La propriété en appartient donc à cet illuſtre géomètre; il ne me reſte que la nouvelle forme ſous laquelle j'ai préſenté ce principe & l'uſage que j'en ai indiqué, uſage auquel il paroit que M. de la Grange n'a pas penſé, ou dont au moins il n'a fourni aucun exemple.

L'application de ce principe à la formule de l'attraction, offre tout d'un coup le moyen d'effectuer l'une des intégrations déſirées, & de parvenir ainſi à la ſolution du problème. Mais ſi la poſſibilité eſt manifeſtée au premier

abord, l'exécution souffre encore de grandes difficultés; par l'extrême complication qu'entraîneroient les procédés ordinaires, complication telle que l'usage de la méthode deviendroit illusoire, puisqu'il seroit à peu-près impossible d'en tirer le résultat final. Je pense que les géomètres verront avec plaisir les moyens que j'ai mis en usage pour vaincre ces difficultés; ils m'ont fourni de nouvelles propriétés générales de l'attraction des sphéroïdes, & m'ont enfin conduit à la proposition désirée.

Avant de traiter la question dans toute sa généralité, j'ai remarqué qu'il y avoit un cas particulier très-étendu, où la formule de l'attraction étoit intégrable immédiatement par les moyens ordinaires. Ce cas qui n'avoit été aperçu, ni par moi ni par aucun de ceux qui se sont occupés de cette matière, est celui où le point attiré est situé dans le plan d'une des trois sections principales du sphéroïde. Il est clair que l'attraction d'un sphéroïde de révolution sur un point quelconque placé au dehors, n'est qu'une sous-division de ce cas particulier, puisqu'on peut toujours supposer que le plan attiré est situé dans le plan d'un méridien, & que ce méridien est une des trois sections principales du sphéroïde. J'ai donc cru qu'il n'étoit pas inutile de donner à ce cas tout le développement qu'il méritoit.

Principe de transformation, pour faciliter l'évaluation des intégrales doubles ou multiples.

ON peut toujours regarder une intégrale double $\int P\,dx\,dy$, comme représentant la solidité d'un corps, comprise depuis le plan de projection, qui est celui des coordonnées x & y, jusqu'à la surface courbe dont l'équation est $z = P$. Lorsqu'on intègre par rapport à l'une des deux indéterminées, en regardant l'autre comme constante, on ne fait autre chose que diviser la projection en une infinité de bandes parallèles dans le sens des coordonnées, & évaluer la partie de solidité qui répond à chaque bande de

de la projection. Si on change les coordonnées d'une manière quelconque usitée en géométrie, le procédé d'intégration, par rapport aux nouvelles variables, suppose toujours qu'on divise la projection ou la base du solide en une infinité de parties, suivant des lignes parallèles ou tendantes à un point donné. Or, il peut se faire que cette manière de diviser la projection, ne soit pas la plus propre à donner une expression simple pour les portions de solide correspondantes.

Relativement à l'objet qu'on se propose, peu importe de quelle manière on divise la base du solide, pourvu qu'on tienne compte de toutes ses parties. Il faut donc s'attacher à partager cette base par des lignes quelconques tracées suivant un paramètre variable, de manière qu'entre deux courbes consécutives, la partie solide correspondante soit facile à évaluer analytiquement. Il n'y aura plus qu'à faire varier le paramètre dans une seconde intégration, & à étendre l'intégrale jusqu'aux limites du solide.

La même idée peut être exprimée analytiquement; elle n'en acquerra que plus de simplicité & de généralité.

Soit prise une équation quelconque entre x, y & un paramètre variable p, & soit tiré de cette équation $dy = \alpha dp + \zeta dx$. Puisque dans l'élément $P dx dy$, la différence dy suppose x constant, on aura simplement $dy = \alpha dp$; & $P dx dy = \alpha P dx dp$. On substituera donc dans αP la valeur de y en p & x tirée de l'équation supposée, & l'intégrale $\int P dx dy$ sera généralement transformée en celle-ci $\int \alpha P dx dp$. Dans les cas particuliers, on verra le plus souvent avec assez de facilité, quelle fonction de x & y il convient de prendre pour p, afin que la transformée $\int \alpha P dx dp$ soit la plus simple qu'il est possible.

Tel est le principe ou le moyen de transformation très-simple, mais très-général, que nous avons annoncé comme devant faciliter beaucoup l'évaluation des intégrales doubles

ou multiples. Un ſeul exemple va faire juger de ſes avantages.

Soit propoſée la différentielle

$$\frac{P}{Q}\, d\,x\, d\,y \surd \left(\frac{a\,x^2 + b\,x\,y + c\,y^2 + f\,x + g\,y + h}{a'\,x^2 + b'\,x\,y + c'\,y^2 + f'\,x + g'\,y + h'}\right)$$

dans laquelle P & Q ſont des fonctions rationnelles & entières de x & y. Cette formule dans l'état où elle eſt, n'eſt intégrable ni par rapport à x ni par rapport à y; pour rendre l'une des deux intégrations poſſible, ſoit

$$\surd \left(\frac{a\,x^2 + b\,x\,y + c\,y^2 + f\,x + g\,y + h}{a'\,x^2 + b'\,x\,y + c'\,y^2 + f'\,x + g'\,y + h'}\right) = p;$$

La valeur de y tirée de cette équation, ſera de la forme

$$A + B\,x + \surd\,(C + D\,x + E\,x^2),$$

A, B, C, D, E étant des fonctions de p. La valeur de $d\,y$ priſe, comme il convient, en ſuppoſant x conſtante, ne renfermera non plus d'autre radical que $\surd\,(C + D\,x + E\,x^2)$; d'où il ſuit qu'en introduiſant la variable p à la place de y dans la différentielle propoſée, ſa transformée ne contiendra d'autre radical que $\surd\,(C + D\,x + E\,x^2)$, & par conſéquent l'intégration par rapport à x pourra s'effectuer au moyen des arcs de cercle & des logarithmes.

L'exemple que nous venons d'apporter, renferme comme cas très-particulier la formule de l'attraction des ſphéroïdes; il eſt donc poſſible d'en effectuer l'intégration par les moyens ordinaires. Mais revenons aux formules générales. Dans la transformation précédente, on n'a changé qu'une variable; on peut ſuivant le même principe changer toutes les deux.

Soient p & q les deux variables qu'on doit introduire à la place de x & y; ſuppoſons qu'entre ces quatre quantités on ait établi deux équations quelconques, d'où

l'on tire

$$dx = A\,dp + B\,dq$$
$$dy = A'\,dp + B'\,dq.$$

La valeur de dx dans l'élément $P\,dx\,dy$ doit toujours ſuppoſer y conſtant, de ſorte que pour la ſubſtitution on aura $A'\,dp + B'\,dq = 0$, ou $dq = -\frac{A'}{B'}\,dp$; donc $dx = \frac{AB' - A'B}{B'}\,dp$, & par conſéquent $\int P\,dx\,dy$ devient d'abord

$$\int \frac{AB' - A'B}{B'} \cdot P\,dp\,dy:$$

ainſi à la place des deux variables x & y, nous avons déjà p & y. Il faut encore introduire q à la place de y; pour cela, obſervons que le dy de l'élément $\frac{AB' - A'B}{B'}\,P\,dp\,dy$, ſuppoſe p conſtant; on a donc $dy = B'\,dq$, & finalement le réſultat de la transformation des deux variables ſera

$$\int (AB' - A'B)\,P\,dp\,dq.$$

Il faut obſerver que l'élément $dx\,dy$ devant être toujours poſitif, ainſi que $dp\,dq$, s'il arrivoit que $AB' - A'B$ fût négatif, cette différence de ſigne ne feroit relative qu'à la manière d'être des variables x, y, p, q entre elles; il n'en faudroit pas moins prendre $(AB' - A'B)\,dp\,dq$, poſitivement. Quant à la quantité P, elle peut varier dans ſon ſigne, puiſqu'il peut y avoir des parties de l'intégrale à ſouſtraire des autres parties, par exemple, des attractions qui agiſſent en ſens contraire & qui doivent être retranchées les unes des autres.

On peut étendre toutes ces transformations à un plus grand nombre de variables. Conſidérons, par exemple, l'intégrale triple

$$\int P\,dx\,dy\,dz.$$

Si on ne veut changer qu'une ou deux variables, on aura les mêmes formules que précédemment; mais si on veut changer toutes les trois à la fois, on s'y prendra ainsi.

Soient prises à volonté trois nouvelles variables p, q, r, & trois équations qui déterminent x, y, z, en p, q, r; soit, en vertu de ces équations,

$$dx = A\,dp + B\,dq + C\,dr$$
$$dy = A'\,dp + B'\,dq + C'\,dr$$
$$dz = A''\,dp + B''\,dq + C''\,dr.$$

La valeur de dx dans l'élément $P\,dx\,dy\,dz$, supposant toujours y & z constans, on sera

$$0 = A'\,dp + B'\,dq + C'\,dr$$
$$0 = A''\,dp + B''\,dq + C''\,dr;$$

d'où résulte

$$dq = \frac{A''C' - A'C''}{B'C'' - B''C'}\,dp.$$
$$dr = \frac{A'B'' - A''B'}{B'C'' - B''C'}\,dp.$$

Substituant ces valeurs dans celle de dx, on aura

$$dx = \frac{A(B'C'' - B''C') + B(A''C' - A'C'') + C(A'B'' - A''B')}{B'C'' - B''C'}\,dp.$$

Je représente cette valeur par $T\,dp$; ainsi à la place de $dx\,dy\,dz$, on aura $T\,dp\,dy\,dz$. Dans ce nouvel élément dy suppose p & z constans; ainsi on a

$$dy = B'\,dq + C'\,dr$$
$$0 = B''\,dq + C''\,dr;$$

donc $dy = \frac{B'C'' - B''C'}{C''}\,dq$, & l'élément devient $T\left(\frac{B'C'' - B''C'}{C''}\right)dp\,dq\,dz$. Enfin le dz de cet élément supposant p & q constans, on a $dz = C''\,dr$. Donc enfin l'intégrale $\int P\,dx\,dy\,dz$ devient par le

changement des trois variables, $\int (B' C'' - B'' C') T P\, d p\, d q\, d r$; ou en remettant la valeur de T, $\int P\, dp\, dq\, dr\, [A(B' C'' - B'' C') + B(A'' C' - A' C'') + C(A' B'' - A'' B')]$.

Ce réſultat eſt entièrement conforme à celui qu'on trouve dans les Mémoires de Berlin, *année 1773, p. 125;* ainſi le principe qui ſert de baſe à ces transformations appartient à M. de la Grange; mais il ne paroît pas que cet illuſtre géomètre ait ſongé aux applications qu'on en peut faire.

Formules à intégrer pour déterminer l'attraction d'un ſphéroïde elliptique ſur un point extérieur.

Soient f, g, h les trois coordonnées du point attiré, $d M$ une molécule quelconque du ſphéroïde, r ſa diſtance au point attiré, q l'angle que fait le rayon r avec la coordonnée h, p l'angle que fait dans le plan de f & g, la projection du rayon r avec la coordonnée g. Au moyen des trois variables, p, q, r, la molécule $d M$ que nous repréſentons par ſon volume, ſera $r^2\, d r\, d p\, d q$ ſin. q, ſon attraction $d r\, d p\, d q$ ſin. q, & la partie de cette attraction dirigée parallélement à la coordonnée f, ſera $d r\, d p\, d q$ ſin.^{2} q ſin. p. Il eſt inutile de conſidérer les attractions dans le ſens des deux autres coordonnées, puiſqu'une ſimple permutation de lettres fera connoître ces attractions, quand on connoîtra celle qui eſt dirigée ſuivant la coordonnée f.

La différentielle $d r\, d p\, d q$ ſin. p ſin.^{2} q, s'intègre facilement par rapport à r : ſoit R' la valeur de ce rayon à l'entrée du ſphéroïde, R'' ſa valeur à ſa ſortie, en ſorte que la partie compriſe dans le ſphéroïde ſoit $R'' - R'$, la formule de l'attraction ſera réduite à cette intégrale double,

$$\int (R'' - R')\, d p\, d q \text{ ſin. } p \text{ ſin.}^2\, q,$$

formule où il faut substituer pour $R'' - R'$ sa valeur tirée de la nature du sphéroïde elliptique.

Prenons pour origine des coordonnées f, g, h, le centre même du sphéroïde ; appelons a, b, c ses trois demi-axes que nous supposerons parallèles aux coordonnées f, g, h; & soient x, y, z les coordonnées d'un point de la surface parallèles à ces axes ; l'équation de la surface du sphéroïde est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Mais si on appelle R le rayon vecteur qui convient à un point quelconque de la surface, on trouve

$$x = f - R \text{ sin. } p \text{ sin. } q$$
$$y = g - R \text{ cos. } p \text{ sin. } q$$
$$z = h - R \text{ cos. } q.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation de la surface, & faisant, pour abréger,

$$\delta = \text{sin.}^2 q \text{ sin.}^2 p + \frac{a^2}{b^2} \text{sin.}^2 q \text{ cos.}^2 p + \frac{a^2}{c^2} \text{cos.}^2 q$$
$$\varepsilon = f \text{ sin. } q \text{ sin. } p + \frac{a^2}{b^2} g \text{ sin. } q \text{ cos. } p + \frac{a^2}{c^2} h \text{ cos. } q$$
$$\zeta = f^2 + \frac{a^2}{b^2} g^2 + \frac{a^2}{c^2} h^2 - a^2,$$

on aura

$$\delta R^2 - 2 \varepsilon R + \zeta = 0.$$

Les deux racines de cette équation ont été appelées ci-dessus R' & R''; ainsi on aura

$$R' = \frac{\varepsilon - \sqrt{(\varepsilon^2 - \delta \zeta)}}{\delta}, \quad R'' = \frac{\varepsilon + \sqrt{(\varepsilon^2 - \delta \zeta)}}{\delta};$$

donc $R'' - R' = \frac{2\sqrt{(\varepsilon^2 - \delta \zeta)}}{\delta}$, & la valeur de l'attraction sera

$$\int \frac{2\, dp\, dq \text{ sin. } p \text{ sin.}^2 q}{\delta} \sqrt{(\varepsilon^2 - \delta \zeta)}.$$

Cette intégrale doit être prise pour toutes les valeurs possibles de p & de q; elle aura pour limites les points où le rayon R devient une tangente du sphéroïde, de sorte qu'on a pour déterminer ces limites l'équation $R'' - R' = 0$, ou $\varepsilon^2 - \delta\,\zeta = 0$.

Cette formule, dans l'état où elle est, n'est point intégrable par les moyens ordinaires; mais si on avoit $h = 0$, c'est-à-dire, si le point attiré étoit situé dans le plan des deux axes principaux a & b, alors l'intégration réussiroit immédiatement par rapport à p. Ce cas est d'autant plus intéressant à développer, qu'il avoit échappé à tous ceux qui se sont occupés de cette matière, & que la théorie de l'attraction des sphéroïdes de révolution s'y trouve comprise dans toute sa généralité.

Développement du cas où le point attiré se trouve dans le plan de deux axes principaux.

Appelant a & b les deux demi-axes dans le plan desquels se trouve le point attiré, on aura $h = 0$. Soit, pour abréger, $\frac{a^2}{b^2} = m$, $\frac{a^2}{c^2} = n$, ce qui donne

$$\delta = \sin.^2 q \sin.^2 p + m \sin.^2 q \cos.^2 p + n \cos.^2 q$$
$$\varepsilon = \sin. q\,(f \sin. p + m g \cos. p);$$
$$\zeta = f^2 + m g^2 - a^2,$$

on aura
$$\varepsilon^2 - \delta\,\zeta = \sin.^2 q \sin.^2 p\,(f^2 - \zeta - n\,\zeta \cot.^2 q)$$
$$+ 2 \sin.^2 q \sin. p \cos. p . m f g$$
$$+ \sin.^2 q \cos.^2 p\,(m^2 g^2 - m\,\zeta - n\,\zeta \cot.^2 q).$$

On fera disparoître le second terme de cette expression, en prenant $p = \alpha + \theta$, & déterminant l'angle constant α par la formule

$$\text{tang. } 2\,\alpha = \frac{2 f g}{a^2 - b^2 - f^2 + g^2}.$$

Appelant ensuite $\pm\,\mu$ la limite de θ, on aura

$$\text{sin.}^2\,\mu = \text{cos.}^2\,\alpha + \frac{h^2 - g^2}{f\,g}\,\text{sin}\,\alpha\,\text{cos.}\,\alpha - \frac{n\,\zeta\,\text{sin.}\,\alpha\,\text{cos.}\,\alpha}{m\,f\,g}\,\text{cot.}^2\,q,$$

ce qui donnera

$$\varepsilon^2 - \delta\,\zeta = \frac{m\,f\,g}{\text{sin.}\,\alpha\ \text{cos.}\,\alpha}\,\text{sin.}^2\,q\ (\text{sin.}^2\,\mu - \text{sin.}^2\,\theta).$$

Substituant $\alpha + \theta$ à la place de p dans la valeur de δ, & faisant, pour abréger,

$$f' = \text{sin.}^2\,\alpha + m\,\text{cos.}^2\,\alpha + n\,\text{cot.}^2\,q$$
$$g' = (1 - m).\,2\,\text{sin.}\,\alpha\,\text{cos.}\,\alpha$$
$$h' = \text{cos.}^2\,\alpha + m\,\text{sin.}^2\,\alpha + n\,\text{cot.}^2\,q,$$

on aura $\delta = \text{sin.}^2\,q\,(f'\,\text{cos.}^2\,\theta + g'\,\text{cos.}\,\theta\,\text{sin.}\,\theta + h'\,\text{sin.}^2\,\theta)$; donc enfin la formule différentielle de l'attraction deviendra

$$2\,d\,q\,\text{sin.}\,q\,\sqrt{\left(\frac{m\,f\,g}{\text{sin.}\,\alpha\,\text{cos.}\,\alpha}\right)}.\,\frac{d\,\theta\,\text{sin.}\,(\alpha + \theta)\,\sqrt{(\text{sin.}^2\,\mu - \text{sin.}^2\,\theta)}}{f'\,\text{cos.}^2\,\theta + g'\,\text{cos.}\,\theta\,\text{sin.}\,\theta + h'\,\text{sin.}^2\,\theta}.$$

Pour faire disparoître le radical, soit

$$\text{tang.}\,\mu = \nu,\ \text{tang.}\,\theta = \nu\,\text{sin.}\,\varphi;$$

nous aurons cette nouvelle formule

$$\frac{2\,\text{sin.}^2\,\mu}{\text{cos.}\,\mu}\,d\,q\,\text{sin.}\,q\,\sqrt{\left(\frac{m\,f\,g}{\text{sin.}\,\alpha\,\text{cos.}\,\alpha}\right)}.\,\frac{d\,\varphi\,\text{cos.}^2\,\varphi\,(\text{sin.}\,\alpha + \nu\,\text{cos.}\,\alpha\,\text{sin.}\,\varphi)}{(1 + \nu^2\,\text{sin.}^2\,\varphi)\,(f' + g'\,\nu\,\text{sin.}\,\varphi + h'\,\nu^2\,\text{sin.}^2\,\varphi)},$$

laquelle doit être intégrée depuis $\varphi = -90^d$, jusqu'à $\varphi = 90^\circ$, car ces valeurs ont lieu lorsque $\varepsilon^2 - \delta\,\zeta = 0$.

Pour procéder à l'intégration, nous ferons suivant les méthodes ordinaires

$$\frac{(1 - \text{sin.}^2\,\varphi)\ (\text{sin.}\,\alpha + \nu\,\text{cos.}\,\alpha\,\text{sin.}\,\varphi)}{(1 + \nu^2\,\text{sin.}^2\,\varphi)\ (f' + g'\,\nu\,\text{sin.}\,\varphi + h'\,\nu^2\,\text{sin.}^2\,\varphi)}$$
$$= \frac{A + B\,\nu\,\text{sin.}\,\varphi}{1 + \nu^2\,\text{sin.}^2\,\varphi} + \frac{C + D\,\nu\,\text{sin.}\,\varphi}{f' + g'\,\nu\,\text{sin.}\,\varphi + h'\,\nu^2\,\text{sin.}^2\,\varphi};$$

Nous aurons d'abord

$$A = \frac{1 + \nu^2}{\nu^2}.\,\frac{\text{sin.}\,\alpha}{1 - m},\ B = \frac{1 + \nu^2}{\nu^2}.\,\frac{\text{cos.}\,\alpha}{m - 1}.$$

Quant

Quant aux valeurs de C & D, on les déduira commodément de cette équation qui ſe trouve en faiſant ſin. $\varphi = \pm 1$

$$(C \pm D v)(1 + v^2) + (A \pm B v)(f' \pm g' v + h' v^2) = 0.$$

Maintenant l'intégrale de la partie $\frac{A + B v \,\text{ſin.}\, \varphi}{1 + v^2 \,\text{ſin.}^2\, \varphi} \, d\varphi$, priſe depuis $\varphi = -90^d$, juſqu'à $\varphi = 90^d$, eſt évidemment la même que celle de $\frac{2 A \, d\varphi}{1 + v^2 \,\text{ſin.}^2\, \varphi}$ priſe depuis $\varphi = 0$, juſqu'à $\varphi = 90^d$. Celle-ci ſe trouve $= \frac{A \pi}{\sqrt{(1 + v^2)}}$, en appelant π la demi-circonférence dont le rayon eſt 1. Ainſi en ſubſtituant la valeur de A & obſervant que $v = \text{tang.}\, \mu$, on aura pour la première partie de notre intégrale

$$\frac{\pi \,\text{ſin.}\, \alpha}{1 - m} \cdot \frac{\text{coſ.}\, \mu}{\text{ſin.}^2\, \mu}.$$

La ſeconde partie

$$\frac{C + D v \,\text{ſin.}\, \varphi}{f' + g' v \,\text{ſin.}\, \varphi + h' v^2 \,\text{ſin.}^2\, \varphi} \cdot d\varphi,$$

étant intégrée à l'ordinaire depuis $\varphi = -90^d$, juſqu'à $\varphi = +90^d$, donne pour réſultat,

$$\frac{C(f' + h' v^2 + E) - D g' v^2}{E \sqrt{[(E + f')^2 - h'^2 v^4]}} \cdot \pi,$$

la quantité E étant miſe pour $\sqrt{[(f' + h' v^2)^2 - g'^2 v^2]}$. Il ne s'agit plus que de faire les ſubſtitutions de manière à éviter la prolixité, ce qui exige que nous entrions dans quelques détails.

Rappellons nous qu'aux limites de l'intégrale on a $\varepsilon^2 - \delta \zeta = 0$, ou $\delta = \frac{\varepsilon^2}{\zeta}$; mais en ſubſtituant $\alpha + \theta$, à la place de p dans la valeur de ε, & faiſant, pour abréger,

$$a' = f \,\text{ſin.}\, \alpha + m g \,\text{coſ.}\, \alpha$$
$$b' = f \,\text{coſ.}\, \alpha - m g \,\text{ſin.}\, \alpha,$$

on a $\varepsilon = (a' \cos. \theta + b' \sin. \theta) \sin. q$. Aux limites de l'intégrale θ devient $\pm \mu$, & on a en même temps $\delta = \sin.^2 q\, (f' \cos.^2 \mu \pm g' \cos. \mu \sin. \mu + h' \sin.^2 \mu)$; donc à cause de tang. $\mu = \nu$, on aura

$$f' + g' \nu + h' \nu^2 = \frac{(a' + b' \nu)^2}{\zeta}$$
$$f' - g' \nu + h' \nu^2 = \frac{(a' - b' \nu)^2}{\zeta}.$$

Soit, pour abréger,

$$P = \frac{a' + b' \nu}{\sqrt{(\zeta)}},\ Q = \frac{a' - b' \nu}{\sqrt{(\zeta)}},$$

on aura

$$f' + h' \nu^2 = \frac{a' a' + b' b' \nu^2}{\zeta} = \frac{P^2 + Q^2}{2}$$
$$g' \nu = \frac{2\, a' b'}{\zeta} = \frac{P^2 - Q^2}{2}$$
$$E = \frac{a' a' - b' b' \nu^2}{\zeta} = P\, Q$$
$$f' + h' \nu^2 + E = \frac{(P + Q)^2}{2};$$

donc la quantité $\frac{C (f' + h' \nu^2 + E) - D g' \nu^2}{E \sqrt{[(E + f')^2 - h'^2 \nu^4]}} \cdot \pi$ se change d'abord en celle-ci

$$\frac{C\,(P + Q) - D \nu\,(P - Q)}{P\, Q \sqrt{(2\, E + 2\, f' - 2\, h' \nu^2)}} \cdot \pi$$

Mais on a

$$C + D\nu = -(A + B\nu) \cdot \frac{P^2}{1 + \nu^2} = \frac{P^2 (\sin. \alpha - \nu \cos. \alpha)}{(m - 1)\, \nu^2}$$
$$C - D\nu = -(A - B\,\nu) \frac{Q^2}{1 + \nu^2} = \frac{Q^2 (\sin. \alpha + \nu \cos. \alpha)}{(m - 1)\, \nu^2};$$

d'où l'on voit que la quantité à réduire devient

$$\frac{\pi}{(m - 1)\, \nu^2} \cdot \frac{P\, (\sin. \alpha - \nu \cos. \alpha) + Q\, (\sin. \alpha + \nu \cos. \alpha)}{\sqrt{(2\, E + 2\, f' - 2\, h' \nu^2)}},$$

Remettant les valeurs de P & Q, on a le numérateur P (sin. α — ν cos. α) + Q (sin. α + ν cos. α)

$$= \frac{2\, a' \text{ sin. } \alpha - 2\, b' \nu^2 \text{ cos. } \alpha}{\zeta}.$$

Reste à réduire le dénominateur : or par les valeurs primitives de f' & h', on a $h' - f' = (1 - m)$ cos. $2\,\alpha$ $= g'$ cot. $2\,\alpha$; combinant cette valeur avec celles de $f' + h'\nu^2$ & g', on en tirera aisément

$$\sqrt{(2\,E + 2\,f' - 2\,h'\nu^2)} = 2\sqrt{\left[\frac{(a' + b'\nu^2 \text{ tang.}\alpha)(a' - b'\nu^2 \text{ cot.}\alpha)}{\zeta(1 + \nu^2)}\right]};$$

nous aurons donc pour la seconde partie de notre intégrale

$$\frac{\pi \text{ cos.}\mu \sqrt{(\text{sin. }\alpha \text{ cos. }\alpha)}}{(m - 1) \text{ sin.}^2 \mu} \cdot \sqrt{\left[\frac{a' \text{ sin. } \alpha \text{ cos.}^2 \mu - b' \text{ cos. } \alpha \text{ sin.}^2 \mu}{a' \text{ cos. } \alpha \text{ cos}^2 \mu + b' \text{ sin. } \alpha \text{ sin.}^2 \mu}\right]}.$$

Il reste à substituer dans le radical les valeurs de a', b', & sin.^{2} μ, savoir,

$$a' = f \text{ sin. } \alpha + m\, g \text{ cos. } \alpha$$

$$b' = f \text{ cos. } \alpha - m\, g \text{ sin. } \alpha$$

$$\text{sin.}^2 \mu = \text{cos.}^2 \alpha + \frac{b^2 - g^2}{fg} \text{ sin.}\alpha \text{ cos.}\alpha - \frac{n\zeta \text{ sin.}\alpha \text{ cos.}\alpha}{mfg} \text{cot.}^2 q,$$

c'est ce qui n'a plus de difficulté, pourvu qu'on fasse attention aux valeurs de ζ & tang. $2\,\alpha$. Le résultat sera

$$\frac{\pi \text{ cos. } \mu}{(m - 1) \text{ sin.}^2 \mu} \sqrt{\left(\frac{f \text{ sin. } \alpha \text{ cos. } \alpha}{g}\right)} \cdot \sqrt{\left(\frac{1 + \frac{n}{m} \text{ cot.}^2 q}{1 + n \text{ cot.}^2 q}\right)};$$

donc en réunissant les deux parties de l'intégrale, l'attraction du sphéroïde parallèlement à l'axe a, sera réduite à cette intégrale simple,

$$\frac{2\,\pi f \sqrt{(m)}}{m - 1} \cdot \int dq \text{ sin. } q \left[\frac{\sqrt{(1 + \frac{n}{m} \text{ cot.}^2 q)}}{\sqrt{(1 + n \text{ cot.}^2 q)}} - \sqrt{\left(\frac{g \text{ sin. } \alpha}{f \text{ cos. } \alpha}\right)}\right].$$

Remettons à la place de m & n, leurs valeurs $\frac{a^2}{b^2}$ & $\frac{a^2}{c^2}$,

& introduisons la masse M du sphéroïde à la place de son

volume $\frac{4\pi abc}{3}$; appelons $\pm$ cos. $\mathfrak{C}$ la limite de cos. q, & faisons cos. $q = x$ cos. $\mathfrak{C}$, $\frac{c}{\text{cos.}\,\mathfrak{C}} = K$; l'attraction du sphéroïde, suivant la direction de l'axe a sera égale à l'intégrale suivante, prise depuis $x = 0$, jusquà $x = 1$

$$\frac{3Mf}{(a^2 - b^2)K} \int dx \left[\frac{\sqrt{[K^2 + (b^2 - c^2)x^2]}}{\sqrt{[K^2 + (a^2 - c^2)x^2]}} - \sqrt{\left(\frac{g\,\text{sin.}\,\alpha}{f\,\text{cos.}\,\alpha}\right)} \right].$$

Quant à la limite cos. $\mathfrak{C}$, ce n'est autre chose que la valeur de cos. q, qui répond à sin. $\mu = 0$, & on trouve après les réductions convenables,

$$\frac{c^2}{\text{cos.}^2\,\mathfrak{C}} = K^2 = f^2 + c^2 - a^2 + fg\,\text{cot.}\,\alpha.$$

Maintenant il est évident que la valeur de tang. $2z$, celle de K, & enfin celle de l'attraction elle-même, ne contiennent d'autre fonction de a, b, c, que les différences $a^2 - b^2$, $a^2 - c^2$, d'où il suit qu'*étant supposés deux sphéroïdes, dont les trois sections principales soient décrites des mêmes foyers, les attractions que ces deux corps exercent sur un même point situé dans le plan d'une section principale, auront la même direction, & seront entr'elles comme leurs masses.* Car cette proposition a lieu immédiatement par rapport à l'attraction partielle dirigée suivant l'axe a; il en est de même de celle qui agit suivant l'axe b; la troisième est nulle, donc l'attraction totale a la même direction dans les deux sphéroïdes, & suit la raison de leurs masses.

On peut donner au résultat final une forme un peu plus simple que la précédente. En effet, si on a la différentielle

$$dx \sqrt{\left(\frac{1 + mx^2}{1 + nx^2}\right)}$$

à intégrer depuis $x = 0$, jusqu'à $x = 1$, & qu'on fasse

$$\frac{x^2}{1 + p(1 - x^2)} = y^2,$$

qu'on prenne enſuite $p = \frac{-n}{1+n}$, $q = \frac{m-n}{1+n}$, on aura la transformée

$$\sqrt{(1+p)}.\frac{dy(1+qy^2)^{\frac{1}{2}}}{(1+py^2)^{\frac{3}{2}}}$$

à intégrer pareillement depuis $y = 0$, jusqu'à $y = 1$. Celle-ci étant intégrée par parties, on en conclura

$$\int dx \sqrt{\left(\frac{1+mx^2}{1+nx^2}\right)} = \sqrt{(1+q)}$$

$$-q\sqrt{(1+p)}.\int\frac{y^2\,dy}{\sqrt{(1+py^2)}.\sqrt{(1+qy^2)}}.$$

L'application de cette formule donne pour la valeur de l'attraction réduite à la forme la plus ſimple,

$$\frac{3Mf}{H}\int\frac{y^2\,dy}{\sqrt{[H^2+(c^2-a^2)y^2]}.\sqrt{[H^2+(b^2-a^2)y^2]}};$$

cette intégrale étant priſe depuis $y = 0$, juſqu'à $y = 1$, & la quantité H^2 n'étant autre choſe que $K^2 + a^2 - c^2$; mais en éliminant tout-à-fait l'angle α de la valeur de K, on aura directement

$$H^2 = \frac{f^2+g^2+a^2-b^2+\sqrt{[(f^2+g^2)^2-2(f^2-g^2)(a^2-b^2)+(a^2-b^2)^2]}}{2};$$

l'attraction parallèlement à l'autre axe b, ſe trouvera en permutant les lettres a & b, ainſi que f & g, de ſorte qu'en faiſant

$$L^2 = \frac{f^2+g^2+b^2-a^2+\sqrt{[(f^2+g^2)^2-2(f^2-g^2)(a^2-b^2)+(a^2-b^2)^2]}}{2};$$

cette attraction ſera

$$\frac{3Mg}{L}\int\frac{y^2\,dy}{\sqrt{[L^2+(c^2-b^2)y^2]}.\sqrt{[L^2+(a^2-b^2)y^2]}},$$

& on voit que $L^2 = H^2 + b^2 - a^2$.

Il eſt inutile d'ajouter que la troiſième attraction parallèle à l'axe c eſt nulle ; c'eſt une ſuite de l'hypothèſe, que le point attiré eſt ſitué dans le plan des deux axes a & b.

Ces formules sont susceptibles d'une intégration absolue dans le cas du sphéroïde de révolution. Alors on aura $a = c$, & les résultats s'accorderont parfaitement avec ceux que j'ai trouvés autrefois, par une méthode toute différente. (*Voy.* Sav. Étr. *tom. X, pag. 425*).

Intégration générale de la formule de l'attraction.

POUR abréger un peu les expressions, nous ferons

$$\frac{a^2}{b^2} = m; \ \frac{a^2}{c^2} = n, \ mg = k, \ nh = l,$$

$$\cot. p = x, \ \cot. q = y \ \text{sin.} \ p;$$

la formule de l'attraction dans le sens de l'axe a deviendra

$$X = \int \frac{2\,dx\,dy\,\sqrt{[(f + kx + ly)^2 - \zeta(1 + mx^2 + ny^2)]}}{(1 + mx^2 + ny^2)(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Cette formule ne peut être intégrée par rapport à x ou à y, qu'à l'aide de transcendantes qui ne sont point encore introduites dans le calcul. L'usage de ces transcendantes ne seroit peut-être pas aussi impraticable qu'il paroît au premier coup-d'œil; mais jusqu'à ce que cette possibilité soit manifestée d'une manière bien précise, nous ne pouvons mieux faire que d'employer une transformation qui rende l'une des deux intégrations possibles par les moyens ordinaires, c'est-à-dire, par les arcs de cercle & les logarithmes: or nous savons dejà qu'on y parvient aisément en faisant

$$\sqrt{\left[\frac{(f + kx + ly)^2 - \zeta(1 + mx^2 + ny^2)}{1 + x^2 + y^2}\right]} = \omega.$$

Cette équation étant ordonnée par rapport à y, donne

$$(\omega^2 + n\zeta - l^2)\,y^2 - 2l(f + kx)\,y$$
$$+ \omega^2 + \zeta + (\omega^2 + m\zeta)\,x^2 - (f + kx)^2 = 0 \ldots (a').$$

Si on la représente par $Fy^2 - 2Gy + H = 0$, & qu'on la différencie en supposant x constante, on aura

$$(Fy - G)\,dy = \omega\,d\omega\,(1 + x^2 + y^2).$$

Ainsi, en substituant la valeur de $d\,y$, & mettant $\sqrt{(G^2 - F H)}$ à la place de $F y - G$, on aura la transformée

$$X = \int \frac{2\,\omega^2\, d\,\omega\, d\,x}{(1 + m\,x^2 + n\,y^2)\sqrt{(G^2 - F H)}},$$

où il ne reste plus qu'à éliminer y dans le terme $n\,y^2$. Soit, pour abréger,

$$\lambda = \omega^2 + \zeta$$
$$\mu = \omega^2 + m\,\zeta$$
$$\nu = \omega^2 + n\,\zeta,$$

nous aurons

$$F = \nu - l^2$$
$$G = l\,(f + k\,x)$$
$$H = \lambda + \mu\,x^2 - (f + k\,x)^2;$$

& pour exprimer $G^2 - F\,H$, soit

$$A = \mu\,\nu - \mu\,l^2 - \nu\,k^2$$
$$B = f\,k\,\nu$$
$$C = \lambda\,\nu - \lambda\,l^2 - \nu\,f^2,$$

nous aurons

$$\sqrt{(G^2 - F H)} = \sqrt{(- A\,x^2 + 2\,B\,x - C)}.$$

Maintenant pour rendre cette quantité rationnelle, faisons

$$B^2 - A\,C = F(f^2\,\mu\,\nu + k^2\,\lambda\,\nu + l^2\,\lambda\,\mu - \lambda\,\mu\,\nu) = D^2,$$

$$A\,x - B = D\,\text{cos}.\ \varphi;$$

nous aurons

$$\sqrt{(G^2 - F H)} = \frac{D}{\sqrt{A}}\ \text{sin}.\ \varphi;$$

de sorte que les valeurs de x & y s'exprimeront ainsi par le moyen de l'angle φ

$$x = \frac{B}{A} + \frac{D}{A}\ \text{cos}.\ \varphi$$

$$y = \frac{f\,l\,\mu}{A} + \frac{k\,l\,D}{A\,F}\ \text{cos}.\ \varphi + \frac{D}{F\sqrt{(A)}}\ \text{sin}.\ \varphi.$$

On aura en même temps $\frac{dx}{\sqrt{(G^2 - FH)}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{(A)}}$.
Par toutes ces ſubſtitutions, la formule de l'attraction deviendra

$$X = \int \frac{2\,\omega^2\, d\omega .\, A^{\frac{1}{2}}\, d\varphi}{A^2 + m\,(B + D \,\text{coſ.}\, \varphi)^2 + n\left(f\,l\,\mu + \frac{k\,l\,D}{F}\,\text{coſ.}\,\varphi + \frac{D\sqrt{(A)}}{F}\,\text{ſin.}\,\varphi\right)^2}.$$

Avant d'aller plus loin, obſervons que la transformation que nous venons de faire, ſuppoſe A poſitif, c'eſt-à-dire, ſuppoſe que pour toutes les valeurs de ω, l'équation (a') appartient à une ellipſe. Or en développant la valeur de A, on a

$$A = \omega^4 + (n\,\zeta - l^2)\,\omega^2 + m\,n\,\zeta^2 - m\,l^2\,\zeta - n\,k^2\,\zeta$$
$$+ (m\,\zeta - k^2)\,\omega^2.$$

Mais à cauſe de $g = \frac{k}{m}$, $h = \frac{l}{n}$,

on a $\zeta = f^2 + \frac{k^2}{m} + \frac{l^2}{n} - a^2$;

donc $m\,n\,\zeta^2 - m\,l^2\,\zeta - n\,k^2\,\zeta = m\,n\,\zeta\,(f^2 - a^2)$.
Donc pour que la valeur de A ſoit poſitive, même lorſque $\omega = 0$, il faut qu'on ait $f > a$, & alors elle ſera poſitive à plus forte raiſon pour toutes les valeurs de ω.

Au reſte, nous pouvons pourſuivre le calcul dans la ſuppoſition de $f > a$, & le réſultat total ſera indépendant de cette ſuppoſition; car il ne doit exiſter qu'une formule analytique qui repréſente la valeur de l'attraction, & cette formule ne ſuppoſe d'autre condition, ſinon que le point attiré eſt hors du ſphéroïde ou ſur ſa ſurface, c'eſt-à-dire, que ζ eſt poſitif ou zéro. Donc la formule trouvée pour le cas fictif de $f > a$, ne doit différer en rien de la formule générale. C'eſt une remarque qu'on peut appliquer à beaucoup d'autres queſtions d'analyſe; d'où il réſulte que les formules analytiques ſont ſouvent indépendantes des hypothèſes qu'on a faites pour y parvenir.

Il ne

Il ne ſera pas inutile dans la queſtion actuelle, de ſe rendre compte plus particulièrement du cas où A peut devenir négatif.

J'obſerve que l'équation (a'), où l'on regarde ω comme conſtant, n'eſt autre choſe (en multipliant les x & y par une même conſtante) que l'équation de la courbe tracée ſur le plan des axes b & c, ou ſur un plan parallèle, par le rayon mené du point attiré, ſuivant toutes les poſitions où ω conſerve une même valeur quelconque. Lorſque $\omega = 0$, le rayon eſt par-tout tangent au ſphéroïde; lorſque ω eſt à ſon *maximum*, ce qui arrive lorſqu'on a $D = 0$, ou

$$f^2 \mu \nu + k^2 \lambda \nu + l^2 \lambda \mu - \lambda \mu \nu = 0,$$

le rayon n'a abſolument qu'une poſition, & la courbe repréſentée par l'équation (a') ſe réduit à un point.

Or, ſi on a $f > a$, on ſe repréſente aiſément toutes les tangentes au ſphéroïde partant du point attiré, & formant un cône à baſe elliptique; & on voit que l'interſection de ce cône, par le plan des axes b & c, eſt néceſſairement une ellipſe. A plus forte raiſon en eſt-ce une, lorſque le rayon pénètre dans le ſphéroïde pour paſſer par toutes les poſitions où ω a une valeur conſtante au-deſſus de zéro.

Mais ſi on a $f < a$, il eſt également facile de voir que l'interſection du cône tangent au ſphéroïde avec le plan des axes b & c, ſera une hyperbole. A meſure que ω augmentera, le cône où ω eſt conſtant diminuera d'amplitude, & ſon interſection avec le plan des axes b & c paſſera par tous les degrés, depuis l'hyperbole juſqu'à l'ellipſe, & finira par être un point, lorſque ω eſt à ſon *maximum.*

On voit maintenant quel ſera le procédé de l'intégration par rapport aux nouvelles variables φ & ω. Nous imaginons que le ſphéroïde ſoit diviſé en une infinité de couches ou enveloppes, par des ſurfaces coniques qui diminuent

successivement d'amplitude, depuis le cône tangent où ω est zéro, jusqu'à la ligne droite, ou cône infiniment mince, qui répond au *maximum* de ω. L'intégrale étant prise depuis $\varphi = 0$, jusqu'à $\varphi = 360^d$, donnera l'attraction d'une de ces enveloppes coniques; il faudra ensuite intégrer le résultat depuis $\omega = 0$, jusqu'à $\omega =$ *maximum*.

Il s'agit d'abord d'intégrer la quantité

$$\frac{A^{\frac{3}{2}}\, d\varphi}{A^2 + m\,(B + D\,\text{cos.}\,\varphi)^2 + n\left(fl\mu + \frac{klD}{F}\,\text{cos.}\,\varphi + \frac{D\sqrt{(A)}}{F}\,\text{sin.}\,\varphi\right)^2} \ldots (b')$$

depuis $\varphi = 0$, jusqu'à $\varphi = 360^d$. Le moyen qui paroît le plus simple pour cela, est de faire tang $\frac{1}{2}\,\varphi = z$, ce qui donne sin. $\varphi = \frac{2z}{1 + zz}$, cos. $\varphi = \frac{1 - zz}{1 + zz}$, $d\varphi = \frac{2\,dz}{1 + zz}$; alors cette différentielle deviendra de la forme

$$\frac{2\,A^{\frac{3}{2}}\,dz\,(1 + zz)}{A' + B'z + C'z^2 + D'z^3 + E'z^4},$$

& il faudra l'intégrer pour toutes les valeurs de z, depuis $z = 0$ jusqu'à $z =$ tang. 180^d.

Il est inévitable pour cette intégration, de chercher les deux facteurs réels du dénominateur; mais comme les coëfficiens A', B', &c. sont déjà fort composés, si on entreprenoit cette recherche par les moyens ordinaires, on pourroit désespérer d'y réussir, à cause de l'extrême complication de l'équation du troisième degré dont ces facteurs dépendent. En effet, pour parvenir au théorème que nous avons en vue, il faut que le résultat de l'intégration ne soit pas simplement indiqué; il doit être entièrement développé, & réduit à sa forme la plus simple.

Pour faciliter un peu la recherche des facteurs du dénominateur, j'observe qu'à la place de φ on peut mettre $\varphi + \epsilon$, & déterminer ϵ comme on voudra, sans rien changer à

l'intégrale. Après avoir fait la substitution, je prends tang. $\epsilon = \frac{l\sqrt{(A)}}{k\nu}$, & faisant, pour abréger,

$$A = R^2 = \mu\nu - k^2\nu - l^2\mu$$
$$Q^2 = f^2\mu\nu + k^2\lambda\nu + l^2\lambda\mu - \lambda\mu\nu$$
$$P^2 = k^2\nu + l^2\mu,$$

la différentielle (b') devient

$$\frac{R^4 d\varphi}{R^4 + m\left(fk\nu + \frac{Q}{P}k\nu\,\text{cos}.\varphi - \frac{Q}{P}lR\,\text{sin}.\varphi\right)^2 + n\left(fl\mu + \frac{Q}{P}l\mu\,\text{cos}.\varphi + \frac{Q}{P}kR\,\text{sin}.\varphi\right)^2}.$$

Cette expression ne paroît pas fort simplifiée; cependant si on fait

$$f + \frac{Q}{P}\,\text{cos}.\varphi = x;\ \frac{Q}{P}\,\text{sin}.\varphi = y,$$

le dénominateur devient

$$R^4 + m(k\nu x - lRy)^2 + n(l\mu x + kRy)^2.$$

Supposons maintenant que cette quantité

$$= T(1 + px + qy)(1 + p'x - qy);$$

puisque les valeurs de x & y donnent l'équation

$$y^2 + x^2 - 2fx = \frac{Q^2}{P^2} - f^2 = (f^2 - \lambda)\frac{R^2}{P^2},$$

on pourra, en prenant un coéfficient indéterminé H, regarder comme identique l'équation

$$R^4 + m(k\nu x - lRy)^2 + n(l\mu x + kRy)^2$$
$$+ H(f^2 - \lambda)\frac{R^2}{P^2} + 2Hfx - Hx^2 - Hy^2$$
$$= T(1 + px + qy)(1 + p'x - qy);$$

d'où l'on tirera

$$T = R^4 + (f^2 - \lambda)\frac{R^2 H}{P^2}$$
$$T(p + p') = 2fH$$
$$Tq(p' - p) = -2klR(m\nu - n\mu)$$

$$T\, p\, p' = m\, k^2\, \nu^2 + n\, l^2\, \mu^2 - H$$
$$T\, q^2 = H - (m\, l^2 + n\, k^2)\, R^2.$$

Soit $H = \frac{P^2\, R^2}{Z}$, enſuite

$$Z - \lambda = L$$
$$m\, Z - \mu = M$$
$$n\, Z - \nu = N,$$

on trouvera pour déterminer Z, cette équation d'une forme très-ſimple,

$$L\, M\, N + f^2\, M\, N + k^2\, L\, N + l^2\, L\, M = 0 \ldots . (d');$$

c'eſt l'équation auxiliaire du troiſième degré, de laquelle dépend la décompoſition de notre dénominateur. La valeur de Z étant donc cenſée connue, ainſi que celles de L, M, N, les coéfficiens des facteurs ſeront

$$T = \frac{R^4}{Z}\, (f^2 + L)$$
$$p = \frac{f\, P^2}{R^2\, (f^2 + L)} - \frac{k\, l\, (M\, \nu - N\, \mu)}{R^2\, (f^2 + L)} \sqrt{\left(\frac{L}{M\, N}\right)}$$
$$p' = \frac{f\, P^2}{R^2\, (f^2 + L)} + \frac{k\, l\, (M\, \nu - N\, \mu)}{R^2\, (f^2 + L)} \sqrt{\left(\frac{L}{M\, N}\right)}$$
$$q = \frac{1}{R} \sqrt{\left(\frac{M\, N}{L}\right)}.$$

Toutes ces quantités doivent être regardées comme réelles, car des trois valeurs que doit avoir $\frac{M\, N}{L}$ d'après l'équation (d'), il y en a certainement une poſitive; c'eſt une ſuite des propriétés générales des équations, mais on peut s'aſſurer dans le cas préſent, qu'il exiſte en effet une racine de l'équation (d'), au moyen de laquelle $\frac{M\, N}{L}$ eſt poſitif: cette racine ou valeur de Z eſt compriſe entre les deux plus petites des quantités λ, $\frac{\mu}{m}$, $\frac{\nu}{n}$.

Faiſons, pour abréger,

$$\frac{k\,l\,(M\nu - N\mu)}{(f^2+L)\,\sqrt{\left(\frac{MN}{L}\right)}} = S, \quad \frac{f\,P^2}{f^2+L} = V$$

$$R^2 + (S+V)f = E, \quad R^2 + (V-S)f = E';$$

l'expreſſion à intégrer deviendra

$$(e') \ldots \frac{\frac{Z}{f^2+L}\,.\,R^3\,d\,\varphi}{\left[E+(V+S)\frac{Q}{P}\text{coſ.}\varphi - \frac{RQ}{P}\text{ſin.}\varphi\sqrt{\left(\frac{MN}{L}\right)}\right]\left[E'+(V-S)\frac{Q}{P}\text{coſ.}\varphi + \frac{RQ}{P}\text{ſin.}\varphi\sqrt{\left(\frac{MN}{L}\right)}\right]}.$$

Soit tang. $\frac{1}{2}\,\varphi = z$, nous aurons la transformée

$$\frac{Z\,R^3}{f^2+L}\,.\,\frac{2\,d\,z\,(1+zz)}{(A+Bz^2-2Cz)\,(A'+B'z^2+2Cz)} \ldots\ldots (f'),$$

dans laquelle on a pris, pour abréger,

$$A = R^2 + (V+S)\left(f+\frac{Q}{P}\right)$$

$$A' = R^2 + (V-S)\left(f+\frac{Q}{P}\right)$$

$$B = R^2 + (V+S)\left(f-\frac{Q}{P}\right)$$

$$B' = R^2 + (V-S)\left(f-\frac{Q}{P}\right)$$

$$C = \frac{RQ}{P}\sqrt{\left(\frac{MN}{L}\right)}.$$

L'intégrale de la formule (f') doit être priſe depuis $z = 0$; juſqu'à $z = 0$, en paſſant par $z = \infty$; on trouve qu'elle eſt compoſée de deux parties, l'une

$$= \frac{R^3\,Z}{f^2+L}\,.\,\frac{\pi}{\sqrt{(AB-C^2)}}\,.\,\frac{2\,(B-A)\,(A'B-AB')+4C^2\,(A+B+A'+B')}{(A'B-AB')^2+4\,C^2\,(A+A')\,(B+B')};$$

l'autre ne diffère de celle-ci que par le ſigne de $\sqrt{\left(\frac{MN}{L}\right)}$; ainſi nous ne la rapporterons que dans le réſultat final. La difficulté eſt maintenant de faire les ſubſtitutions, en évitant la prolixité autant qu'il eſt poſſible. Comme l'opération eſt

embarrassante, & que c'est sur-tout à la forme du résultat que sera dû le succès de ces recherches, j'en vais détailler les principales parties.

1.° La quantité $AB - C^2$ aura d'abord pour facteur $\frac{R^2}{(f^2 + L)^2}$. Si dans l'autre facteur on élimine R, Q, P, au moyen de leurs valeurs en λ, μ, ν, qu'ensuite on élimine λ, μ, ν eux-mêmes, au moyen des valeurs

$$\lambda = Z - L$$
$$\mu = mZ - M$$
$$\nu = nZ - N,$$

& qu'enfin on fasse usage de l'équation auxiliaire (d') autant de fois qu'il paroîtra nécessaire pour simplifier les expressions, on aura pour résultat

$$\sqrt{(AB - C^2)} = \frac{RZ}{f^2+L} \sqrt{\left\{ \begin{array}{l} mn(f^2 + L)^2 \\ -(f^2 + L)(Mn + mN) + (f^2 - L) \\ (nk^2 + ml^2) - 2fkl(Mn - mN)\sqrt{\left(\frac{L}{MN}\right)} \end{array} \right.}$$

2.° L'expression

$$\frac{2(B+A)(A'B - AB') + 4C^2(A + B + A' + B')}{(A'B - AB')^2 + 4C^2(A + A')(B + B')},$$

devient par une première substitution des valeurs de A, B, &c.

$$\frac{VS + SS + \frac{MN}{L}(R^2 + Vf)}{R^2S^2 + \frac{MN}{L}\left(R^4 + 2R^2Vf + V^2f^2 - \frac{V^2Q^2}{P^2}\right)}.$$

3.° Le dénominateur de cette quantité traité de la même manière que $AB - C^2$, se réduit à

$$\frac{P^2R^2Z}{(f^2 + L)^2}[(L + f^2)(Mn + mN) + L(nk^2 + ml^2) + MN + Mll + Nkk],$$

4.° Son numérateur devient pareillement

$$\frac{-p^2 Z}{(f^2+L)^2}\,[(L+f^2)(Mn+mN)+L(nk^2+ml^2)$$
$$+fkl(Mn-mN)\sqrt{(\tfrac{L}{MN})}].$$

Raſſemblant tous ces réſultats & faiſant, pour abréger,

$$F = (L+f^2)(Mn+mN)+L(nk^2+ml^2)$$
$$+MN+Ml^2+Nk^2$$
$$G = (L+f^2)(Mn+mN)+L(nk^2+ml^2)$$
$$+fkl(Mn-mN)\sqrt{(\tfrac{L}{MN})}$$
$$\left.\begin{array}{l} H = mn(f^2+L)^2-(f^2+L)(Mn+mN) \\ +(f^2-L)(nk^2+ml^2)-2fkl(Mn-mN)\sqrt{(\tfrac{L}{MN})} \end{array}\right\};$$

déſignant de plus par G' & H' ce que deviennent G & H, lorſqu'on change le ſigne de $\sqrt{(\frac{L}{MN})}$, on aura pour le réſultat de l'intégration par rapport à φ, ou pour l'attraction de chaque enveloppe conique, cette expreſſion,

$$\frac{2\pi\omega^2 d\omega}{F}\left(\frac{G}{\sqrt{(H)}}+\frac{G'}{\sqrt{(H')}}\right)\ldots(g');$$

formule qu'il faudra intégrer depuis $\omega = 0$, juſqu'à $\omega =$ *maximum*, pour avoir l'attraction totale du ſphéroïde dans la direction de l'axe a.

L'expreſſion (g') ſeroit d'une extrême complication s'il falloit y ſubſtituer les valeurs de L, M, N en ω, tirées de l'équation auxiliaire (d'); mais il ſuffit d'exprimer L, M, N & ω en fonctions d'une nouvelle indéterminée, & c'eſt ce qui peut ſe faire d'une manière très-ſimple. En effet, ſoit

$$L = \frac{\theta}{\alpha\beta},\ M = -\frac{\theta}{\beta},\ N = -\frac{\theta}{\alpha};$$

l'équation auxiliaire (d') donnera

$$\theta = l^2\alpha + k^2\beta - f^2\alpha\beta.$$

Ainsi L, M, N sont déjà exprimées par le moyen de α & β; mais il y a de plus une relation fort simple entre α & β; car au moyen des valeurs de L, M, N, on trouve

$$mL - M = \mu - m\lambda = (1 - m)\,\omega^2$$
$$nL - N = \nu - n\lambda = (1 - n)\,\omega^2;$$

donc

$$\omega^2 = \frac{\theta(m + \alpha)}{(1 - m)\alpha\beta} = \frac{\theta(n + \beta)}{(1 - n)\alpha\beta}.$$

Prenant une nouvelle indéterminée ψ, on aura

$$\alpha = (1 - m)\psi - m$$
$$\beta = (1 - n)\psi - n$$
$$\omega^2 = \frac{\theta\psi}{\alpha\beta}.$$

On voit donc que ω^2, L, M, N s'expriment rationellement & d'une manière fort simple au moyen de la variable ψ: on en déduit $\frac{2\omega d\omega}{F} = \frac{d\psi}{\theta}$, $\frac{L}{MN} = \frac{1}{\theta}$; de sorte que la quantité (g') ne contiendra plus que des radicaux du second degré.

Quoique la difficulté se trouve ainsi considérablement diminuée, elle n'est cependant pas réduite au point où elle doit être pour faire sortir du résultat le théorème que nous avons en vue. Sans doute qu'une substitution ultérieure réduiroit les choses à leur dernier état de simplicité; mais cette substitution ne se présente pas naturellement, & faute de l'apercevoir, il n'y auroit presque aucune conclusion à tirer de tant de calculs. Heureusement une considération particulière sur la forme de l'expression (g'), nous dispense d'attaquer de front cette difficulté algébrique, & va nous conduire au résultat d'une manière très-simple.

J'observe que dans la quantité $\frac{2\pi\omega^2 d\omega}{F}\left(\frac{G}{\sqrt{(H)}} + \frac{G'}{\sqrt{(H')}}\right)$

résultat

résultat de l'intégration, après avoir éliminé λ, μ, ν, il n'est resté aucun terme affecté de Z. Or on a

$$L = Z - \lambda = Z - \zeta - \omega^2$$
$$M = mZ - \mu = mZ - m\zeta - \omega^2$$
$$N = nZ - \nu = nZ - n\zeta - \omega^2.$$

Soit $Z - \zeta = Z'$, on aura

$$L = Z' - \omega^2$$
$$M = mZ' - \omega^2$$
$$N = nZ' - \omega^2;$$

donc la valeur de Z' trouvée par l'équation auxiliaire *(d')*, sera indépendante de ζ; il en sera de même de L, M, N, c'est-à-dire, que ces quantités seront fonctions des constantes m, n, f, k, l, & de la variable ω, mais ne seront nullement affectées de ζ.

Donc l'expression $\frac{2\pi\omega^2 d\omega}{F}\left(\frac{G}{\sqrt{(H)}} + \frac{G'}{\sqrt{(H')}}\right)$, qui représente l'attraction d'une enveloppe conique où ω a une valeur donnée, est indépendante de ζ : elle est la même pour tous les sphéroïdes semblables & semblablement situés.

En effet, dans ces sphéroïdes m & n demeureront constans; f, g, h, coordonnées du point attiré, le seront pareillement; ils ne différeront entr'eux que par la quantité ζ, qui n'entre point dans la valeur de l'attraction.

Cette conclusion peut s'étendre à toutes les valeurs de ω, & aux parties de l'attraction dirigées suivant les autres axes; d'où résulte ce théorème remarquable :

Si on imagine plusieurs sphéroïdes semblables, dont la densité soit la même & les axes situés dans la même direction, & que ces sphéroïdes agissent sur un même point extérieur, l'attraction du plus petit sphéroïde sera équivalente à celle d'une portion de chacun des autres, retranchée par la surface conique dans l'étendue de laquelle ω est égal au maximum *de cette quantité dans le plus petit sphéroïde.*

En effet, chaque enveloppe conique où ω eſt le même, quoique dans différens ſphéroïdes, exerce la même attraction ſur le même point; donc l'attraction totale du petit ſphéroïde ſera égale à l'attraction de la portion de chacun des autres, compriſe depuis $\omega = 0$, c'eſt-à-dire, depuis la ſurface conique tangente, juſqu'à la ſurface conique dans laquelle ω auroit la plus grande valeur qu'il peut avoir dans le plus petit ſphéroïde. Cette propoſition ſe vérifiera très-aiſément dans le cas des ſphères concentriques.

Nous avons déjà donné l'équation par laquelle on détermine le *maximum* de ω dans le ſphéroïde donné; cette équation revient à celle-ci:

$$\left.\begin{array}{l} (\omega^2 + \zeta)(\omega^2 + m\zeta)(\omega^2 + n\zeta) \\ - f^2 (\omega^2 + m\zeta)(\omega^2 + n\zeta) \\ - m^2 g^2 (\omega^2 + \zeta)(\omega^2 + n\zeta) \\ - n^2 h^2 (\omega^2 + \zeta)(\omega^2 + m\zeta) = 0. \end{array}\right\} \quad (h')$$

D'ailleurs ω dans chaque ſphéroïde repréſente la quantité $\sqrt{(\varepsilon^2 - \delta\zeta)}$; il eſt donc facile de déterminer géométriquement dans les ſphéroïdes ſemblables, les portions de ces corps qui exerceroient ſur un point donné la même attraction que le plus petit d'entr'eux. Les ſurfaces qui ſervent à retrancher les parties d'égale attraction, ſont des cônes à baſe d'ellipſe, ou des cônes ſcalènes ordinaires; car on peut démontrer que la ſurface indéfinie de tout cône à baſe d'ellipſe, ne diffère point de celle du cône ſcalène à baſe circulaire.

Il paroît par ces propriétés, qu'on peut faciliter beaucoup la recherche de la valeur de l'attraction, & obtenir un réſultat moins compoſé que l'expreſſion (g'). En effet, ſi on fait uſage du ſphéroïde dont la ſurface paſſe par le point attiré, on aura $\zeta = 0$; donc $\sqrt{(\varepsilon^2 - \delta\zeta)} = \varepsilon$, & la queſtion ſe réduit à intégrer la quantité

$$\frac{2\, dp\, dq\, \text{ſin.}\, p.\, \text{ſin.}^2 q\, (f\, \text{ſin.}\, q\, \text{ſin.}\, p + mg\, \text{ſin.}\, q\, \text{coſ.}\, p + nh\, \text{coſ.}\, q)}{\text{ſin.}^2 q\, \text{ſin.}^2 p + m\, \text{ſin.}^2 q\, \text{coſ.}^2 p + n\, \text{coſ.}^2 q}$$

pour toutes les valeurs de q & p qui peuvent avoir lieu entre les limites

f sin. q sin. p + $m\,g$ sin. q cos. p + $n\,h$ cos. $q = 0$

f sin. q sin. p + $m\,g$ sin. q cos. p + $n\,h$ cos. $q = \omega$,

ω étant le *maximum* déterminé par l'équation (h'). Il est remarquable dans ce cas que la surface où l'intégrale se termine, & en général toutes celles où ω est constant, sont des cônes droits dont l'axe commun se confond avec la perpendiculaire à la surface du sphéroïde.

L'intégration que nous indiquons, peut s'effectuer par les moyens ordinaires, mais elle ne laisse pas d'offrir encore quelques difficultés à cause des limites auxquelles il faut avoir égard : voici un moyen infiniment plus simple de parvenir au même but.

Puisque l'attraction de chaque enveloppe conique est indépendante de ζ, on peut supposer que la valeur de ω qui a lieu dans cette enveloppe, est précisément le *maximum* de ω dans un sphéroïde plus petit. Je reviens donc à la valeur générale de X, & j'observe que dans le cas du *maximum* de ω, on a $D = 0$; la formule (X) se réduit alors à celle-ci :

$$\int \frac{2\,\omega^2\,d\omega.\,A^{\frac{1}{2}}\,d\varphi}{A^2 + m\,B^2 + n\,f^2\,l^2\,\mu^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (i').$$

Il faut l'intégrer depuis $\varphi = 0$, jusqu'à $\varphi = 360^d$, ce qui donne pour l'attraction d'une enveloppe conique quelconque,

$$\frac{2\,\omega^2\,d\omega.\,2\,\pi\,A^{\frac{1}{2}}}{A^2 + m\,B^2 + n\,f^2\,l^2\,\mu^2}.$$

Remettons les valeurs de A, B, μ en ω, ou plutôt, comme la valeur de ζ que suppose cette intégration, dépend de la résolution de l'équation du 3.e degré,

$$\lambda\,\mu\,\nu - f^2\,\mu\,\nu - m^2\,g^2\,\lambda\,\nu - n^2\,h^2\,\lambda\,\mu = 0,$$

tâchons d'exprimer A, B, μ & ω par le moyen d'une

nouvelle indéterminée. Soit donc

$$\lambda = \frac{\theta}{\alpha \beta}, \mu = \frac{\theta}{\beta}, \nu = \frac{\theta}{\alpha};$$

on aura d'abord

$$\theta = f^2 \alpha \beta + m^2 g^2 \beta + n^2 h^2 \alpha:$$

mais les valeurs de λ, μ, ν donnent

$$m\lambda - \mu = (m - 1)\,\omega^2 = \frac{\theta(m - \alpha)}{\alpha \beta}$$

$$n\lambda - \nu = (n - 1)\,\omega^2 = \frac{\theta(n - \beta)}{\alpha \beta},$$

donc en prenant une nouvelle indéterminée ψ, toutes nos variables s'exprimeront très-ſimplement par le moyen de ψ; ainſi on aura

$$\alpha = m - (m - 1)\,\psi$$

$$\beta = n - (n - 1)\,\psi$$

$$\omega^2 = \frac{\theta \psi}{\alpha \beta} = \psi\left(f^2 + \frac{m^2 g^2}{\alpha} + \frac{n^2 h^2}{\beta}\right).$$

Reprenant les valeurs de A & de B qui ſont

$$A = \mu\nu - m^2 g^2 \nu - n^2 h^2 \cdot \mu$$

$$B = m f g \nu,$$

on aura, en faiſant les ſubſtitutions,

$$A = \frac{f^2 \mu \nu}{\lambda} = f^2 \theta$$

$$A^2 + m B^2 + n f^2 l^2 \mu^2 = f^2 \theta^2 \left(f^2 + \frac{m^3 g^2}{\alpha^2} + \frac{n^3 h^2}{\beta^2}\right).$$

D'ailleurs on trouvera

$$2\,\omega\, d\omega = \left(f^2 + \frac{m^3 g^2}{\alpha^2} + \frac{n^3 h^2}{\beta^2}\right) d\psi;$$

donc enfin l'expreſſion (i') ſe réduit à cette forme infiniment ſimple $\frac{2\pi f d\psi \sqrt{(\psi)}}{\sqrt{(\alpha\beta)}}$, ou

$$\frac{2\pi f d\psi \sqrt{(\psi)}}{\sqrt{[m - (m - 1)\psi]} \cdot \sqrt{[n - (n - 1)\psi]}}.$$

C'eſt l'expreſſion générale de l'attraction d'une enveloppe

conique quelconque, ce n'eſt autre choſe que l'expreſſion *(g')* préſentée ſous la forme la plus ſimple. Il ne reſte plus qu'à intégrer cette quantité depuis $\psi = 0$, juſqu'à la valeur de ψ qui répond au *maximum* de ω dans le ſphéroïde donné.

Remettons au lieu de m & n leurs valeurs $\frac{a^2}{b^2}$ & $\frac{a^2}{c^2}$; introduiſons la maſſe M du ſphéroïde à la place de ſon volume $\frac{4\pi abc}{3}$, & ſuppoſons que ω étant à ſon *maximum*, on ait $\psi = \frac{a^2}{K^2}$. Si on fait en général $\psi = \frac{a^2 z^2}{K^2}$, l'attraction totale du ſphéroïde dans la direction de l'axe a, ſe trouvera par l'intégrale ſuivante priſe depuis $z = 0$, juſqu'à $z = 1$,

$$\frac{3Mf}{K} \cdot \int \frac{z^2\, dz}{\sqrt{[K^2 + (b^2 - a^2) z^2]} \cdot \sqrt{[K^2 + (c^2 - a^2) z^2]}}.$$

Quant à la valeur de K^2, pour la trouver directement, on obſervera que ſuivant les formules précédentes $\psi = \frac{\omega^2}{\lambda} = \frac{\omega^2}{\omega^2 + \zeta}$; de ſorte que ω étant à ſon *maximum*, on aura $\frac{K^2}{a^2} = \frac{\omega^2 + \zeta}{\omega^2}$, ce qui donne $\omega^2 = \frac{a^2 \zeta}{K^2 - a^2}$: ſubſtituant cette valeur dans l'équation *(h')*, on aura

$$K^2 (K^2 + b^2 - a^2)(K^2 + c^2 - a^2)$$
$$- f^2 (K^2 + b^2 - a^2)(K^2 + c^2 - a^2)$$
$$- g^2 K^2 (K^2 + c^2 - a^2) - h^2 K^2 (K^2 + b^2 - a^2) = 0,$$

équation dont il faudra prendre la plus grande racine pour valeur de K^2.

On voit par cette équation, que la valeur de K ne contient d'autre fonction de a, b, c que $b^2 - a^2$ & $c^2 - a^2$; il en eſt de même de la valeur de l'attraction, d'où réſulte enfin le théorème qu'il s'agiſſoit de démontrer :

Si deux ſphéroïdes ont leurs ellipſes principales décrites des mêmes foyers, les attractions qu'ils exercent ſur un même point, auront la même direction, & ſeront entr'elles comme leurs maſſes.

Quoique dès les premiers pas la résolution de ce problème parût rentrer dans les règles ordinaires, on voit cependant qu'il a fallu beaucoup d'artifices de calcul pour parvenir au résultat. Ce problème eſt vraiſemblablement un de ceux auxquels la méthode ſynthétique ne ſeroit point applicable; car pour rendre l'intégration poſſible, il ne paroît pas qu'il y ait d'autre moyen que de décompoſer, comme nous avons fait, le ſphéroïde en couches ou enveloppes coniques dans leſquelles ω eſt conſtant : or l'attraction d'une de ces enveloppes exige une intégration très-difficile & fort au-deſſus des moyens ordinaires de la ſynthèſe. Ce n'eſt qu'après l'intégration, que la circonſtance de la diſparition de ζ donne lieu aux propriétés que nous avons énoncées, & permet de ſimplifier conſidérablement le réſultat.



OBSERVATIONS

Faites dans un voyage aux Terres australes, en 1773 & 1774.

Par M. LE PAUTE D'AGELET *.

LE désir de faire dans cette expédition quelque chose qui pût être utile à l'astronomie, me détermina à m'embarquer en 1773 pour les Terres Australes, par le conseil & les soins de M. de la Lande. Cette campagne annonçoit des occasions intéressantes pour un observateur, mais les circonstances qui en ont empêché le succès, m'ont aussi ôté les occasions de faire beaucoup d'observations; mon seul regret est de n'en avoir pu rapporter un plus grand nombre, malgré la dureté & les fatigues d'un long & pénible voyage.

---

* Ce Mémoire, lû à l'Académie en 1775, étoit destiné à paroître dans le recueil des Mémoires présentés par des Savans étrangers, ainsi que plusieurs autres Mémoires que M. d'Agelet, avant son départ pour le voyage autour du monde, avoit lûs à l'Académie; on les publiera successivement, ainsi que de nombreuses observations d'étoiles dont les journaux sont entre les mains de M. de la Lande. La troisième comète de 1790 a donné lieu d'y recourir pour avoir les positions de plusieurs étoiles vers lesquelles elle a passé, & dont on n'auroit pu trouver ailleurs des positions assez exactes.

M. de Pagès, dans ses Voyages publiés en 1782, donne une relation de cette expédition; il parle des observations, mais il ne nomme point l'auteur.

M. d'Agelet avoit aussi donné un petit extrait de ce voyage dans le Journal des Savans, *juin 1775*, mais on n'y trouve pas les observations qui sont l'objet de ce Mémoire.

Cet Académicien, né en 1753, commença en 1768 à s'occuper d'astronomie avec M. de la Lande. Il a été élu à l'Académie le 15 janvier 1785; il est parti le 1.er août suivant avec M. de la Pérouse pour faire le tour du monde. Au moment où ceci s'imprime (17 juin 1790) on n'en a point de nouvelles; les dernières étoient de Botany-bay, à la Nouvelle-Hollande, *mars 1788*.

Nous ſortîmes du port de Breſt le 26 mars 1773, avec le vaiſſeau le *Roland* de ſoixante-quatre, commandé par M. Kerguelen, chef de cette expédition; & la frégate l'*Oiſeau*, par M. de Roſnevet, officier diſtingué par ſes connoiſſances dans tous les genres, & par ſon zèle pour le progrès des ſciences.

Nous avions à bord de chaque bâtiment une horloge marine de M. Berthoud, & les inſtrumens d'aſtronomie néceſſaires à nos opérations.

La précipitation avec laquelle ſe fit notre embarquement, ne nous laiſſa point le temps de régler nos montres à Breſt avant de mettre à la voile, & nous ne pûmes faire aucune épreuve ſur leurs marches dans la traverſée de France au cap de Bonne-eſpérance.

Les obſervations de diſtances de la lune au ſoleil, faites dans cette traverſée, ſemblent fournir la remarque ſuivante ſur la poſition de l'île que l'on appelle la *Trinité*, mais qui me paroît n'être que l'île de l'*Aſcençaon*, répétée deux fois ſur nos cartes géographiques. Dans la carte méridionale du Neptune François de M. Bellin, les îlots de Martin Vas ſont placés par les $26^d \frac{1}{2}$ de longitude occidentale, & $20^d\ 20'$ de latitude méridionale; la longitude eſtimée du bâtiment étant de $26^d\ 23'$, l'île de la *Trinité* nous reſtoit O. $\frac{1}{4}$ S. O. diſtance treize lieues, & le plus eſt des îlots de Martin Vas dans le ſud, à ſept lieues de diſtance. Le même jour, un peu après midi, on eut connoiſſance de ces îlots du haut des mâts; ils reſtoient dans le O. $\frac{1}{4}$ S. O. du monde; on eſtimoit leur diſtance de ſept à huit lieues. La longitude vraie, déduite des obſervations de diſtances faites les jours précédens, & réduite au moment du relèvement, étoit de $31^d\ 53'$, ce qui ne diffère pas beaucoup de la longitude à laquelle on place l'île de l'*Aſcençaon* dans nos cartes. Cette erreur de poſition pourroit bien venir de l'effet des courans, qui paroiſſent conſtamment porter à l'oueſt, comme nous l'avons éprouvé.

Le 27 mai, nous mouillâmes au cap de Bonne-eſpérance, dans

dans la baie de Falſe, en rade de Simon's bay, par treize braſſes, fond de ſable olive. Après avoir établi un obſervatoire à terre, pour vérifier l'erreur des inſtrumens & faire nos obſervations, nous déterminâmes la marche de nos montres marines; je trouvai le retard journalier de n.° 11, le thermomètre étant à 13^{d} au-deſſus de la congélation, de 11",2. La latitude du magaſin qui eſt dans le fond de cette baie, déterminée par pluſieurs hauteurs d'étoiles priſes au nord & au ſud, avec un quart-de-cercle d'un pied de rayon, fait par Bird, eſt de 34^{d} 11′ 50″ au ſud. L'inclinaiſon de l'aiguille que j'obſervai avec une bouſſole faite par M. Magny à Paris, me donna les réſultats ſuivans, que je rapporte pour montrer la différence que j'ai trouvée par le retournement de cette bouſſole, ſoit dans le méridien magnétique ou dans le méridien du lieu; j'ai trouvé de même des différences dans toutes les latitudes ſud où j'ai fait l'obſervation. Je craignois alors que la bouſſole n'eût ſouffert quelques dérangemens, ou reçu quelques ſecouſſes, qui peut-être occaſionneroient cette différence; mais M. l'Abbé de la Caille (*Mém. Acad. 1751, p. 45*) & M. le Gentil dans ſon voyage de l'Inde, avoient déjà trouvé des variations ſemblables, avec des bouſſoles du même auteur.

La déclinaiſon de l'aiguille, le 22 juin, étoit de $20^{d}\frac{1}{4}$ N. O le thermomètre $15^{d}\frac{1}{2}$, temps clair; j'ai trouvé les réſultats ſuivans, avec la bouſſole d'inclinaiſon.

Dans le méridien magnétique.	*Dans le méridien du lieu.*
44^{d} 30′ } plonge	41^{d} 45′
47 30 }	44 50
à 90^d du méridien magnétique.	
85^{d} 0.	
89 45.	

Ainsi l'on voit qu'il y a plusieurs degrés de différence dans l'inclinaison donnée par le retournement. La même boussole à Paris donnoit cependant la même chose en 1772 (*Conn. des temps 1775, page 350*), & je m'en étois assuré plusieurs fois, en répétant les observations.

La hauteur des marées mesurée les 21, 22 & 23 de juin 1773, sur une grande règle graduée & placée contre un des piliers du pont, dans le fond de la baie, a été de quatre pieds neuf pouces à cinq pieds : l'établissement du port deux heures après le passage de la lune au méridien.

Je mesurai la hauteur de la montagne qui est en face du mouillage des vaisseaux, par le moyen du baromètre, en employant la méthode de M. de Luc, & je trouvai que la plus haute, qui est à côté de la montagne appelée la *Reconnoissance*, a 237 toises d'élevation au-dessus du niveau de la mer, le baromètre étant à 28 pouces 2 lignes $\frac{1}{2}$ à bord, & à 26 pouces 8 lignes $\frac{1}{2}$ au sommet; le thermomètre étoit à 14^d au bas, & $10\frac{1}{2}$ au sommet: j'avois commencé à faire des relèvemens pour dresser un plan plus exact de cette baie, mais l'ordre que nous reçûmes du commandant de partir pour Madagascar, m'obligea d'abandonner ce travail, qui pouvoit être utile aux navigateurs.

Arrivés à Madagascar le 20 juillet, nous mouillâmes à Foulpointe : j'établis les instrumens à terre pour faire quelques observations, mais le temps fut presque continuellement couvert, en sorte que je ne pus faire que très-peu d'observations. Je trouvai la latitude par des hauteurs méridiennes de plusieurs étoiles, de $17^d 40' 35''$. Par un milieu entre plusieurs observations de distances faites à terre, & les hauteurs des astres prises avec un quart-de-cercle, je trouve sa longitude $47^d 35'$. Par la montre n.° 11, en déterminant sa marche à l'Isle-de-France, je trouve $47^d 15'$. Comme cette traversée a été fort courte, quoique sa marche ait

avancé assez sensiblement, il est certain que le résultat ne doit point être très-éloigné; ainsi, il me semble qu'en prenant $47^d\ 20'$ pour la longitude de Foulpointe, on doit être à peu-près sûr de ce résultat, à moins d'un quart de degré. Il diffère de $1^d\ 50'$ de la longitude à laquelle il est placé dans le Neptune François, & de $10'\ 30''$ de celle qui résulte d'une éclipse d'Antarès par la lune, observée dans le même lieu par M. le Gentil, que j'ai vue depuis dans la *Connoissance des temps de 1775*, $3^h\ 10'\ 10''$ (ou $47^d, 30'$).

J'observai la hauteur des marées dans la nouvelle & pleine lune, de 3 pieds $\frac{1}{2}$. Voici une table de l'inclinaison de l'aiguille aimantée, dans laquelle on voit les changemens occasionnés par le retournement, que j'avois déjà éprouvé à Falsbay. Le 7 août 1773, temps couvert, thermomètre $19^d\ \frac{3}{4}$, la déclinaison observée à 3^h après midi, $17^d\ \frac{1}{4}$ N. O. l'inclinaison comme il suit.

Dans le Méridien magnétique.			*Dans le Méridien du lieu.*		*A 90^d du Méridien magnétique.*			*A 90^d du Méridien.*		
D.	*M.*		*D.*	*M.*	*D.*	*M.*		*D.*	*M.*	
50^d	$40'$	plonge au sud.	47^d	$30'$	87^d	$45'$	plonge à l'ouest.	79^d	$40'$	plonge à l'est.
50	30		47	30	87	30		80	0	
50	25		51	20	85	30		74	15	
46	0		51	20	85	30		74	30	
46	0									
45	45									

Le 10 août 1773 nous partîmes de Madagascar pour l'Isle-de-France, où nous fûmes à l'ancre le 19. J'observai l'éclipse de lune du 30 septembre au soir. Le commencement ne fut point visible; à $8^h\ 17'$ j'aperçus la lune à travers les nuages, & je vis la pénombre qui étoit sur le bord, mais sans l'éclipser. Comme le vent étoit très-fort, je fus obligé d'abandonner la lunette de 7 pieds $\frac{1}{2}$.

& d'obſerver avec celle d'un quart-de cercle de 2 pieds $\frac{1}{2}$ de rayon, qui avoit plus de ſolidité. Voici les taches que j'ai pu obſerver.

8^h 44′ 30″	Émerſion d'Eratoſthène.
49. 33.	Copernic.
55. 10.	Comm. de *Mare ſerenitatis.*
9. 4. 21.	*Manilius.*
18. 23.	*Dionyſius.*
18. 43.	*Cleomedes.*
22. 21.	Commencement de *Mare criſium.*
26. 37.	*Inſula ſinûs medii.*
9. 29. 43.	Immerſion de *Gaſſendus.*
39. 27.	*Promontorium acut. Cenſorinus.*
10. 44. 12.	*Inſ. ſin. medii.*
11. 0. 3.	*Mare criſium.*
4. 31.	*Proclus.*

J'obſervai la fin de l'écliple avec une lunette acromatique de 7 pieds $\frac{1}{2}$ de M. l'abbé Bouriot, qui groſſit 64 fois, 11^h 23′ 20″. Le ciel étoit alors fort clair, & les nuages totalement diſſipés. La différence des méridiens eſt de 3^h 40′ 32″ ſuivant M. de la Caille; c'eſt le réſultat d'un grand nombre d'obſervations, plus concluantes que les écliples de lune.

La déclinaiſon de l'aimant obſervée le 9 octobre, étoit de 15^d 45′ O. l'inclinaiſon à 2^h après midi, thermomètre 21^d, baromètre 28 p. 3 l. temps clair.

Dans le Méridien magnétique.	*Méridien du lieu.*	*A 90^d du Méridien magnétique.*	*A 90^d du Méridien.*
54^d 0′ } au ſud. 50 15 }	54^d 20′ } 51 0 }	83^d 20′ } à l'eſt. 79 15 }	85^d 50′ 82 20

On appareilla de l'Iſle-de-France le 17 octobre pour l'Iſle de Bourbon.

Enfin, le 29 octobre, nous mîmes à la voile pour aller chercher les Terres Australes; départ que nous désirions avec impatience, comme devant être l'époque de nos travaux les plus curieux, & où chaque événement alloit devenir intéressant pour nous.

Dès que nous nous fûmes élevés par les 32^d de latitude méridionale, étant par les 40^d de longitude à l'est de Paris, nous commençâmes à trouver des brumes épaisses, la mer grosse, houleuse, le vent fort frais; nous vîmes beaucoup d'oiseaux de mer. Par les 43 & 45 degrés de latitude, & 38 de longitude, on eut beaucoup d'indices de terre, du goëmont, des oiseaux en quantité, des plongeons & des loups marins; on n'aperçut pourtant aucun changement dans la couleur de la mer. Il est probable que nous étions près des îles arides découvertes par M. Marion l'année précédente, à en juger par la position que les officiers de son bord ont donnée depuis de ces terres; mais le mauvais temps qui ne cessoit point, fut cause que l'on continua la route sans faire aucune recherche pour s'en assurer, & l'on s'éleva jusque par les 49 & 50^d de latitude méridionale.

Si l'on jugeoit de l'hémisphère austral par le temps que nous y éprouvâmes pendant toute cette traversée, on le trouveroit bien rigoureux. Le ciel fut presque toujours couvert; depuis les 44 degrés de latitude, le thermomètre à mercure, fait sur l'échelle de M. de Réaumur, étoit, dans la plus grande chaleur du jour, c'est à dire, vers $2^h \frac{1}{2}$ après midi, à 2, 3, 4 & 5 degrés seulement au-dessus de la congélation, & souvent pendant la nuit à 1 & à 2 au-dessous, quoique ce fût alors le temps du solstice d'été. La mer fut presque toujours mauvaise, ou bien l'on avoit des brumes épaisses, parmi lesquelles l'on pouvoit à peine conserver les bâtimens ensemble; à cela succédoit la pluie, la neige ou la grêle, & à peine pourrions-nous compter deux jours de suite de beau temps dans une croisière de deux mois. On jugera de la température de ce climat

par la table ſuivante, où il paroît qu'il faiſoit auſſi froid qu'à Paris, où l'on avoit cependant la ſaiſon oppoſée. J'ai joint à cette table les vents qui régnoient dans le temps de ces obſervations, avec la diſpoſition de l'air.

MOIS & JOURS	LATIT. mérid.		LONG. orient.		BAROM. à midi.		THER M. R. à 3^h	THER. pend. la nuit.	VENTS ET DISPOSITION DE L'AIR.
1773.	D.	M.	D	M	P.	L.	D.	D.	
Nov. 6.	28^d	$50'$	41^d	$48'$	28^P	2^l	22.	. . . .	S. E. variable preſque calme, beau temps.
18.	42.	52.	37.	31.	27.	8.	10.	6.	N. N O. bon frais, temps couvert & pluvieux.
20.	43.	40.	38.	12.	27.	9.	8.	. . . .	N. NO. O. bon frais, temps ſombre, couvert.
21.	44.	0.	38.	30.	27.	9.	4.	0 $\frac{1}{4}$.	O S O. O N O. grand frais, temps couvert.
23.	44.		40.	48.	28.	3.	3.	— $\frac{1}{2}$.	O S O. S O. grand frais, temps brumeux.
25.	45.	10.	41.	0.	28.	6.	3 $\frac{1}{2}$.	0.	N E. N N E. foible beau temps.
28.	49.		43.	0.	27.	6.	4.	0.	S S O. O. & N O. bon frais, temps ſombre, brumeux, neige.
30.	49.	30.	44.	0.	27.	4.	2.	—1.	NO. S O. bon frais, temps par grains, neige, grêle.
Déc. 1.	49.	45.	48.	0.	26.	11.	3 $\frac{1}{2}$.	0.	N O. O. calme, temps par grains, neige, grêle.
2.	49.	39.	50.	0.	27.	4.	2.	—1.	N O. O N O. grand frais, pluie, neige.
5.	49.	30.	56.	0.	28.	1.	4.	2.	N N O. O N O. N O. grand frais, temps couvert.
7.	49.	30.	57.	30.	27.	5.	5.	3.	N. grand frais, brume, pluie, neige, grêle.
11.	48.	54.	62.	11.	27.	6.	5.	4.	NO. N. bon frais, temps ſombre & brumeux.
14.	49.	9.	66.	0.	28.	0.	2.		O N O. temps couvert, joli frais.
17	48.	10.	66.		27.	9.	2.	0.	O. O N O. joli frais, beau temps.
19.	48.	0.	64.	45.	28.	4.	5.	2 $\frac{1}{2}$.	N N O. N. O N O. joli frais, beau temps.
28.	47.	30.	65.		27.	1.	2 $\frac{1}{2}$.	0 $\frac{1}{2}$.	N O. O. grand frais, grains violens, temps couvert.
1774. Janv. 2.	47.	30.	66.		27.	4.	5.	5.	N O. N. grand frais, grains violens, temps nébuleux.
9.	48.	0.	65.		27.	3.	—2 $\frac{1}{2}$.	—3 $\frac{1}{2}$.	S O. bon frais, pluie, neige, grêle.
10.	47.	40.	65.	30.	27.	1.	—1.	. . . .	N N O. & O N O. bon frais, temps ſombre.
15.	46.	30.	64.	30.	27.	9.	3.	. . . .	E. au N. grand frais, temps pluvieux.
19.	44.	53.	65.	0.	28.	0.	6.	. . . .	E. bon frais, beau temps.

Les variations du baromètre paroiſſent être aſſez grandes

dans ces mers. Le 1.er décembre à 5^h du soir, par les 47^d de longitude orientale & $49^d \frac{1}{2}$ de latitude, le thermomètre à $2^d \frac{1}{2}$ au-dessus de la congélation, le baromètre étoit à 26 pouces 9 lignes $\frac{1}{2}$; il avoit descendu uniformément depuis trois jours; le temps étoit sombre & brumeux, & nous eûmes les jours suivans de très-grands vents. La plus grande hauteur à laquelle il ait monté, fut le 21 décembre à la vue de terre; à 3^h après midi, le thermomètre à $4^d \frac{1}{4}$ au-dessus de la glace, temps clair & fin, le baromètre étoit à 28 pouces 5 lignes $\frac{1}{2}$

Enfin le 14 décembre au matin on reconnut la terre qui couroit à peu-près nord $\frac{1}{4}$ NE. & sud $\frac{1}{4}$ SE. Cette côte est très-élevée, & peut s'apercevoir à 10 ou 12 lieues au moins par un temps clair; on n'y voyoit ni arbre ni arbuste, pas même de verdure; les montagnes dont elle est composée étoient toutes couvertes de neige, & dans le nord-est il y avoit plusieurs bancs de glace qui paroissoient très-considérables. Nous atterrâmes par 49^d 14′ de latitude, & par 65^d de longitude; mais on abandonna cette partie de la terre pour aller chercher un mouillage dans la partie du nord, espérant qu'elle seroit moins difficile & moins exposée aux vents qui régnoient dans ces parages.

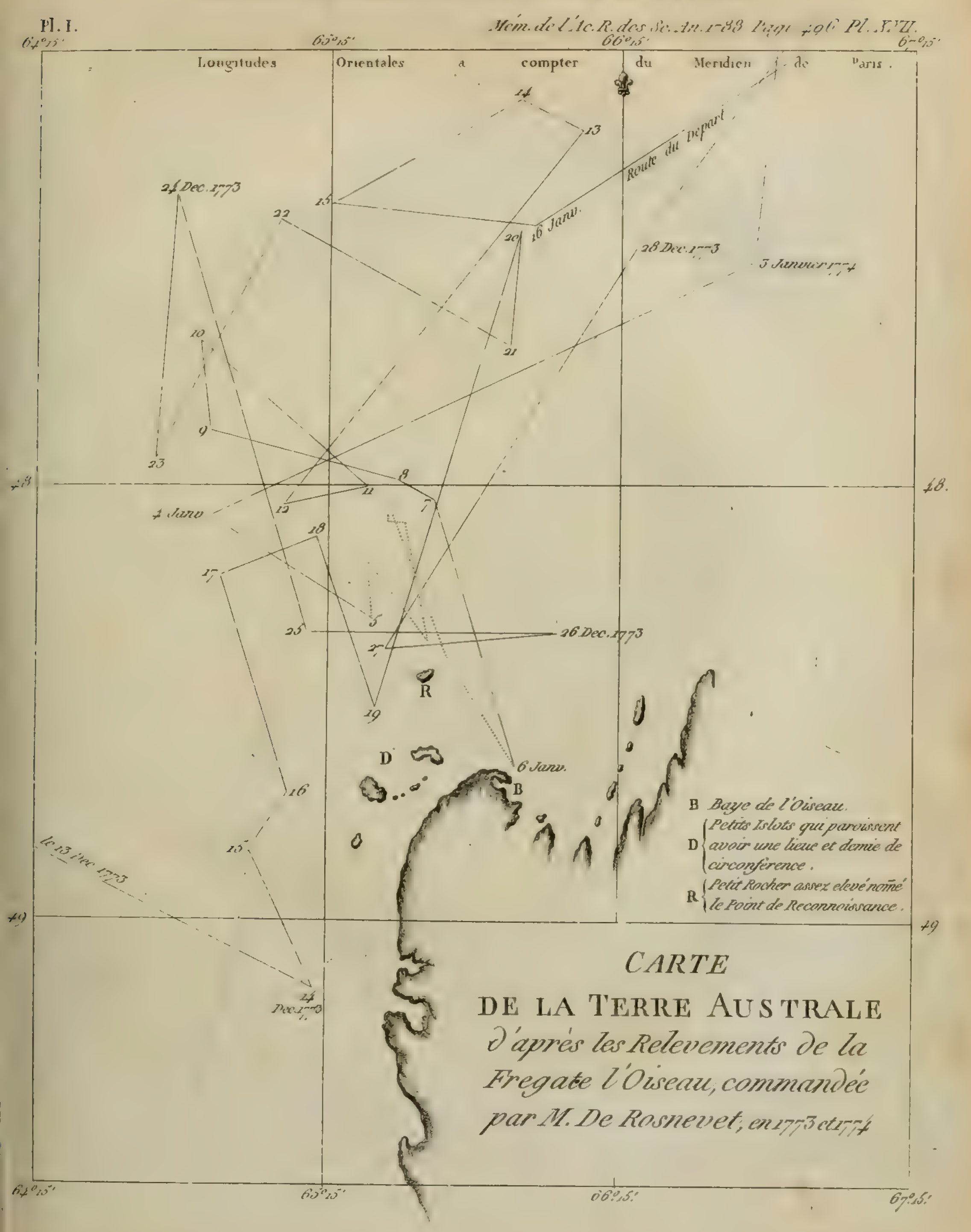
Le 15 décembre, à $9^h \frac{1}{2}$ du soir, on vit une aurore australe qui dura plus d'une heure; elle avoit 30 à 35^d d'étendue à l'horizon & à peu-près autant de hauteur perpendiculaire; elle inclinoit du côté de l'est: sa lumière étoit moins rouge & moins vive que celle qu'on remarque assez communément dans nos aurores boréales; on y distinguoit plusieurs jets ou faisceaux bien terminés, & qui durèrent assez long-temps avant de s'affoiblir & de changer de lumière. Le baromètre étoit à 27^p 9 l., le thermomètre à 2^d au-dessus de la congélation: nous étions à 12 & 15 lieues de la terre.

Le pôle magnétique de la terre étant par les 29^d du pôle austral, & vers les 123^d de longitude suivant la theorie de M. Euler (*Mem. de Berlin 1757*), si les

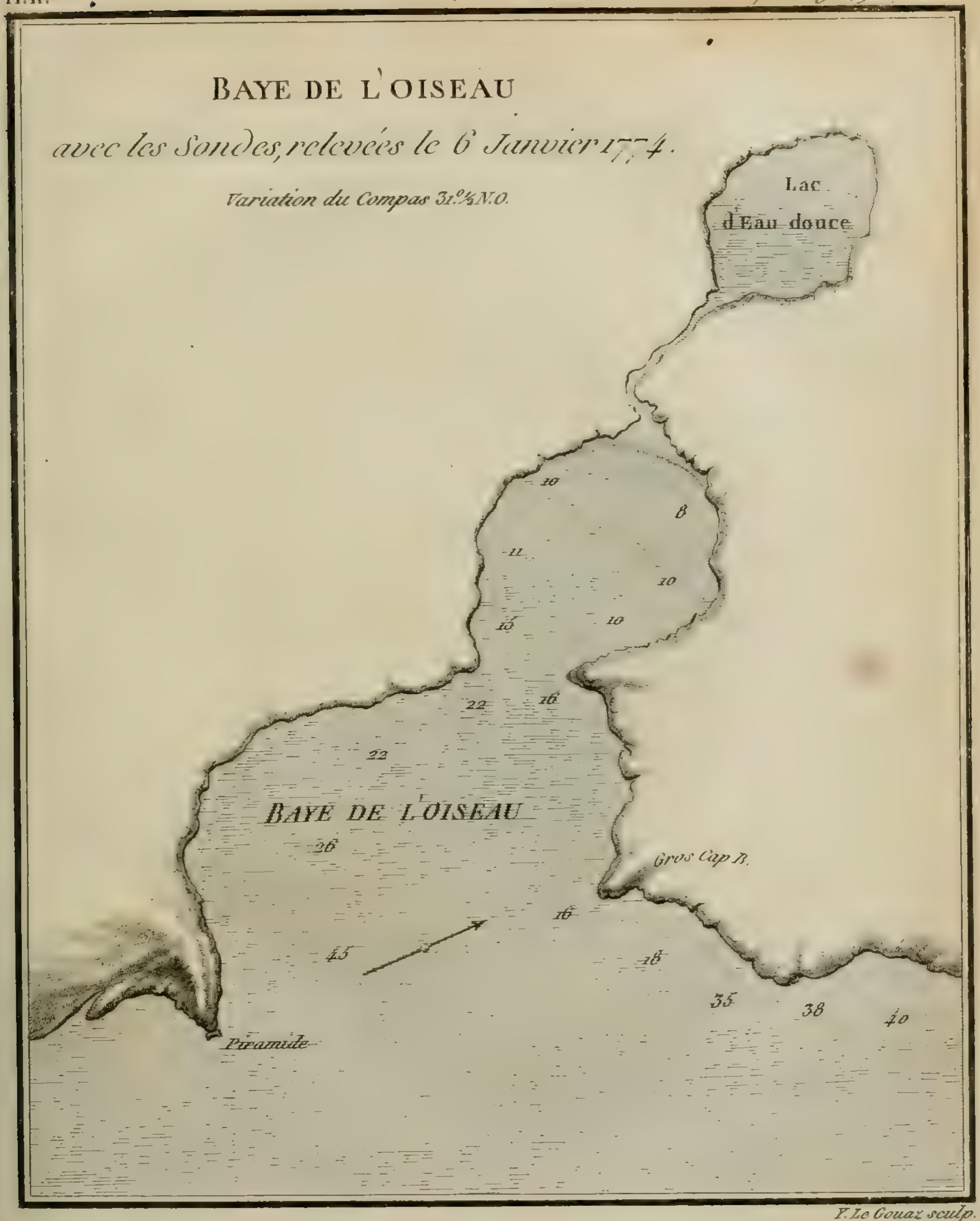
aurores ont leur émanation principale vers ce point là, elles doivent en effet décliner un peu vers l'est dans la position où nous étions.

On passa plusieurs jours à reconnoître la partie de cette terre qui se prolongeoit dans le nord. Ayant été séparés par un coup de vent, qui nous obligea de nous éloigner de la terre jusqu'au 4 de janvier 1774, l'on ne put rien faire pour s'assurer d'un mouillage. Le 6 janvier, voyant que le temps étoit favorable, on passa entre deux îlots qui sont par les 48^{d} $35'$ de latitude, & une espèce de rocher qui en est éloigné de 3 à 4 lieues dans le N. E. Faisant porter sur un gros cap qui est dans le S. E. de ce rocher à 5 à 6 lieues de distance, on aperçut derrière ce cap un enfoncement: on mit un canot à la mer pour aller s'assurer si c'étoit un mouillage. Nous étions assez près de terre pour distinguer très-facilement les oiseaux qui étoient en grande quantité sur le rivage. Ce cap est très-haut, fort à pic, & n'offre qu'un roc vif du côté de la mer, dans lequel on voyoit très-distinctement les couches horizontales & parallèles, coupées par des fentes perpendiculaires & verticales; le sommet étoit couvert de neige. De l'autre côté, la côte est beaucoup moins élevée; son extrémité, au bord de la mer, est terminée par une espèce de pyramide carrée, détachée & séparée de la montagne jusqu'au trois quarts de sa hauteur. On verra dans la première planche de ce Mémoire le plan de ces îles.

Les officiers qui avoient été visiter cet enfoncement revinrent à bord, après avoir sondé & relevé un petit port qu'ils trouvèrent dans le fond de cette baie; il est très-commode & à l'abri de tous les vents, excepté ceux de S. E. & S. E. $\frac{1}{4}$ E. qui nous ont paru être les moins fréquens & les moins violens de ces parages. Ils estiment sa largeur de 400 à 480 brasses, sa longeur d'un tiers de lieue; le mouillage est fond de sable fin : dans le fond est une petite rivière d'eau douce fort bonne, qui vient se


Longitudes Orientales a compter du Meridien de Paris.
64°15'
65°15'
66°15'
67°15'
48.
49
Route du Depart
24 Dec. 1773
28 Dec. 1773
5 Janvier 1774
16 Janv.
4 Janv.
26 Dec. 1773
6 Janv.
le 13 Dec. 1773
24 Dec. 1773
R
D
B
B Baye de l'Oiseau.
D Petits Islots qui paroissent avoir une lieue et demie de circonférence.
R Petit Rocher assez elevé nomé le Point de Reconnoissance.
CARTE
DE LA TERRE AUSTRALE
d'après les Relevements de la Fregate l'Oiseau, commandée par M. De Rosnevet, en 1773 et 1774





Y. Le Gouaz sculp.



ſe rendre à la mer en ſortant d'un lac qui ſe trouve à 200 pas du rivage, qui a environ un tiers de lieue de circonférence. Je joins ici le plan de ce port, dreſſé d'après les relèvemens faits à terre, & l'eſtimation approchée de ſa longueur & de ſa largeur.

On prit poſſeſſion de cette terre au nom du roi, & l'on y laiſſa pluſieurs inſcriptions dans des bouteilles, pour en conſtater l'époque; les unes furent enterrées ſous de petites pyramides ſur le rivage, d'autres accrochées aux roches. Elles renferment l'inſcription ſuivante écrite ſur vélin :

Ludovico XV, Galliarum rege, & D. de Boynes regi à ſecretis ad res maritimas, annis 1773 & 1774.

On n'apercevoit ſur la partie découverte des montagnes qui entourent cette baie, qu'une mouſſe jaunâtre & aride, ſans aucun veſtige d'arbre ni d'arbuſte; on trouva ſeulement au bord du lac quelques *gramen* qui étoient à la vérité d'une grande vigueur & d'une belle croiſſance. Des deux ſeules plantes que nous ayons rapportées de cette terre, l'une eſt l'argentine de Linné; elle fut priſe ſur un tas de goëmont ou varec à l'entrée de la baie; ſa fleur étoit bien épanouie & de couleur jaune; elle paroiſſoit avoir été recémment détachée & entraînée par quelque chute d'eau : ſa racine étoit encore environnée d'une terre noire & ſablonneuſe : l'autre eſt un *gramen* pris au bord du lac. J'ai remis ces deux plantes à M. Adanſon. Tout le rivage étoit couvert d'oiſeaux de différentes eſpèces. L'on y trouva auſſi beaucoup de phoques, c'eſt-à-dire, de loups marins & des lions marins qui étoient fort grands; l'on en tua un des plus petits, qui avoit encore 12 pieds de long ſur 6 à peu-près de circonférence. La latitude du gros cap qui eſt à l'ouverture de cette baie, eſt de 48^d $40'$, & ſa longitude 65^d $50'$ orientale, par un milieu entre des obſervations de diſtances de la Lune au Soleil faites avec un ſextant de Ramſden.

Le vent & la brume qui survinrent tout-à-coup, nous obligèrent de prendre le large. Nous rejoignîmes, le 9 janvier, le commandant à qui l'on communiqua tout ce qu'on avoit fait depuis la séparation. Nous crûmes pendant plusieurs jours que l'on alloit profiter des connoissances & des relèvemens que nous avions faits pour relâcher à cette terre & en suivre la découverte; mais ce fut en vain, M. Kerguelen nous fit savoir le projet qu'il avoit formé d'abandonner sa mission. M. de Rosnevet lui demanda la permission de la continuer, mais il ne pût l'obtenir, & nous partîmes au grand regret de tous ceux qui avoient du zèle pour les observations & pour les découvertes. Je joins ici une carte de la position des terres que nous avons vues, dressée d'après nos relèvemens, & dans laquelle on peut voir les routes que nous y avons faites pendant notre séjour : ces routes ont été réduites par M. Daniers, lieutenant de la frégate, avec tout le soin & l'exactitude dont elles sont suceptibles; cela pourroit être utile dans le cas où l'on voudroit y retourner (*). La variation du compas étoit de $31^d \frac{1}{2}$ nord-ouest.

La mer étoit quelquefois lumineuse, sur-tout aux approches de terre, mais d'une couleur moins vive & moins brillante qu'entre les tropiques où ce phénomène est presque continuel.

Nous vînmes donc à Madagascar après avoir tenu la mer pendant 120 jours, & nous relâchâmes dans la baie d'Antongil le 16 février 1774.

Des contestations élevées par M. de Bienouski, qui commençoit un établissement dans cette partie de l'île, & qui ne vouloit point permettre à nos équipages de communication avec la grande terre, nous empêchèrent de descendre nos instrumens d'astronomie avant le 3 mars.

(*) M. de Pagès a donné aussi une carte & différentes vues de ces îles, dans le second volume de ses Voyages; mais la carte que l'on trouvera ici est plus détaillée, soit pour les routes soit pour la baie principale.

La latitude du fond de la baie de Voromboite près l'île Marosse, est de 15^d 26′ 59″ selon les observations de M. Mersais, & 15^d 27′ 15″ selon les miennes.

Le 12 mars, nous observâmes l'éclipse de soleil. M. Mersais avoit une lunette de 7 pieds $\frac{1}{2}$, construite sous les yeux de M. l'abbé Bouriot, & qui grossissoit 64 fois; il observa le commencement à 0^h 23′ 4″, & la fin à 2^h 53′ 10″ $\frac{3}{4}$, temps vrai.

Celle qui m'a servi pour cette observation, étoit une excellente lunette acromatique de Dollond, qui grossissoit 74 fois, que j'avois fixée sur mon quart-de-cercle pour plus de solidité. J'observai le commencement à 0′ 23′ 6″, & la fin à 2^h 23′ 14″,5. La conjonction à Paris, par les tables de Mayer, est arrivée à 10^h 4′ 30″. Par l'observation je trouve pour le temps de la conjonction 1^h 13′ 32″, ce qui donneroit 3^h 9′ 2″ pour la différence des méridiens : je n'ai fait nulle correction pour l'erreur des tables, n'ayant point trouvé à mon retour d'observations faites ce jour-là qui puissent me la déterminer. On trouve 3^h 11′ 11″ & 3^h 13′ 15″ dans la *Connoissance des temps de 1775*, d'après plusieurs observations de M. le Gentil. Par plusieurs observations de distances de la lune au soleil, que j'avois faites à l'entrée de cette baie, je trouve sa longitude de 47^d $\frac{1}{4}$; ainsi l'on pourroit s'en tenir à 47^d 47′, au lieu de 45^d 55′ qu'on trouve dans nos cartes maritimes. C'est sûrement à cette fausse position de longitude de Madagascar, que l'on doit rapporter ce que disent les navigateurs de l'île de France, que les courans étoient si forts dans ces parages, qu'ils se trouvoient souvent avoir été entraînés de plus de deux degrés dans une traversée fort heureuse & fort courte, en allant d'une de ces îles à l'autre. C'est aussi cette ignorance de la longitude de Madagascar, qui a été la cause que plusieurs de nos bâtimens s'y sont échoués où perdus.

Le thermomètre à mercure étoit souvent à 34^d au-dessus de la congélation; il étoit à 32^d $\frac{3}{4}$ pendant l'observation

de l'éclipſe de ſoleil, dans la boîte de la pendule aſtronomique, quoique cette pendule fût elle-même ſous une double tente au bord de la mer : il reſtoit pendant la nuit à 24 & 25 degrés.

Nous quittâmes avec joie cette relâche le 22 mars. Peu de jours après nous apprîmes la mort de M. Merſais aſtronome, embarqué ſur le vaiſſeau de M. Kerguelen. Il avoit pris une fièvre chaude en obſervant pendant une partie des nuits, & faiſant des ſignaux de comparaiſons pour déterminer la marche de ſon horloge *n.° 8;* elle avoit été arrêtée par la négligence des perſonnes qui s'étoient chargées de la monter pendant qu'il étoit à l'obſervatoire que nous avions établi à terre. Il ſe jeta dans la mer le 31 mars, dans un violent accès, & périt ainſi à l'âge de 23 ans. J'ai fait imprimer ſon éloge dans les Nouvelles littéraires de divers pays, publiées à Berlin en 1776 par M. Bernoulli. Ce jeune aſtronome qui avoit beaucoup d'eſprit & des connoiſſances en aſtronomie, avoit commencé en 1766 à travailler ſous M. de la Lande avec qui il avoit fait beaucoup d'obſervations & de calculs; il avoit été en 1772 en Amérique avec MM. de Verdun, de Borda & Pingré, qui en ont fait l'éloge, & l'on avoit lieu d'eſpérer que ſes travaux deviendroient utiles à l'aſtronomie & à la navigation. Ses papiers ſont reſtés entre les mains de M. Kerguelen, à qui je les ai demandés inutilement.

Dans la traverſée de Madagaſcar au cap de Bonne-eſpérance, nous éprouvâmes des courans très conſidérables, tantôt à l'eſt & tantôt à l'oueſt, & nous eûmes des différences en latitude de 40′ au ſud par un temps preſque calme & la mer belle, par les 21 ½ degrés de longitude. D'autres fois ces différences furent de 30′ & 15′, mais quelquefois nous les éprouvâmes dans le ſens contraire; c'eſt-à-dire, qu'alors les courans nous portoient vers le nord.

M. Merſais m'a aſſuré que l'horloge *n.° 8*, de M. Berthoud, depuis le cap de Bonne-eſpérance juſqu'à l'Iſle de France,

ne lui avoit donné que 8 à 9 secondes de différence ou d'erreur, d'après la longitude déterminée pour l'un & l'autre endroit par M. l'abbé de la Caille, quoique leur traversée eût été de près de cinquante jours, & qu'ils y eussent perdu leur mâture. Comme elle a été arrêtée dans toutes les autres traversées, on n'a rien pu apprendre sur son exactitude.

Le 26 juin, nous partîmes du cap de Bonne-espérance. Le 23 juillet, on vit l'île de l'Ascension à la distance de 10 lieues. Sa longitude, par les observations de distances faites les jours précédens, seroit $15^d\ 54'$. Par *n.° 11*, en supposant sa marche constante depuis la dernière relâche, $15^d\ 30'$; elle est de $15^d\ 42'$, d'après les observations de M. de la Caille.

M. le Gentil m'avoit recommandé d'observer l'inclinaison de l'aiguille par les 12 & 11^d de latitude nord & sud de la ligne; voici celle que j'ai trouvée : le 20 juillet par les $10^d\ 45'$ de longitude orientale, & par $11^d\ 13'$ de latitude méridionale, l'aiguille plongeoit $4^d\ \frac{1}{2}$ au-dessous de la ligne horizontale, déclinaison $14^d\ 50'$ N. O., thermomètre $19\ \frac{1}{2}$, temps nébuleux. Le 21, je répétai la même observation par les 12^d de longitude & $10^d\ 3'$ de latitude, je trouvai $5^d\ \frac{1}{4}$ plong. au nord, à 90^d du méridien magnétique, elle plongeoit de 20^d du côté de l'ouest.

Le 28 juillet, nous passâmes sous la ligne; étant par $0^d\ 25'$ de latitude sud, & $18^d\ 50'$ de longitude occidentale; l'inclinaison étoit de 27^d plongeant au nord; à 90^d elle étoit de 83^d plongeant à l'est; le thermomètre à $23^d\ \frac{1}{2}$, temps couvert.

Le 4 août, par 23^d de longitude ouest & $12^d\ 45'$ de latitude nord, le thermomètre à 24^d, l'inclinaison étoit de 48^d plongeant au nord; à 90^d du méridien magnétique, elle étoit perpendiculaire. Le mouvement du vaisseau ne permet de faire ces observations qu'à peu-près, & l'on ne doit guère y compter qu'à $\frac{1}{2}$ ou $\frac{3}{4}$ de degré près.

J'ai mis à la fin de ce Mémoire, une table où l'on voit le résultat de ce que j'ai trouvé dans les différentes latitudes pour la pesanteur de l'eau de mer avec l'aréomètre de M. Beaumé. Enfin, nous arrivâmes à Brest le 6 septembre. Je dois, sur-tout, rendre compte à l'Académie de l'exactitude avec laquelle nous avons toujours navigué, par le moyen des observations de distances faites avec de bons instrumens; j'en rapporterai quelques exemples, cela servira à faire voir qu'on peut compter assez exactement sur la longitude de la nouvelle terre, fixée d'après de semblables observations. Il y a des personnes qui croient qu'on ne doit compter sur ces sortes d'observations qu'à 2^d près, ce qui feroit 40 lieues marines; ce qui peut être vrai pour des observations faites avec des instrumens imparfaits, comme sont encore ceux de nos pilotes; mais depuis qu'on les travaille avec exactitude, il est constant qu'on n'est point exposé à commettre des erreurs aussi considérables.

Notre atterrage au cap de Bonne-espérance n'étoit en erreur que de 4 à 5 lieues, & cela par une suite d'observations qui s'accordoient toutes entr'elles aussi-bien qu'on peut le désirer pour la navigation. Dans celui de Madagascar à l'Isle de France, nous n'eûmes que 8 lieues d'erreur; des Terres australes à Madagascar un demi-degré : de Madagascar au Cap, en tenant compte des courans, nous eûmes 7 lieues, & du cap de Bonne-espérance en France 14 lieues; mais il y avoit six jours que nous n'avions pu faire d'observations. Le vaisseau commandant avoit, par son estime, 70 à 80 lieues d'erreur, ainsi que cela arrive fort communément dans des traversées un peu longues.

La méthode des distances devient très-courte & très-expéditive, au moyen de la formule de M. le chevalier de Borda, pour calculer la correction des réfractions & des parallaxes; c'est celle dont je me suis servi dans toute la campagne, & par ce moyen l'on peut, en moins d'une demi-heure, faire l'observation & en tirer le résultat.

TABLE

DE LA PESANTEUR DE L'EAU DE MER,

D'après l'aréomètre de M. Beaumé, qui marque zéro dans l'eau distillée, & cent degrés dans un mélange d'eau & de sel à poids égaux. Dix parties de sel sur quatre-vingt-dix d'eau, font dix degrés de l'aréomètre.

ANNEES.	ARÉOMÈTRE.	LONGITUDES		LATITUDES.	THERMOMÈTRE.	BAROMÈTRE.	
		D.		D. M.	D.	P.	L.
10 Avril 1773	4.	14.	occid.	15 sept.	20 $\frac{1}{4}$.	28.	2. $\frac{1}{2}$.
16	3 $\frac{1}{2}$.	19.	occid.	4. 30′ S.	25.	28.	2.
18	3 $\frac{1}{2}$.	19.	occid.	2. 15. S.	24 $\frac{3}{4}$.	28.	2.
28	3 $\frac{4}{5}$.	30.	occid.	14. 7. M.	23.	28,	2.
2 Mai......	3 $\frac{3}{4}$.	31.	occid.	20. 15. M.	22 $\frac{1}{2}$.	28.	5.

Le Thermomètre plongé à cinq brasses étoit à 22^{d} $\frac{1}{4}$ en sortant; plongé à cinquante brasses, nous avons trouvé en le retirant qu'il étoit à 20^{d} $\frac{1}{2}$. Nous le replongeâmes en filant cent cinquante brasses, & en le retirant au bout de quinze à vingt minutes, en sortant il étoit à 15^{d} $\frac{1}{2}$ au-dessus de la congélation.

ANNEES.	ARÉOMÈTRE.	LONGITUDES		LATITUDES.	THERMOMÈTRE.	BAROMÈTRE.	
11 Nov. 1773.	3 $\frac{3}{4}$.	40^{d}	30′ or.	34^{d} 50′ M.	15^{d} $\frac{1}{2}$.	28^{p}	4^{l}
12	3 $\frac{3}{4}$.	40.	0.	35. 15. M.	15.	28.	2.
29	4.	43.	0.	49. 30. M.	1.	27.	5.
10 Décembre	4.	63.	0.	48. 54. M.	3.	27.	10.
15	4 $\frac{1}{8}$.	64.	40.	48. 50. M.	4.	27.	10.
10 Janv. 1774	4 $\frac{1}{6}$.	64.	30.	47. 40. M.	− 1 $\frac{1}{2}$.	27.	1.
24	4.	65.	0.	40. 40. M.	13.	28.	0.
3 Février...	3 $\frac{2}{3}$.	61.	0.	28. 40. M.	20.		
14	3 $\frac{1}{2}$.	49.		19. 10. M.	20 $\frac{1}{2}$.		
6 Juillet.....	3 $\frac{3}{4}$.	9.	0. or.	27. 30. M.	14.		
9	3 $\frac{3}{4}$.	5.	0. or.	25. 0. M.	16.		
15	4.	2.	occid.	19. 0. M.	15 $\frac{1}{2}$.	28.	3.
18	3 $\frac{3}{4}$.	19.	30.	0. 0.	24.	28.	2.
5 Août.....	3 $\frac{2}{3}$.	27.	0.	13. 0. S.	24 $\frac{1}{2}$.	28.	3.
27	3 $\frac{3}{4}$.	43.	0.	38. 15.	23.	28.	4.

L'ART

DE LA LIQUATION,

Ou du départ de l'argent d'avec le cuivre par l'intermède du plomb.

Par M. DUHAMEL.

AVANT-PROPOS.

LES procédés qu'on met communément en usage pour parvenir à extraire l'argent des cuivres qui en contiennent, se nomment en général *liquation*; mais chaque opération a une dénomination qui lui est propre. Je décrirai les procédés dont il s'agit, séparément dans huit chapitres divisés en différentes sections. Je m'attacherai plus particulièrement à détailler les opérations qui regardent directement cet art, & je traiterai le plus succinctement qu'il me sera possible celles qui ne sont que secondaires & connues en France.

Schlutter, traduit de l'allemand par M. Hellot, & que j'aurai occasion de citer, a donné les procédés de la liquation; mais je ne les crois pas assez bien détaillés pour qu'on puisse les mettre en pratique en France, notamment dans les mines, où souvent il n'y a que des personnes peu instruites de la métallurgie. D'ailleurs, je donnerai une nouvelle méthode de faire commodément, dans un seul & même fourneau de réverbère, les deux opérations de la liquation & du ressuage.

Je suivrai par ordre tous les procédés de la liquation & ceux qui y sont relatifs.

Le premier chapitre traitera du rafraîchissement du cuivre avec le plomb, ou autres matières qui contiennent ce métal.

Le

Le deuxième décrira le procédé de la liquation ou l'art de fondre le plomb uni au cuivre, sans faire couler ce dernier.

Le troisième concernera la torréfaction ou ressuage des pièces ou tourteaux de cuivre, après qu'on en a, par la liquation, extrait la majeure partie du plomb chargé de l'argent du cuivre.

Dans le quatrième, je donnerai une nouvelle méthode pour exécuter les deux derniers procédés, au moyen du fourneau que je propose & que je soumets aux lumières de l'Académie.

Comme ces quatre chapitres regardent immédiatement la liquation, les détails en seront plus étendus que pour les autres opérations qui n'en sont que les accessoires.

Le cinquième chapitre traitera de l'affinage du plomb, à l'effet d'en obtenir l'argent dont il s'est chargé dans la liquation.

Le chapitre six fera un détail abrégé du raffinage du cuivre qui a passé à la liquation.

Le septième traitera de la fonte des crasses ou déchets résultant de toutes les opérations.

Enfin, dans le chapitre huit, je parlerai de la manière de raffiner l'argent affiné.

CHAPITRE I.er

Du Raffraîchissement.

Les fourneaux dont on se sert en Allemagne pour l'opération du rafraîchissement, sont des espèces de fourneaux courbes ou à manche, les uns plus grands que les autres, sur-tout quant à ce qui concerne les dimensions intérieures; celui qu'on emploie pour cet usage à la fonderie de liquation de Grünthal en Saxe, m'a paru le mieux remplir les vues économiques qu'on doit toujours se proposer en faisant des établissemens. Ce fourneau ne consomme que peu de charbon, & il fond autant de matière que s'il avoit beaucoup

plus de capacité. Je l'ai repréſenté dans la planche première. *Voyez* ſon explication.

PREMIÈRE SECTION.

Du Fourneau de raffraîchiſſement.

LE fourneau dont je donne le deſſin, a 23 pouces de longueur depuis le mur mitoyen qui porte la tuyère, juſqu'au devant de la chemiſe qui a 3 pouces d'épaiſſeur, ce qui fait qu'il ne reſte que 20 pouces de longueur intérieure lorſque le fourneau eſt fermé par ſa chemiſe. Sa largeur contre la tuyère, eſt de 13 pouces $\frac{1}{2}$, & elle n'eſt que de 8 pouces $\frac{1}{2}$ à l'endroit de la chemiſe. Sa hauteur, depuis le bas de la chemiſe, juſqu'à ſa partie ſupérieure, eſt de 4 pieds $\frac{1}{2}$.

La braſque qui prend, à partir de la lèvre inférieure de la tuyère, va en pente égale, ſe terminer au bas de la chemiſe où eſt le trou de l'œil. Cette pente eſt de 10 pouces $\frac{1}{2}$, ce qui facilite l'écoulement des matières fondues dans le baſſin de l'avant-foyer éloigné de la chemiſe de 4 pouces. Si l'on ne fait que de petites pièces de liquation du poids de 232 livres, ce baſſin aura aſſez de capacité en ne lui donnant qu'un pied de profondeur & 10 pouces de largeur dans le haut, & un peu moins dans le bas où il doit ſe terminer en calotte ou portion ſphérique.

La tuyère qui, comme il eſt dit, doit être élevée de 10 pouces $\frac{1}{2}$ plus haut que le bas de la chemiſe, eſt placée preſque horizontalement; ſon inclinaiſon vers l'intérieur du fourneau ne doit pas excéder un dégré. Comme les fondeurs n'ont pas d'inſtrumens propres à donner cette pente, ils y ſuppléent en laiſſant tomber un peu d'eau dans la tuyère qui a la pente requiſe lorſque ce fluide ſe détermine à couler; alors on la ſcelle dans la maçonnerie de manière qu'elle n'excéde pas le mur mitoyen.

SECONDE SECTION.

De la Brasque.

L'ON sait que la brasque servant à la préparation des fourneaux, est composée de charbon de bois pilé & tamisé, & d'argile séchée, à quoi on ajoute, dans certains cas, du sable. Il est des fontes qui exigent une brasque pesante, c'est-à-dire, environ autant d'argile que de charbon. Il en est d'autres où il faut employer de la brasque légère, c'est-à-dire, deux, trois & quatre parties de charbon sur une d'argile. Les Allemands, en cela, comme en toute autre chose, suivent leur routine ou coutume. Par exemple, dans la basse Allemagne, la brasque du fourneau de rafraîchissement est composée de trois parties de charbon & d'une d'argile. *(Voyez Schlutter, page 519)* ; & j'ai vû, avec feu M. Jars, qu'à la fonderie de liquation de Grünthal, on composoit la brasque, pour ce même objet, de deux parties d'argile & d'une seule de charbon, voilà une différence bien grande. La raison pour laquelle les ouvriers de cette fonderie mettent une aussi forte partie d'argile, est fondée sur ce qu'ils croient que de la brasque plus légère ne résisteroit pas bien, particulièrement au bassin de l'avant-foyer qui doit, autant qu'il est possible, conserver ses dimensions durant tout un rafraîchissement, afin qu'il ne contienne qu'autant de métal qu'il en est nécessaire pour former une pièce de liquation.

On peut remédier à l'agrandissement du bassin, en employant, pour cette partie seulement, de la brasque composée de parties égales de charbon & d'argile, & composer celle de l'intérieur du fourneau, de deux parties de charbon & d'une partie d'argile. Je pense que c'est la meilleure proportion pour le travail en question.

La brasque trop pesante est sujette à occasionner des amas de matières qui restent *infondues*, & qui obstruent le fourneau. D'un autre côté, il n'est pas nécessaire que la brasque soit

très-légère pour cette opération, car alors elle pourroit se détériorer avant la fin de la fonte qu'on s'est proposé d'y faire.

Lorsque la brasque est bien battue dans le fourneau & dans l'encaissement de l'avant-foyer, avec les instrumens accoutumés, on creuse le bassin & on lui donne les dimensions indiquées.

TROISIÈME SECTION.

De la Chemise du fourneau.

LORSQU'ON a des cuivres noirs chargés de beaucoup d'impuretés, ces matières hétérogènes sont sujettes à s'attacher sur le sol & aux côtés du fourneau, ce qui occasionne un travail très-pénible, sur-tout lorsque le fourneau est fermé par sa chemise depuis le haut jusqu'au trou de l'œil par lequel on détache avec des ringards ces amas, ce qui ne s'opère que très-difficilement : l'œil est même souvent trop petit pour permettre la sortie des morceaux détachés; alors on est forcé de démolir la partie inférieure de la chemise pour arracher ces amas, & de la reconstruire ensuite, ce qui occasionne une perte de temps, de matières métalliques qui se brûlent, & une consommation inutile de charbon.

Pour parer à ces inconvéniens, je conseille de suivre une méthode fort simple, en usage à Grünthal. Au lieu de fermer, par la chemise, toute la hauteur du fourneau, l'on ne ferme que la partie supérieure, & il reste, dans le bas, environ 15 pouces de vide. Cet espace se garnit avec des charbons de 5 à 6 pouces de longueur, bien rangés les uns sur les autres, en observant de laisser sur la brasque & au milieu de la largeur de la chemise, une ouverture de 18 lignes pour le trou de l'œil qui se formera facilement en plaçant sur la brasque un bâton de cette grosseur, & que l'on retirera lorsque l'espèce de muraille de charbons sera achevée. On enduit ces charbons à l'extérieur avec de l'argile

de l'épaiſſeur d'un pouce, de manière que cet enduit n'excède pas le devant de la chemiſe. L'on ne doit point mettre d'argile ſur ces charbons dans la partie intérieure du fourneau.

On conçoit maintenant que s'il arrive quelques obſtructions conſidérables au fourneau, il eſt aiſé de démolir une partie & même la totalité des charbons qui ferment le bas de la chemiſe, d'arracher les amas par cette ouverture, & de la refermer en peu de momens avec des charbons & de l'argile par-deſſus.

Au moyen de l'enduit d'argile, ces charbons tiennent au feu aſſez de temps pour faire 80 à 100 pièces de liquation, qui eſt tout ce qu'on peut faire dans une fonte. Il eſt bon d'obſerver qu'on doit choiſir les meilleurs charbons & les plus compactes, parce qu'ils réſiſtent plus long-temps au feu, & qu'ils ſont moins ſujets à ſe déranger que s'ils étoient tendres & friables.

Outre les avantages ci-deſſus qui réſultent de l'arrangement de la chemiſe avec des charbons, il en eſt deux autres que je regarde comme très-importans ; 1.° celui de donner de la chaleur dans le fourneau, plus que ne pourroient faire des briques de la chemiſe, quoique échauffées, & principalement dans cette partie où elle eſt néceſſaire pour que les matières qui ont été miſes en fuſion, en deſcendant devant la tuyère, puiſſent conſerver la même fluidité lorſqu'elles paſſent par l'œil.

2.° Celui d'empêcher qu'une partie des métaux, notamment le plomb, ne ſe ſcorifie ou ne ſe réduiſe en chaux en perdant ſon phlogiſtique, ce qui arrive avec une facilité incroyable à ce métal lorſqu'il ſe trouve expoſé à la direction du vent. Or, dans la préparation que je viens de rapporter, quand bien même le vent réduiroit en chaux quelques parties de plomb & qu'il les pouſſeroit contre la chemiſe, les charbons qui ferment cette partie revivifieroient ſur-le-champ cette chaux, ce qui ne peut pas avoir lieu lorſque toute la chemiſe eſt en briques ou en pierres.

QUATRIÈME SECTION.

Du Chauffage du fourneau avant la fonte.

On ne doit fermer le bas de la chemise du fourneau de rafraîchissement avec les charbons, qu'après que le fourneau a été suffisamment chauffé pendant 8 à 9 heures de suite, chauffage qui se fait de la manière suivante. On met un panier de charbon dans l'intérieur du fourneau, on en remplit en même temps le bassin de l'avant-foyer, l'on en met aussi dans celui de réception qui est une forte poêle de fer coulé; on met le feu à tous ces charbons, on l'entretient pendant tout le temps prescrit ci-dessus, en y ajoutant des charbons de temps en temps, ensuite on ferme, ainsi qu'on l'a dit, la partie inférieure de la chemise pour commencer la fonte aussitôt après.

Le détail de la préparation du fourneau à rafraîchir le cuivre étant connu, je vais traiter de la manière de charger & de gouverner ce fourneau pour l'opération de la fonte du cuivre avec du plomb ou de la litharge, ou l'un & l'autre. Peut-être croira-t-on qu'il eût été plus régulier de commencer par donner la composition des charges pour en former les gâteaux ou pièces de liquation, que de parler de la manière dont ces charges doivent êtres portées au fourneau, mais comme elles ont un rapport immédiat à tout ce qui vient d'être décrit ci-dessus, je ne donnerai la composition des charges qu'après avoir parlé de la fonte.

CINQUIÈME SECTION.

De la Fonte, dite de raffraîchissement.

Le fourneau étant préparé & chauffé, comme il est dit dans les sections précédentes, on le remplit de charbon, on donne le vent, soit de la trompe, soit des soufflets, on charge tout de suite un baquet de scories provenant de la fonte de minéraux de cuivre. Ces scories, en fondant,

enduisent les parois d'une espèce de vernis qui augmente la chaleur du fourneau, & empêche qu'elle ne se perde en partie dans les murs. Bientôt après, on charge sur les charbons une vingtaine de livres du plomb destiné à former la première pièce de liquation, & tout de suite, à peu-près la moitié du cuivre qui doit entrer dans cette pièce, & par-dessus une trentaine de livres de litharge, & à leur défaut, on y supplée avec du plomb; pendant ce temps, l'aide-fondeur tient un petit panier d'environ 10 livres de charbon dont il recouvre les métaux ou matières métalliques dont on vient de parler. Sur ce charbon, le maître fondeur place le restant du cuivre du premier mélange destiné à former la première pièce de liquation, & aussitôt son aide recouvre ce cuivre d'un pareil panier de charbon; on laisse aller la fonte pendant environ un quart-d'heure au plus. L'on charge ensuite le plomb ou la litharge destiné à ce premier mélange, à l'exception néanmoins d'une trentaine de livres, & enfin un panier de charbon par-dessus.

Quand le bassin de l'avant-foyer est rempli environ aux trois quarts, on porte les trente livres de plomb réservées du premier mélange & un panier de charbon sur lequel on charge la moitié du cuivre du second mélange, de la litharge, comme il est dit pour la formation de la première pièce, en même temps le panier de charbon sur lequel on porte l'autre moitié du cuivre de ce second mélange, puis un panier de charbon.

Lorsque le bassin est plein, & qu'on juge que le premier mélange est entièrement fondu, on charge le plomb ou la litharge de la seconde pièce, en en réservant aussi une trentaine de livres que l'on ne charge également que lorsque le bassin est rempli aux trois quarts du mélange de la seconde pièce. On suit cette marche pendant toute la durée de la fonte.

Les matières fondues coulent incessamment par le trou de l'œil dans le bassin de l'avant foyer; mais comme elles seroient exposées au contact de l'air, & que celles de la surface perdroient leur phlogistique, on doit éviter cet

inconvénient en tenant toujours un peu de pouſſière de charbon ſur ce bain.

Lorſqu'on n'emploie que du plonb & des litharges, cette fonte ne rend que très-peu de ſcories, ſur-tout ſi le cuivre n'eſt pas trop chargé de ſubſtances étrangères, mais ces ſcories ſont riches en cuivre & en plomb, & elles contiennent même un peu d'argent; on dira, *chapitre VII*, comment on doit traiter ces ſcories que nous nommerons déchets du rafraîchiſſement, pour les diſtinguer des déchets des autres opérations relatives à la liquation.

Le baſſin de l'avant-foyer étant rempli des métaux d'un mélange, on en nettoye la ſurface, & on perce pour faire couler les matières dans la poêle de fer où l'on a entretenu un peu de feu de charbon juſqu'au moment de la première percée; mais avant de faire cette percée, on jette un peu d'eau dans la poêle & deux poignées d'argile sèche & pulvériſée qu'on délaye dans l'eau, & avec un balai on en enduit tout l'intérieur de la poêle, qui étant très-chaude, fait ſécher l'enduit dans un moment.

Au lieu de percer, on peut puiſer la matière dans le baſſin & la porter dans la poêle avec une cuiller de fer également chauffée & enduite d'argile.

Il ne ſeroit pas poſſible de retirer la pièce du moule, ſans un fort crochet de fer que l'on fait entrer d'environ 2 pouces dans le métal en fuſion, de manière que la partie recourbée reſte en dehors. Au moyen d'un bâton refendu ou d'une tenaille que l'on poſe ſur le bord du moule, on tient le crochet dans la poſition convenable, après quoi, on jette de l'eau ſur les bords de la poêle; elle ſe répand ſur la ſurface du métal : il n'en faut que peu dans le premier inſtant, mais enſuite on peut ſans danger en remplir le moule entièrement. Comme elle ne tarde pas à bouillir, on la jette hors du moule avec un balai, & l'on y en ſubſtitue de fraîche, ce qu'on répète juſqu'à ce qu'on juge que la pièce ſoit entièrement figée; alors, avec un lévier, ſoit de bois, ſoit de fer, de 7 à 8 pieds de longueur, & qu'on

paſſe

paſſe dans le crochet, on enlève la pièce de ſon moule. En frappant avec un marteau tout autour du crochet, on le dégage de la pièce pour le faire ſervir à une autre; mais comme il peut s'en rompre, il eſt bon d'en avoir pluſieurs avant de commencer la fonte.

Auſſitôt qu'une pièce de liquation eſt ſortie de ſon moule, l'on y jette, comme on l'a déjà dit, de l'argile. S'il eſt reſté un peu d'eau dans le moule, il n'eſt pas néceſſaire d'y en ajouter; mais dans le cas qu'elle ſoit toute évaporée, l'on y en met un peu, & avec le balai l'on agite cette eau qui délaye l'argile, pour former le petit enduit dont on a parlé ci-deſſus, qui conſerve la poêle & qui facilite la ſortie de la pièce. Tout ce travail doit être exécuté par un maître fondeur & deux aides.

Les Allemands nomment la fonte du cuivre noir tenant argent, avec du plomb ou des matières qui le contiennent, *rafraîchiſſement du cuivre.* Sans doute qu'ils ont donné cette dénomination à cette fonte, parce qu'elle exige un plus petit dégré de chaleur pour mettre le cuivre en fuſion, que lorſqu'on le fond ſeul. En effet, le plomb ou la litharge qu'on eſt forcé de faire entrer dans la compoſition de cette fonte, facilitent extrêmement la fuſion du cuivre; c'eſt ce qui fait que cette opération va d'une vîteſſe incroyable. Nous avons vu à Grünthal en Saxe, faire ſept pièces de liquation par heure, de manière qu'en un poſte de 12 heures on en faiſoit 84, pour leſquelles on conſommoit environ 200 pieds cubes de charbon de bois.

On vient de voir la deſcription entière de la fonte dite de rafraîchiſſement; l'on va, dans les ſections ſuivantes, traiter de la compoſition des mélanges des matières ſoumiſes à cette fonte. Comme il eſt rare d'avoir tous cuivres qui contiennent la quantité d'argent requiſe pour faire les mélanges de la manière la plus avantageuſe, on eſt ſouvent forcé de faire de deux eſpèces de rafraîchiſſemens, qu'on déſigne par *rafraîchiſſement riche* & *rafraîchiſſement pauvre*, ainſi qu'on va le voir dans la ſection ſuivante.

SIXIÈME SECTION.

Différence du rafraîchissement riche au pauvre.

TOUT cuivre qui contient 12 onces ou environ d'argent par quintal, a la teneur convenable pour le soumettre au rafraîchissement riche. S'il en tient davantage, il reste de ce métal précieux dans le cuivre, quoiqu'on ait bien opéré, & d'autant plus que la teneur du cuivre surpasse les 12 onces. En pareil cas, on est forcé de repasser une seconde fois ce cuivre avec du plomb, & par tous les procédés relatifs à la liquation, pour en obtenir l'argent qui y étoit resté après la première opération ; ce qui occasionne une double dépense.

Le rafraîchissement pauvre est celui dans lequel on n'emploie que des cuivres dont la teneur en argent n'est que de 4, 5 & 6 onces par quintal. L'inconvénient qui résulte de ce peu de richesse, est infiniment plus considérable que celui d'avoir des cuivres qui tiennent 15 à 20 onces & au-dessus d'argent, & que l'on est obligé de passer deux fois aux opérations de la liquation pour en obtenir tout l'argent, ainsi que je viens de le dire ; car dans cette circonstance on obtient beaucoup d'argent, & dans celle du rafraîchissement pauvre, le plomb ou l'œuvre qui vient de la liquation, ne tient qu'une once $\frac{1}{2}$ à 2 onces par quintal, ce qui oblige de repasser cet œuvre avec d'autres cuivres de la même teneur ou à peu-près, & d'en faire de nouveau la liquation ; alors la richesse du plomb sera portée à environ 3 onces $\frac{1}{2}$ par quintal.

L'on voit que si dès la première liquation on affinoit ce plomb, la dépense seroit double ainsi que le déchet ou l'évaporation du plomb, & qu'il convient mieux de le repasser une seconde fois avec de nouveau cuivre & de le liquéfier.

C'est d'après ces principes reconnus en Allemagne & dans toutes les fonderies de liquation bien entendues, qu'on doit se régler. Au reste, les exemples que je donnerai pour tous

les cas qui peuvent ſe préſenter, faciliteront beaucoup l'intelligence de ce qui précéde.

SEPTIÈME SECTION.

Des proportions des métaux dans les pièces de liquation.

En Allemagne, où il ſe liquéfie beaucoup de cuivre, on a des ateliers qui permettent de travailler en grand volume; en conſéquence les pièces de liquation s'y ſont communément du poids de 350 livres chacune, & on les compoſe, ſavoir; de 3 quarts de quintal ou 75 livres de cuivre, & de 11 quarts de quintal ou 275 livres de plomb. Ils comptent par quart, afin de rendre les calculs plus faciles à faire. Ces proportions ſont pour le rafraîchiſſement riche.

Quant au rafraîchiſſement pauvre, les pièces ſont également compoſées de 75 livres de cuivre & ſeulement de 10 quarts ou 250 livres de plomb : d'où l'on voit que dans le travail riche les pièces ſont du poids de 350 livres, & que dans le pauvre elles ne pèſent que 325 livres ou 25 livres de moins que dans le travail riche. On voit auſſi que ce moins porte ſur le plomb, & non ſur le cuivre dont la quantité eſt invariablement la même dans les deux cas.

Comme il n'y a point en France de fonderies appartenant au Roi, ainſi qu'en Allemagne où elles ſont la plupart pour le compte des Électeurs qui y font traiter beaucoup de cuivre; & que d'ailleurs chaque compagnie de mine n'a, chez nous, que ſon petit établiſſement proportionné à l'importance des produits de ſa mine, je crois devoir conſeiller de faire des pièces de liquation moins fortes que celles dont je viens de parler; elles ſeront plus aiſées à manier; enfin on pourra, à cet égard, procéder ſuivant les circonſtances. Je vais donner le poids des pièces qui m'a paru le plus convenable pour un petit établiſſement, & les proportions des métaux qui doivent les compoſer, ſans avoir ici égard à leur teneur en argent.

Dans le cas d'un rafraîchiſſement riche, les pièces ſeront

composées de 50 livres de cuivre & de 182 livres de plomb, ce qui fait 232 livres pour le poids de chaque pièce de liquation. On peut voir que c'est la même proportion du cuivre, & à très-peu-près celle du plomb, observées pour les grandes pièces ci-dessus.

Quant au rafraîchissement pauvre, les pièces ne doivent peser que 216 livres, & être composées de 50 livres de cuivre & de 166 livres de plomb, qui est aussi, à 2 tiers de livre près, la proportion de plomb requise dans cette circonstance.

HUITIÈME SECTION.

Dispositions préliminaires avant de faire les mélanges.

ON ne doit entreprendre la fonte du rafraîchissement que lorsqu'on a en magasin une certaine quantité de cuivre noir tenant argent, & du plomb ou des litharges en suffisante quantité. Il faut alors, 1.° connoître très-parfaitement la teneur en argent de tous les cuivres, de laquelle on doit s'être assuré par des essais les plus exacts; 2.° savoir le poids de chaque espèce de cuivre, afin que connoissant ce qu'un quintal doit rendre, on puisse juger de la quantité totale de l'argent contenu dans la masse entière de chaque espèce de cuivre; 3.° enfin, il est essentiel de connoître le poids total de tous ces cuivres pris ensemble, & celui de tout l'argent qui y est contenu, pour pouvoir déterminer par une règle de proportion, ce que la masse entière de tous ces cuivres doit rendre d'argent par quintal.

C'est d'après toutes ces connoissances qu'on doit partir pour faire les mélanges de la manière la plus convenable, relativement aux différentes teneurs des cuivres en argent; c'est aussi par-là qu'on verra si ces cuivres sont en général d'une teneur convenable pour passer au rafraîchissement riche, ou s'il n'y en a qu'une partie qui en soit susceptible, ou enfin, si leur totalité ne peut être traitée que par rafraîchissement pauvre.

Afin de donner le plus de lumières poſſibles ſur une matière auſſi importante, on va tracer un petit tableau par colonnes, contenant des cuivres noirs, leur poids, leur teneur en argent par quintal, & la quantité d'argent que la maſſe entière de chaque eſpèce de cuivre recèle.

TABLEAU

DES CUIVRES TENANT ARGENT.

NUMÉROS des Cuivres, ſuivant l'ordre des eſſais.	POIDS des Cuivres.	TENEUR EN ARGENT de chaque quintal de Cuivre, d'après les eſſais.				TOTAL DE L'ARGENT contenu dans chaque eſpèce de Cuivre.			
		Marcs.	*Onces.*	*Gros.*	*Grains.*	*Marcs.*	*Onces.*	*Gros.*	*Grains.*
N.os 1.	3000.	2.	4.	2.	36.	76.	1.	3.	//
2.	2764.	//	4.	5.	18.	16.	//	5.	42 ½.
3.	6218.	//	5.	3.	54.	42.	4.	0.	26 ½.
4.	5601.	//	6.	2.	//	43.	6.	//	36.
5.	5567.	//	3.	7.	18.	27.	1.	4.	49 ½.
6.	1535.	//	3.	1.	//	5.	7.	7.	54.
7.	1544.	//	4.	5.	36.	9.	0.	3.	//
8.	1939.	//	7.	6.	36.	18.	7.	3.	63.
9.	1826.	//	10.	1.	18.	23.	1.	3.	45.
10.	1593.	//	10.	7.	36.	21.	6.	1.	63.
11.	1541.	//	9.	3.	//	18.	0.	3.	54.
12.	1693.	//	5.	0.	45.	10.	5.	7.	56 ½.
13.	1623.	//	5.	1.	45.	10.	4.	3.	41 ⅓.
14.	3052.	//	5.	5.	22 ½.	21.	2.	7.	2.
15.	1409.	//	5.	4.	38.	9.	6.	3.	28.
	40905.					355.	1.	3.	57 ⅓.

Ce tableau fait voir; 1.° qu'il y a quinze espèces de cuivre dont les teneurs en argent sont différentes; 2.° que tous ces cuivres pèsent ensemble 40,905 livres; 3.° que leur totalité doit contenir en argent 355 marcs 1 once 3 gros 57 grains $\frac{1}{3}$, ce dont on doit s'être assuré par des essais faits doubles de chaque cuivre en particulier. Si maintenant on dit: si 40,905 livres de cuivre tiennent 355 marcs 1 once 3 gros 57 grains, combien doivent tenir 100 livres de ces mêmes cuivres? on trouvera 6 onces 7 gros 41 grains $\frac{1}{2}$ pour la teneur moyenne de tous ces cuivres.

Ces éclaircissemens vont servir de base à la composition des mélanges & à leur préparation pour la fonte du rafraîchissement.

On se rappellera que j'ai dit que tout cuivre qui recèle 12 onces d'argent par quintal, a la teneur convenable pour être traité dans un rafraîchissement riche; celle de tous les cuivres portés au tableau, n'est, comme on vient de le voir, que de 6 onces 7 gros 41 grains $\frac{1}{2}$ par quintal; ce qui mettroit dans le cas de les traiter tous par rafraîchissement pauvre, s'il n'y en avoit pas parmi eux qui eussent une teneur plus forte.

Ce tableau fait voir que le cuivre n.° 1.er passe 20 onces ou 2 marcs $\frac{1}{2}$. Celui-ci seroit donc, d'après ce qui est dit, section VI.e, dans le cas de passer deux fois aux opérations de la liquation, afin d'en pouvoir obtenir tout l'argent; mais comme il s'en trouve de plus pauvres également portés au tableau, on doit en faire entrer avec le premier les quantités convenables, pour que le tout résultant de ces parties, contienne environ douze onces d'argent par quintal; ce qui formera un rafraîchissement riche.

On a vu, dans la VII.e section, qu'au travail riche, chaque pièce de liquation ne doit être composée, dans les petits ateliers, que de 50 livres de cuivre & de 182 livres de plomb; ce qui fait 232 livres pour le poids des pièces de liquation. Cela posé, il s'agit de trouver dans le tableau ceux des cuivres qui auront la teneur requise, c'est-à-dire,

àpeu-près 12 onces par quintal, & 6 onces pour les 50 livres de cuivre qui entreront dans chaque pièce. L'on en va donner un exemple dans la composition du mélange qui suit :

PREMIER MÉLANGE

Pour une pièce de liquation dans le cas du rafraîchissement riche.

		Onces.	Gros.	Grains.
15	livres de cuivre du N.° 1.er, contenant 20 onces 2 gros 36 grains par quintal, les 15 l. donneront, ci	3.	"	27.
10	livres de cuivre N.° 4, dont la teneur par quintal est de 6 onces 2 gros, pour les 10 livres, ci..	"	5.	"
10	*Idem*, N.° 8, tenant 7 onces 6 gros 36 grains, ci pour les dix livres,	"	6.	18.
10	livres du N.° 9, à 10 onces 1 gros 18 grains, font, ci..........	1.	0.	9.
5	livres du N.° 10, à 10 onces 7 gros 36 grains, font............	"	4.	27.
182	livres de plomb de litharge, dont la teneur en argent ne doit pas être comptée................			
232	livres, dont 50 livres de cuivre contenant...............	6.	"	9.

REMARQUES.

Ce mélange fait voir que les 50 livres de cuivre qui entrent dans la composition de chaque pièce, tiennent

6 onces 9 grains d'argent, ou 12 onces 18 grains par quintal. On auroit bien trouvé par le calcul, la quantité qu'il eût été néceſſaire de prendre de chaque eſpèce de cuivre pour n'avoir que 6 onces d'argent au lieu de 6 onces 9 grains; mais outre que cette précihon n'eſt pas abſolument néceſſaire & qu'on peut même négliger les grains, cela occaſionneroit de l'embarras dans les peſées des cuivres, une perte de temps & ſouvent des erreurs.

Deux conſidérations obligent de réduire ces cuivres noirs en petits morceaux gros comme des noix ou environ. Premièrement, il ne ſeroit pas poſſible ſans cela d'en faire des peſées auſſi petites que celles que les mélanges exigent. Secondement, ces petits morceaux préſentent enſemble infiniment plus de ſurface que s'ils étoient en une ſeule maſſe ; ce qui fait qu'étant jetés dans le fourneau, la chaleur les pénètre & les fait entrer beaucoup plus vîte en fuſion que des morceaux volumineux qui ne ſe fondroient qu'imparfaitement & très-long-temps après que le plomb ſeroit déjà rendu dans le baſſin de l'avant-foyer : inconvénient qu'il faut éviter, parce qu'alors il ſe trouveroit des pièces de liquation qui contiendroient plus de cuivre que les autres, & par conſéquent plus d'argent, dont le plomb laiſſeroit une forte partie dans le cuivre après l'opération de la liquation ; & au contraire les pièces qui contiendroient plus de 182 liv. de plomb & moins de 50 livres de cuivre, ſeroient pauvres en argent, & le plomb très-difficile à liquéfier, ſans en même temps faire couler avec lui une bonne partie du cuivre.

Dans ſon traité des fontes, Schlutter a donné une machine à caſſer le cuivre; elle eſt repréſentée ſur la planche 48. Elle n'eſt utile que dans le cas où l'on a des cuivres en lingots ou gros plateaux, que l'on fait rougir pour les rendre plus faciles à caſſer. On peut ſe paſſer de machine pour cet objet, en caſſant les gâteaux de cuivre noir à meſure qu'on les lève du baſſin de réception ; & tandis qu'ils ſont rouges, on parvient aiſément à les briſer à coup de maſſe. Tous les petits morceaux qui en ſont le

réſultat

résultat se mettent en magasin, de manière qu'on forme un tas de toute une fonte de mattes grillées réduites en cuivre noir, sur lequel on place une planche portant le numéro de la fonte. Si c'est la première, on mettra *n.° 1.er*, & ainsi des autres. Ce sont ces cuivres qu'on prend pour en faire le rafraîchissement ; mais pour en bien connoître la teneur en argent, il convient d'en prendre à deux différentes fois dans le bassin de réception, savoir ; après avoir levé la première plaque de cuivre, & lorsqu'il y en a environ la moitié de levée : environ deux gros à chaque fois suffisent; on verse ce cuivre dans une petite lingotière ou dans un creuset; ces petits boutons résultant de toutes les coulées d'une fonte, sont fondus ensemble dans un creuset & jetés en lingot; on en coupe pour faire un essai double. On en fait autant pour toutes les fontes. Ces essais étant faits, l'on écrit sur la petite planche, au-dessous du n.°, la teneur en argent du cuivre du tas où elle se trouve ; ceci est aisé à faire, & rend plus facile le choix des différens cuivres pour en faire les mélanges.

Si le cuivre étoit en lingot, on en couperoit deux petits boutons, l'un au-dessus & l'autre au-dessous de chaque lingot, & on fondroit tous ces petits boutons en une seule masse dont on feroit l'essai.

Je n'ai fait entrer dans le mélange ci-dessus que du plomb sous sa forme métallique, parce que, lorsqu'on fait un premier rafraîchissement, on peut n'avoir que cette matière à ajouter; mais lorsqu'on aura passé à la coupelle le plomb qui proviendra de la liquation des pièces du premier rafraîchissement, on emploîra avec avantage des litharges dans les rafraîchissemens suivans ; & comme elles ne rendent pas à beaucoup près leur poids en plomb, il faut, pour obtenir les 182 livres de ce métal, en employer une quantité suffisante pour, après leur révivification, faire la quantité de plomb requise à chaque pièce.

Schlutter, *page 523*, dit : « qu'il faut 35 livres de » litharge pour tenir lieu d'un quart de quintal de plomb,

» & 40 livres de test pour la même quantité ; » d'où il s'ensuivroit que les litharges ne rendroient que 71 liv. $\frac{[illegible]}{7}$ de plomb, & le test 62 liv. $\frac{1}{2}$. Il y a certainement erreur, car les litharges doivent donner plus de plomb. Quant au test, c'est à peu-près sa teneur. Ce même auteur dit ailleurs que le quintal de plomb est de 116 liv. ; c'est sans doute d'après cela qu'il a établi son calcul ci-dessus ; en ce cas, 35 liv. de litharge devroient rendre 29 liv. de plomb, qui sont le quart du quintal de 116 liv. : & en suivant la même proportion, 100 liv. de ces litharges devroient rendre 82 liv. $\frac{6}{7}$ de plomb, ce qui, selon moi, est un peu trop pour la fonte dont il s'agit. Je ne compte régulièrement que sur 80 liv., non-seulement à cause du plomb qui se trouve vitrifié dans la fonte du rafraîchissement, mais aussi par l'augmentation du poids que le plomb éprouve, en passant de son état métallique à celui de chaux ou de litharge : augmentation connue par tous les chimistes.

Suivant Schlutter, 160 liv. de test devroient rendre 116 liv. de plomb, ce qui fait que, selon lui, 100 liv. doivent rendre 72 liv. $\frac{1}{2}$ de plomb ; mais ce résultat ne peut pas avoir lieu, non-seulement à cause du poids des cendres, mais aussi par rapport à l'augmentation du poids du plomb qui se trouve partie réduit en chaux, & partie vitrifié dans ses cendres. Je ne compte communément que sur 60 liv. de plomb par 100 liv. de test, ce qui fait 20 liv. de moins que la litharge, à cause des cendres contenues dans le test.

Il résulte de ceci que la litharge perd dans la fonte du rafraîchissement 20 par 100, & le test 40, au moyen de quoi, lorsqu'on n'ajoutera que de la litharge dans un rafraîchissement riche, il en faudra à chaque pièce 227 liv. $\frac{1}{2}$ pour obtenir les 182 liv. de plomb ; & si on n'y employoit que du test, ce que je ne conseille pas, par les raisons que je déduirai ailleurs, il en faudroit 303 liv. $\frac{1}{3}$ pour obtenir la même quantité de plomb.

D'après ces éclaircissemens, il sera aisé de faire les

mélanges en ne se servant que de litharges, qui seront pour le moins, un aussi bon effet que le plomb. Nous allons donner un mélange de cette espèce, en y faisant entrer les cuivres des mêmes numéros du premier.

SECOND MÉLANGE,

AVEC DE LA LITHARGE,

POUR UN RAFRAICHISSEMENT RICHE.

		Onces.	*Gros.*	*Grains.*
15	livres cuivre N.° 1.er, contenant 20 onces 2 gros 36 grains par quintal, les 15 livres rendront.	3.	//	27.
10	livres, *idem*, N.° 4, à 6 onces 2 gros par quintal, ci.........	//	5.	//
10	livres du N.° 8, à 7 onces 6 gros 36 grains, ci.............	//	6	18.
10	livres du N.° 9, à 10 onces 1 gros 18 grains, ci.............	1	0.	9.
5	livres du N.° 10, à 10 onces 7 gros 36 grains, font............	//	4.	27.
182	livres de plomb ou 227 livres ½ de litharge pour en tenir lieu.			
232	livres, poids de la pièce, argent y contenu.................	6.	//	9.

REMARQUES.

LE mélange précédent présente les mêmes résultats que le premier, quoiqu'on y fasse entrer toutes litharges au lieu de plomb; car on compte ici pour rien l'argent que ces

litharges peuvent contenir, qui communément eſt depuis un gros juſqu'à un gros $\frac{1}{2}$ par quintal du plomb qui en provient. Si on comptoit cet argent, il ſe trouveroit en moins, après l'affinage du plomb provenant de la liquation, puiſqu'il en reſte encore autant dans les nouvelles litharges qui réſulteroient de ce plomb, quoique l'affinage en ſoit bien fait.

Les deux mélanges ci-deſſus ſont dans le cas des rafraîchiſſemens riches; celui qui va ſuivre eſt pour un rafraîchiſſement pauvre. On a dit que les cuivres dont la teneur en argent n'eſt que d'environ 6 onces par quintal, doivent paſſer au rafraîchiſſement pauvre, ſur-tout lorſqu'on n'en a pas d'autres plus riches à y mêler.

TROISIÈME MÉLANGE,

Pour un rafraîchiſſement pauvre.

		Onces.	*Gros.*	*Grains.*
25	livres de cuivre du N.° 4, dont la teneur eſt de 6 onces 2 gros pour les 25 livres, ci...........	1.	4.	36.
25	livres du cuivre N.° 14, qui tient par quintal 5 onces 5 gros 22 grains $\frac{1}{2}$. Ces 25 livres doivent rendre.................	1.	3.	23.
166	livres de plomb, ou pour en tenir lieu, 207 livres & demie de litharge.			
216	livres poids de la pièce, argent y contenu.................	2.	7.	59.

Remarques.

Ce mélange fait voir, 1.° qu'on y a employé 16 livres

de plomb de moins que dans ceux destinés aux rafraîchissemens riches; 2.° que l'argent qui doit exister dans les 50 liv. de cuivre, n'est que de 2 onces 7 gros 59 grains, ce qui n'est pas la moitié de celui contenu dans les 50 liv. de cuivre des mélanges précédens; c'est ce qui fait qu'on peut sans inconvénient supprimer une partie du plomb dans cette circonstance, comme on s'en convaincra en comparant ce mélange avec les précédens.

J'ai déjà dit que je ne conseillois pas d'ajouter de test dans les mélanges d'un rafraîchissement riche; mais si on manquoit de plomb d'addition & de litharge, on pourroit dans celui-ci ajouter un tiers & même la moitié de test, & le surplus en plomb & litharge, ayant égard à ce qui est dit relativement à la teneur du test en plomb.

Le test, en raison des cendres, est plus difficile à fondre que la litharge, mais cela ne fait rien dans la fonte dont il s'agit, puisqu'il entre bien en fusion au degré de chaleur nécessaire à fondre le cuivre. Les motifs qui m'ont porté à ne pas conseiller d'en ajouter dans les rafraîchissemens riches, sont, 1.° parce que ce test provenant de l'affinage du plomb liquéfié ou séparé du cuivre par la liquation, contient toujours un peu de ce dernier métal qui se retrouve dans le rafraîchissement, & qui augmente celui qu'on y ajoute; 2.° parce que le test fournit naturellement des scories qui peuvent embarrasser ou obstruer le fourneau, & qui, même en se rendant avec les matières fondues dans le bassin de l'avant-foyer, couvrent la surface des métaux en bain, d'où l'on est contraint de les enlever avant même qu'elles soient figées, notamment lorsque le bassin est plein & qu'il s'agit de faire tout de suite couler la matière dans la poêle. On ne peut pas enlever ces crasses, sur-tout dans leur état de fluidité, sans en même-temps enlever du cuivre, du plomb, & par conséquent de l'argent. Ces inconvéniens sont moins à craindre dans les rafraîchissemens pauvres que dans les riches,

Nous n'avons jusqu'ici employé dans ces mélanges que des litharges ou des plombs revivifiés des litharges, dont on regarde la teneur en argent comme nulle. Mais souvent il arrive qu'on a des plombs marchands qui contiennent de l'argent, tels que sont ceux qui ayant déjà passé une fois au rafraîchissement pauvre, s'y sont chargés de l'argent du cuivre, & qui peuvent encore absorber celui des cuivres où il s'en trouve peu. Le mélange suivant va servir d'exemple dans cette circonstance.

QUATRIÈME MÉLANGE

Avec des plombs tenant argent pour un rafraîchissement riche.

		Onces.	*Gros.*	*Grains.*
50	livres de cuivre N.° 7, qui contient par quintal 4 onces 5 gros 36 grains, ce qui fait pour les 50 livres, ci	2.	2.	54.
182	livres de plomb, contenant 2 onces d'argent par quintal	3.	5.	8.
232	livres de plomb & cuivre, argent, ci .	5.	7.	62.

REMARQUES.

Ce mélange fait voir : 1.° que si l'on a des cuivres qui ne contiennent en argent que 4 onces 5 gros 36 grains par quintal, & du plomb dont la teneur en argent soit de 2 onces aussi par quintal, on pourra en faire un rafraîchissement riche.

2.° Que si le plomb, au lieu de 2 onces, tenoit 4 onces d'argent, on ne pourroit se dispenser d'en passer une partie à la coupelle pour en extraire l'argent, avant de pouvoir faire les mélanges, sans quoi les pièces de liquation qui en résulteroient se trouveroient contenir beaucoup plus

de 6 onces d'argent; d'où il arriveroit que le cuivre en retiendroit une partie qui feroit en pure perte, ou bien il faudroit le repaffer une feconde fois par toutes les opérations de la liquation; ce qui occafionneroit des frais inutiles & du déchet fur les matières.

Si le cuivre ne contenoit, comme ci-deffus, que 4 onces 5 gros 36 grains par quintal, il eft aifé de voir qu'en ce cas on devroit conferver la moitié du plomb en nature, & extraire les 4 onces d'argent par quintal de l'autre moitié, en le réduifant en litharge par la coupellation; alors on feroit dans le cas de faire les mélanges de la manière la plus avantageufe, en y faifant entrer moitié du plomb en œuvre & moitié en litharge : le mélange fuivant fervira d'exemple.

CINQUIÈME MÉLANGE,

Pour un rafraîchiffement riche, avec du plomb tenant argent & des litharges.

		Onces.	Gros.	Grains.
50	livres cuivre N.° 7, à 4 onces 5 gros 36 grains, les 50 livres doivent rendre, ci.........	2.	2.	54.
91	livres de plomb, à 4 onces d'argent par quintal, doivent contenir...	3.	5.	8.
91	livres de plomb de litharge; mais comme il eft inutile de préalablement revivifier ces litharges, on en ajoutera 113 livres $\frac{6}{10}$, qui doivent rendre les 91 livres de plomb.			
232	livres poids de la pièce, argent, ci	5.	7.	62.

REMARQUES.

Le dernier mélange donne les mêmes résultats que les précédens.

Ceux qui auroient beaucoup de cuivre à soumettre à la liquation, pourroient sans inconvénient en former des pièces de liquation plus fortes que celles dont je viens de donner les mélanges. En ce cas, je conseillerois de les faire du poids de 350 livres, & il faudroit, pour suivre les proportions indiquées, employer pour chaque pièce 75 livres de cuivre & 275 livres de plomb, ou suffisamment de litharge pour tenir lieu de ce dernier métal. Je vais donner un mélange dans cette circonstance.

SIXIÈME ET DERNIER MÉLANGE

Dans le cas d'un rafraîchissement riche, pour une pièce du poids de 350 livres.

		Onces.	Gros.	Grains.
25	livres cuivre N.° 1, dont la teneur est de 20 onces 2 gros 36 grains par quintal, ci pour les 25 livres	5.	//	45.
25	livres, *idem*, N.° 4, à 6 onces 2 gros, font.	1.	4.	36.
25	livres cuivre N.° 11, à 9 onces 3 gros, pour les 25 livres, ci. .	2.	2.	54.
275	livres de plomb, ou $343\frac{3}{4}$ de litharge pour tenir lieu de ce plomb, ce qui se trouve facilement en prenant le quart des 275 livres de plomb qu'on ajoute avec lui.			
350	livres poids de la pièce, argent, ci. .	8.	7.	63.

REMARQUES.

REMARQUES.

On obſervera qu'il ne manque que 9 grains de fin dans ce mélange pour faire 9 onces, qui eſt la teneur requiſe pour un mélange de rafraîchiſſement riche; car quoique dans les mélanges précédens il n'y ait que 6 onces d'argent & qu'il s'en trouve 9 dans celui-ci, cela vient de ce qu'il y a un tiers de cuivre de plus; & ſi on fait attention aux données, on verra que les trois eſpèces de cuivre qu'on a priſes pour le mélange, tiennent une quantité moyenne de 11 onces 7 gros 60 grains d'argent par quintal; d'où il ſuit que les 75 livres de cuivre qui entrent dans la compoſition de ce mélange, doivent contenir les 8 onces 7 gros 63 grains de fin portés à la dernière colonne du mélange.

Il eſt inutile de donner l'exemple d'un rafraîchiſſement pauvre dans les cas où l'on ſe porteroit à faire de grandes pièces de liquation. Il ſuffira de répéter que la quantité de cuivre doit être la même, c'eſt-à-dire, de 75 liv., & celle du plomb diminuée de 25 liv., c'eſt-à-dire, qu'au lieu de 275 liv. de plomb, il ne doit y en entrer que 250 liv.

Je crois avoir ſuffiſamment établi la manière de faire les mélanges pour la compoſition des pièces de liquation dans tous les cas qui pourroient ſe préſenter; mais on prévient qu'il faut de l'attention & beaucoup d'ordre pour opérer avec ſuccès.

Je terminerai le détail ſur le rafraîchiſſement du cuivre, par quelques réflexions ſur la teneur du plomb qui doit provenir de la liquation des pièces, tant du rafraîchiſſement riche que du pauvre, & enfin ſur ce qui peut reſter d'argent dans le cuivre, quoique les procédés ſoient bien exécutés.

Si l'on fait attention que dans une petite pièce d'un rafraîchiſſement riche, par exemple, celle du premier mélange, il entre 182 livres de plomb, & que ce plomb

eſt cenſé abſorber & entraîner avec lui, dans l'opération de la liquation, les 6 onces 9 grains d'argent contenus dans le cuivre, il ſera aiſé de s'apercevoir que l'œuvre ſe ſera enrichi de 3 onces 2 gros 31 grains $\frac{2}{7}$ par quintal, ce qui ſe trouvera en diſant: ſi 182 liv. de plomb tiennent 6 onces 9 grains, combien doivent tenir 100 liv., &c.? Le plomb provenant d'un raſraîchiſſement pauvre, ne peut pas avoir la même teneur: nous prendrons pour exemple le troiſième mélange où l'on n'a employé que 166 liv. de plomb, qui doivent ſe charger des 2 onces 7 gros 59 grains d'argent contenus dans le cuivre.

Pour trouver la teneur que ce plomb doit avoir après être liquéfié, on dira: ſi 166 liv. de plomb récèlent 2 onces 7 gros 59 grains d'argent, combien 100 liv. de ce plomb doivent-elles contenir? On aura 1 once 6 gros 25 grains.

On voit maintenant que ce plomb eſt trop pauvre pour être paſſé à la coupelle avec avantage; c'eſt pourquoi on le repaſſe avec des cuivres pauvres en argent, ainſi que nous l'avons dit.

Quoique les opérations de la liquation ſoient faites avec la plus grande exactitude, il reſte toujours un peu d'argent dans le cuivre; car, quoique ce métal précieux n'ait pas autant d'affinité avec le cuivre qu'avec le plomb, il en a aſſez pour en retenir, & quand il n'en reſtera qu'environ 4 gros par quintal de cuivre, on pourra être aſſuré que les procédés auront été bien exécutés.

D'après ce raiſonnement, on ſeroit porté à croire que le plomb provenant de la liquation des pièces, ne devroit pas tenir la quantité d'argent par quintal que les calculs précédens indiquent; mais on verra que ces plombs doivent rendre par quintal les quantités d'argent qui y ſont portées, ſi l'on ſait attention, 1.° qu'en faiſant liquéfier le plomb contenu dans les pièces, il en ſort d'abord avec beaucoup plus d'abondance que vers la fin de l'opération; 2.° que celui qui part le premier, eſt plus riche en argent que le dernier; 3.° enfin, que le plomb qui reſte dans les pièces

après leur liquation, & que l'on en retire par le ressuage, ne tient que très-peu d'argent. Il ne seroit pas même étonnant que la teneur en argent des plombs fût plus forte, ce qui, d'une part, peut provenir du plomb pauvre en argent qui reste dans le cuivre, & de l'autre, du plomb qui perd son phlogistique, tant dans la voie du fourneau de liquation que dans le bassin même, ce qui rend plus riche l'œuvre que l'on en obtient sous sa forme métallique.

Il y a des Allemands qui comptent 16 livres de plomb par chaque lot ou demi-once d'argent existant dans le cuivre; mais cela n'est pas applicable à tous les cas. Par exemple, du cuivre qui tient par quintal 24 lots ou 12 onces, les $\frac{3}{4}$ de quintal ou 75 livres réelles qui entrent dans une grande pièce, contiendroient 18 lots; or, seize fois 18 livres de plomb feroient 288 liv., tandis que 275 liv. suffisent pour retirer tout l'argent de ce cuivre.

Si le cuivre ne tenoit que 9 lots par quintal, il n'y auroit que 6 lots dans une pièce, & six fois 16 liv. de plomb ne feroient que 96 liv., ce qui seroit de beaucoup trop peu: pour bien faire la liquation, il vaut mieux s'en tenir aux proportions indiquées par les mélanges que j'ai donnés.

Les grands détails dans lesquels je suis entré relativement aux rafraîchissemens du cuivre tenant argent avec le plomb, rendront beaucoup plus intelligibles les opérations qui vont suivre. Comme celle qui succède immédiatement après le rafraîchissement est la liquation, je vais en traiter dans le chapitre suivant.

CHAPITRE II.

De la liquation.

LA liquation est le procédé par lequel on extrait du cuivre le plomb qui se charge de l'argent contenu dans ce premier métal.

Quoique cette opération paroisse fort simple, elle exige néanmoins beaucoup d'attention de la part du fondeur, soit pour gouverner le feu de manière que toutes les pièces de liquation reçoivent en même temps une chaleur égale, soit pour empêcher que le cuivre se fonde avec le plomb.

J'ai représenté sur la *planche II* le fourneau servant à cette fonte, dans lequel on met, à chaque opération, six pièces ou pains de liquation; il est exécuté à la fonderie de Grünthal en Saxe.

Schlutter en donne un à peu-près semblable sur la planche 48 de son traité des fontes. Comme il trouva alors quelques inconvéniens dans la forme de ces fourneaux, sur-tout par rapport à la consommation du charbon, il en fit construire un à réverbère qui chauffoit avec le bois. Il en donna le dessin, *planche XLIX;* mais celui-ci est aussi sujet à beaucoup d'inconvéniens, que j'expliquerai dans le *chapitre IV*, où je donnerai le détail du double procédé de la liquation & du ressuage qu'on peut faire dans un seul fourneau; mais il s'agit maintenant de décrire celui de la liquation qui s'opère, dans le petit fourneau ordinaire.

PREMIÈRE SECTION.

Préparation du fourneau.

LORSQU'ON est dans le cas de faire la liquation, on enduit les plaques de fer fondu qui forment l'aire du foyer, avec de l'argile délayée dans l'eau. Il est même bon de jeter un peu de poussière de charbon de bois sur cet enduit encore tout frais, afin qu'elle s'y rende adhérente. Cet enduit conserve les plaques de fer.

On arrange ensuite six pièces de liquation sur les plaques de fer. *(Voyez la planche II & son explication)*, en observant que ces pièces soient à des distances égales les unes des autres; ce qui peut se faire très-facilement, en plaçant chaque pièce vis-à-vis des petits murs de séparation des soupiraux.

Comme ces pièces sont difficiles à remuer & à porter sur le fourneau, on a une grande tenaille suspendue à une chaîne, au moyen de laquelle les deux hommes qui conduisent cette opération, placent successivement les six pièces dans les endroits qu'elles doivent occuper. Afin de tenir ces pièces dans une position verticale, & d'empêcher qu'elles ne s'appuient les unes contre les autres, on doit mettre entr'elles des petits bouts de bûches.

Les six pièces étant bien rangées, on ferme le devant du fourneau avec sa porte de fer lutée, & on remplit le fourneau de charbon, de manière que l'entre-deux des pièces & tous les autres espaces en soient exactement garnis jusqu'à la hauteur des murs du fourneau.

Comme il peut arriver que quelques gros charbons se mettent de travers entre les pièces, & qu'ils empêchent les autres de se bien ranger, ce qui occasionneroit des vides préjudiciables à l'opération, je conseille de remplir exactement les entre-deux des pièces avant de placer la porte ou parois antérieure, & ensuite de finir de remplir le fourneau avec du charbon. On met un peu de charbon dans la voie ou canal où le plomb doit couler; on en remplit aussi le bassin de réception.

DEUXIÈME SECTION.

Fonte dite de liquation.

Comme il est indispensable de chauffer le bassin de réception avant que le plomb s'y rende, on commence par mettre le feu aux charbons dont ce bassin est rempli, ensuite on allume ceux de la voie; enfin, on met des charbons allumés sur ceux contenus dans le fourneau, en observant d'en répandre sur toute sa longueur, afin que le feu ne gagne pas plus vîte dans une partie que dans l'autre. Ces charbons s'allument successivement de haut en bas, & bientôt le plomb commence à couler dans la voie, d'où il se rend dans le bassin de réception, à cause de la pente

donnée au sol de cette voie. On puise ce plomb du bassin avec une cuiller de fer enduite d'un peu de lut & chauffée, & on le verse dans des lingotières également chauffées.

Si on s'aperçoit, lorsque les charbons sont diminués dans le fourneau, que la chaleur ne soit pas assez forte dans certains endroits, & que les pièces ne s'affaissent pas également, on doit y en ajouter d'autres; mais si au contraire la chaleur étoit trop forte, & capable de faire couler du cuivre avec le plomb, ce qu'on reconnoît par des petites parties de cuivre qui se détachent des pièces de liquation & qui tombent dans la voie, alors on bouche tous les soupiraux, & on met une ou deux bûches de bois vert dans la voie, dont la flamme & la fumée, chargées d'humidité, ralentissent la chaleur & empêchent la fusion du cuivre.

Dans des cuivres impurs ou chargés d'arsenic, de fer & d'autres matières étrangères, il coule ordinairement avec le plomb une portion de ces substances qui, avec une petite portion du plomb qui se vitrifie ou se calcine, & un peu de cuivre, forment des scories pâteuses & non coulantes, & qui, par conséquent, s'arrêtent dans la voie & empêchent l'œuvre de se rendre dans le bassin de réception; pour lors le fondeur, avec un crochet de fer, attire en devant du fourneau toutes les scories, que nous nommerons déchets de liquation; il les met ensuite à part pour être fondues ainsi que nous le dirons *chapitre VII.*

Lorsque les pièces sont bien affaissées & qu'il n'en dégoutte plus de plomb, on ôte la porte de fer & on retire les pièces de dessus les plaques de fer; on les met en magasin, pour être portées au fourneau de ressuage lorsqu'on en a une quantité suffisante.

Il est bon de prévenir qu'on ne doit tirer du fourneau les pièces liquéfiées, que lorsqu'elles sont un peu refroidies. Elles se briseroient, ce qu'il faut éviter, car pour lors on ne pourroit plus les arranger convenablement dans le fourneau du ressuage; il ne faut y toucher, &

même avec précaution, que lorſqu'elles ont acquis la couleur rembrunie ou d'un rouge foncé.

Toutes les fois qu'on porte le plomb du baſſin de réception dans les lingotières, on doit avoir attention d'en prendre un peu que l'on verſera dans un petit creuſet ou teſt, & de tous les petits boutons pris de la liquation des ſix pièces, on en ſera un ſeul dont on prendra la quantité accoutumée pour en faire l'eſſai, afin de s'aſſurer ſi ce plomb a la teneur requiſe.

Comme on ne peut pas toujours faire cet eſſai ſur-le-champ, on doit numéroter le petit lingot de plomb réſultant de tous les petits boutons dont il a été queſtion, de manière que celui qui proviendra des ſix premières pièces ſoit marqué par 1, ainſi des autres.

Tous les culots ou lingots de plomb provenant de la liquation de chaque fournée de ſix pièces, ſeront auſſi dépoſés ſéparément de ceux qui proviendront des autres fournées, & chaque tas de lingots portera le numéro donné au petit lingot d'eſſai qui en eſt provenu.

En obſervant cet ordre, on ſera dans le cas de ſavoir par les eſſais, ce que ces différens plombs doivent rendre en argent dans l'affinage en grand.

On ne doit pas s'attendre, dans l'opération de la liquation, de retirer tout le plomb, ni même au reſſuage, parce que, ainſi que je l'ai déjà dit, il s'en calcine, & qu'il en reſte un peu dans le cuivre juſqu'après l'opération du raffinage de ce métal.

Suivant ce qui a été dit en traitant des mélanges, en ſuppoſant que tout le plomb de ſix petites pièces de liquation ſortît, on en obtiendroit 1092 livres ſi ces pièces venoient d'un rafraîchiſſement riche, & ſeulement 996 livres de ſix pièces d'un rafraîchiſſement pauvre. Mais ſi, dans le premier cas, elles rendent 950 à 960 livres de plomb, dont la teneur en argent ſoit de 3 onces 3 à 4 gros par quintal, & que l'on obtienne dans le ſecond environ 860 liv. d'œuvre, tenant environ 2 onces par

quintal, on pourra être assuré que la liquation aura été bien faite.

L'opération de la liquation de six pièces, doit être terminée dans l'espace d'environ quatre heures, ce qui fait qu'en un poste de douze heures on peut en liquéfier 18 ou trois fournées de suite, avec environ 80 à 90 pieds cubes de charbon, ou 12 à 13 quintaux & quelques bûches.

CHAPITRE III.

Du ressuage.

LE ressuage est une opération par laquelle on extrait, autant qu'il est possible, du plomb qui est resté dans les pièces de liquation, après qu'elles ont été liquéfiées, comme il est dit au *chapitre précédent.* Ces pièces, passées au ressuage, ne doivent contenir que très-peu de plomb, celui qui y reste après la liquation se vitrifiant pour la majeure partie dans le procédé que nous allons décrire.

PREMIÈRE SECTION.

LORSQU'ON a assez de pièces de cuivre dont on a retiré, par la liquation, autant qu'il a été possible de plomb enrichi d'argent, on fera le ressuage de ces pièces dans le fourneau de la *planche III:* environ 150 pièces le rempliront; on les y arrangera de la manière suivante.

On commencera par poser dans le fond du fourneau les pièces verticalement sur les murs de séparation des voies, de manière qu'elles portent alternativement sur deux de ces murs qui sont au nombre de quatre, au moyen de quoi on pourra placer trois pièces dans le premier rang; on en mettra deux autres sur les trois premières, & trois se placeront sur les deux dernières, ainsi alternativement jusques à la voûte du fourneau.

Lorsque cette première rangée de pièces est finie, on en fait une semblable à quelques pouces seulement de distance de la première, qui ne doit pas non plus porter contre le

mur

mur du fond du fourneau, ce qui empêcheroit la flamme d'y passer librement.

On continue ainsi à remplir le fourneau jusqu'à sa partie antérieure, en observant toujours que les espaces vides soient les plus égaux qu'il est possible afin que la flamme puisse passer, & que la chaleur se répande uniformément par-tout.

Pour faciliter l'arrangement de ces pièces, on se sert de petites baguettes de fer d'environ un pied de longueur, fourchues à l'un des bouts. Celui-ci s'appuie sur les murs de séparation, & l'autre bout contre les pièces; ce qui les tient dans une position verticale, tandis que l'on arrange celle du dessus : ces petites baguettes servent successivement à toutes les rangées des pièces.

Lorsque le fourneau est rempli de pièces de cuivre, on fait descendre la porte de fer sur l'extrémité des plaques de fer fondu, qui pour cet effet excèdent ou sortent en dehors du fourneau, ce qui s'exécute avec facilité au moyen d'une chaîne qui passe sur une poulie, & qui répond à un petit treuil ou cabestan. La porte étant mise en place, on la lute tout autour avec de l'argille, afin qu'il n'y passe ni flamme ni fumée.

DEUXIÈME SECTION.

Le fourneau disposé comme on vient de le dire dans la première section, on place dans les trois voies environ un quintal de charbon; on y met le feu, & en même temps on place deux ou trois bûches dans chaque voie, par dessus le charbon & sur le devant des voies : lorsque ces premières bûches sont brûlées, on y en ajoute d'autres. Quand le fourneau commence à rougir, on augmente le nombre des bûches, c'est-à-dire, on en met trois ou quatre sur le devant des voies, & en même temps on en fait entrer deux ou trois autres dans chaque voie; celles-ci iront jusqu'à la partie postérieure desdites voies. Quand les bouts

des bûches du devant porteroient ſur l'extrémité de celles qui ſont les plus avancées, elles n'en brûleroient que mieux, & elles donneroient plus de chaleur. On laiſſe brûler entièrement le bois avant d'y en mettre d'autre, & on retire les braiſes qu'elles laiſſent avec un rouable de fer.

Après environ quinze heures d'un feu ſuivi, les ſcories commencent à couler ou tomber dans les voies; alors on ne doit pas négliger, toutes les fois que le bois ſera brûlé, de nettoyer entièrement les voies avec des rouables & des crochet de fer, & d'en faire ſortir, avec les braiſes, les ſcories qu'on met à part. Nous nommerons ces ſcories *déchets du reſſuage;* comme elles ſe mêlent avec les braiſes, on les lave pour les en ſéparer.

Si l'on s'apercevoit que la chaleur fût trop forte & qu'elle fît couler du cuivre, on profiteroit du moment qu'on nettoye les voies pour laiſſer ralentir la chaleur, après quoi l'on remettroit du bois dans les voies; on peut auſſi, en cas de néceſſité, modérer la chaleur en bouchant les ſoupiraux en partie.

Si la chaleur eſt trop foible, ſur-tout vers la fin de l'opération où elle doit être aſſez forte pour bien torréfier le cuivre, on met, dans les voies, du bois refendu en petits morceaux, ce qui augmente le volume de la flamme & la chaleur. Il faut que le bois qu'on emploie dans cette opération ſoit ſec: tous les bois y ſont bons, mais le hêtre & le ſapin ſont préférables.

La durée d'un reſſuage eſt de trente à trente-ſix heures; la conſommation des matières combuſtibles d'environ quatre cordes de bois de 8 pieds de long, de 4 de haut, & les bûches de 3 pieds de longueur, avec un quintal de charbon.

Les matières qui ſortent des pièces liquéfiées, dans l'opération dont nous traitons, ſont compoſées, 1.° de la majeure partie du plomb qui y étoit reſté après la liquation; ce plomb ſe vitriſie preſqu'entièrement au reſſuage; 2.° d'un peu de fer; 3.° d'une portion de cuivre plus ou moins

grande, ſuivant qu'on a bien ou mal opéré, & conduit le degré du feu; 4.° d'un peu d'arſenic.

Les premières ſcories qui tombent dans les voies, reſſemblent aux craſſes ou écumes que l'on retire des plombs impurs au commencement d'un affinage, & ſont de même d'un gris-noirâtre, & ſpongieuſes; mais celles qui viennent après acquièrent inſenſiblement une couleur rouge, de ſorte que celles qui coulent à la fin de l'opération ſont très-rouges & compactes; ce qui annonce la préſence d'une plus grande quantité de cuivre, & qu'il eſt temps de ceſſer l'opération, ſans quoi on s'expoſeroit à faire fondre le cuivre. Celui qui fait partie des ſcories dont on vient de parler, & que nous nommerons *déchets de reſſuage*, eſt, ainſi que le plomb qui y eſt mêlé, dans un état de vitrification, & ces deux métaux ſe brûleroient en partie ſi on n'avoit pas ſoin, ainſi que je l'ai recommandé ci-deſſus, de les tirer des voies toutes les fois qu'on y met du bois.

L'opération du reſſuage étant finie, on nettoye les voies pour la dernière fois, & auſſitôt l'on ôte le lut du tour de la porte qu'on enlève avec le même treuil qui a ſervi à la deſcendre.

Alors les ouvriers, par le moyen de crochets de fer, font tomber ſur l'aire de la fonderie les pièces de cuivre qui doivent être rouges, ſans quoi elles ſeroient adhérentes les unes aux autres, & on parviendroit très-difficilement à les deſſouder. On n'a pas ici à craindre, comme après la liquation, que ces pièces ſe briſent; mais on doit avoir ſoin de ne point endommager les petits murs de ſéparation des voies, & de ne pas laiſſer tomber dans ces voies des pièces qui endommageroient les briques, & qu'il ſeroit même difficile d'en arracher. On pourra éviter cela, en plaçant au milieu de chaque voie, & ſuivant ſa longueur, une ou deux barres de fer ou ringards, & cela à la hauteur des murs de ſéparation. Ces barres porteront d'un bout contre le mur du fond du fourneau, où leurs pointes entreront d'environ un pouce entre deux rangées

de briques ou de pierres; leur autre bout portera ſur une barre de fer miſe en travers au-devant du fourneau ſur les parties ſaillantes des plaques de ſer fondu qui couvrent les murs de ſéparation, & que nous avons omis de dire qu'il faut, pour leur conſervation, enduire d'argile avant que d'y ranger les pièces.

Les premières rangées de pièces qui ſont ſur le devant du fourneau ſont fort aiſées à faire tomber, mais celles du fond exig nt plus de travail. Outre les crochets de fer dont on ſe ſert pour faire tomber ces pièces, un des ouvriers muni d'un fort ciſeau de fer emmanché au bout d'un long bâton, détache les pièces qui ſont adhérentes enſemble; l'autre, avec ſon crochet, les attire à lui à meſure qu'elles ſont deſſoudées & les fait tomber à terre.

Ce travail doit ſe faire promptement, afin de ne pas laiſſer refroidir le cuivre, qu'il ſeroit beaucoup plus difficile d'arracher, ainſi que je l'ai déjà dit; mais comme il eſt extrêmement fatigant, il y faut au moins quatre hommes qui ſe relayent de deux en deux.

A meſure que les pièces tombent du fourneau, un homme les prend avec des tenailles & les jette dans une caiſſe pleine d'eau froide, où, s'il eſt poſſible, on en fait paſſer un petit courant pour l'empècher de s'échauffer. La fraîcheur de cette eau fait gercer, & même écailler les ſcories ou métaux vitrifiés qui, ſous la forme de vernis, couvrent toute la ſurface des pièces. Un moment après on retire ces pièces de l'eau, on les range de côté; lorſqu'elles ſont toutes refroidies de cette manière, des femmes ou des enſans munis de petits marteaux à pointe, frappent tout autour de ces pièces, afin d'en détacher les ſcories, & avec un petit balai fort rude, ils finiſſent par en enlever les ſcories.

Le cuivre ainſi nettoyé eſt mis en magaſin pour être rafiné, ainſi que je le dirai *chapitre VI.*

Quant aux écailles qui proviennent des pièces, on les doit raſſembler avec ſoin & les mettre avec les autres déchets

de ce travail, pour les traiter ainſi qu'il eſt dit *chapitre VII*, Si on laiſſoit ces écailles ſur le cuivre, on ſeroit plus de temps à le rafiner, & il y auroit une partie des métaux qu'elles contiennent de détruits.

REMARQUES.

L'on a vu que les procédés de la liquation & du reſſuage, décrits dans les deux derniers chapitres, exigent des fourneaux aſſez diſpendieux, principalement celui du reſſuage, *planche III*, qui, outre la dépenſe de ſa conſtruction, prend un emplacement aſſez vaſte, qu'il eſt indiſpenſable de mettre à couvert par un bâtiment dont la dépenſe eſt encore plus conſidérable que celle du fourneau. On a auſſi dû remarquer que la conſommation du bois & du charbon dans ces deux procédés ne laiſſe pas d'être conſidérable.

Schlutter, dans ſon traité de la fonte des mines, traduit de l'allemand par M. Hellot, a donné un fourneau de liquation, planche 49, dans lequel il faiſoit liquéfier le plomb de douze pièces avec un feu de fagots & de bûches. Les fagots ſe mettoient dans une chauffe à côté du fourneau, & les bûches dans le fourneau même entre les pièces & au-deſſus, de manière que toute la capacité du fourneau en étoit exactement remplie, ainſi que cet auteur s'en explique *chapitre CXIII;* mais outre que ce fourneau eſt très-diſpendieux dans ſa conſtruction, à cauſe de la grandeur exceſſive qu'on eſt forcé de donner à la cheminée qui doit abſorber les fumées pernicieuſes du plomb, la conſommation du bois eſt conſidérable & ſon arrangement difficile. D'ailleurs les vapeurs, les fumées du bois & la flamme, n'ont d'iſſue qu'autour de la porte quipour cet effet n'eſt point lutée contre le fourneau ; elles doivent fort incommoder les ouvriers. Schlutter avertit des précautions qu'il faut prendre pour que la chaleur ſoit égale dans toutes les parties de ſon fourneau. Il préſente encore un autre inconvénient, c'eſt que, quoique la liquation

ſoit achevée, on eſt obligé de laiſſer entièrement conſommer les charbons réſultant de la grande quantité de bois mis dans le fourneau, avant de pouvoir en ſortir les pièces liquéfiées; ce qui exige au moins une heure de plus. Auſſi l'auteur dit-il qu'il faut ſix heures pour faire la liquation de douze pièces dans ſon fourneau. Je dois faire obſerver ici que Schlutter avoit eu intention de faire de ſuite, après la liquation dans ſon fourneau, l'opération du reſſuage des pièces; mais il convient, *page 541*, qu'il n'y auroit pas de profit à y torréfier les pièces de liquation, parce qu'il s'eſt aperçu que le bois qui remplit le fourneau dans le commencement de l'opération de la liquation, étant une fois conſommé, il faudroit en remplir une ſeconde fois le fourneau pour exécuter celle de la torréfaction, laquelle prendroit autant de temps que la première, & occaſionneroit encore plus d'embarras pour arranger le bois entre les pièces qui ſont encore rouges. Il a pareillement conçu que le ſimple feu de fagots continué dans la chauſſe, ſeroit inſuffiſant pour faire ſeul la torréfaction, qui exige même plus de chaleur que la liquation. Ainſi, on voit que les vues de l'auteur n'ont pas toutes été remplies par ce fourneau, & que pour le ſeul procédé de la liquation, il eſt ſujet à plus d'inconvéniens en général que le petit fourneau que je donne, *planche II*, qui eſt en uſage, & qui coûte beaucoup moins pour ſa conſtruction.

La conſommation du bois qu'exige le reſſuage, les frais de manipulation, le déchet du cuivre & du plomb, toutes ces conſidérations, dis-je, m'ont engagé à chercher les moyens de ſimplifier les procédés de la liquation & du reſſuage, & à les rendre dépendans l'un de l'autre, en les exécutant dans un ſeul & même fourneau de réverbère; c'eſt-à-dire, que tout le plomb chargé d'argent qui peut ſortir des pièces par la liquation étant extrait, on procédera au reſſuage ou torréfaction des mêmes pièces, ſans les déplacer.

Cette double opération pourra auſſi-bien ſe faire avec

le charbon de terre qu'avec le bois, ſur-tout lorſque le premier ſera réduit en cook.

Je n'ai pas la préſomption de croire que mes procédés, que je vais décrire dans le chapitre ſuivant, ainſi que le fourneau que je donne pour leur exécution, ſoient à leur degré de perfection ; je ſuis au contraire perſuadé qu'il eſt poſſible de rendre plus ſimples, & par conſéquent beaucoup moins diſpendieuſes, preſque toutes les opérations de la métallurgie. Il ſeroit à déſirer pour le bien public que les ſavans chimiſtes de nos jours, & notamment ceux de l'Académie, euſſent le temps de s'en occuper, & qu'ils fuſſent à portée de voir des établiſſemens de fonderies, où les minéraux & les métaux ſe traitent en grand.

CHAPITRE IV.

Du double procédé de la Liquation & du Reſſuage.

ON a vu dans les *chapitre II & III* les méthodes en uſage pour opérer les deux eſpèces de fontes nommées *de la liquation* & *du reſſuage*. Je vais avoir l'honneur de faire part à l'Académie des moyens qui m'ont paru les plus ſimples & les moins diſpendieux pour l'exécution de ces deux procédés dans le fourneau que je propoſe. (*Voyez la planche IV* & ſon explication.)

Pluſieurs fourneaux que j'ai fait exécuter pour la converſion du fer en acier, m'ont donné l'idée de celui-ci, qui a les dimenſions néceſſaires pour y placer à la fois quinze grandes pièces de liquation de deux pieds de diamètre, & du poids de 350 livres chacune. En ne donnant que 18 pouces de diamètre aux pièces, & 232 livres de peſanteur, la longueur du fourneau ſera ſuffiſante de 5 pieds $\frac{1}{2}$, au lieu de 7 pieds que je donne à celui de la *planche IV;* il contiendra également 15 pièces de liquation.

PREMIÈRE SECTION.

Dispositions avant la Fonte.

On portera sur les plaques de fer formant des plans inclinés, 15 pièces ou pains de liquation, en trois rangées de cinq, de manière que les distances entre les pièces soient égales, ainsi que le fait voir la figure 4 de la planche.

On commencera par placer les cinq pièces de la rangée du milieu, après quoi on fera l'arrangement de cinq pièces à l'une des extrémités du fourneau, & on finira par les cinq de l'autre bout.

On conçoit que ces pièces ne pourroient pas se soutenir dans la situation verticale qui leur est nécessaire, sans quelques moyens, car on ne mettra ici ni bois ni charbon entre ces pièces qui puisse les soutenir, mais on y suppléera par de petits morceaux de terre cuite, *figure 6.* (*Voyez* son explication.) On pourroit y employer des morceaux de fer de la même forme, mais s'ils n'étoient pas recouverts d'un lut de terre, ils seroient brûlés en peu de temps.

Les pièces de liquation ne pourroient pas être portées dans le fourneau à bras d'hommes, sur-tout celle du milieu, & lorsque le fourneau est échauffé par une précédente opération. Mais deux hommes y parviendront aisément, & feront l'arrangement des 15 pièces d'une fournée, en moins d'une demi-heure, en se servant d'une forte tenaille très-longue, & suspendue à peu-près au quart de sa longueur, à partir de l'extrémité qui saisira les pièces, par une chaîne de fer fixée à une pièce de bois perpendiculairement, & à dix pieds au-dessus de l'embouchure du fourneau. Comme l'on fait entrer ces pièces de liquation par les deux bouts du fourneau, il faut de pareilles chaînes, mais une seule tenaille sera suffisante; car après avoir servi à un bout, on la sortira de l'étrier dans lequel elle est passée, & on la passera

passera dans l'étrier de la chaîne du bout opposé. Je crois que cela est suffisamment entendu. D'ailleurs on peut voir sur la *planche 49* de Schlutter une tenaille à peu-près semblable à celle que je propose, suspendue à une chaîne & tenant une pièce de liquation; mais pour empêcher que les pièces n'échappent de la tenaille, il sera bon que l'une de ses branches soit recourbée à angle droit d'environ un pouce, & que cette espèce de tenon entre dans le trou que laisse dans la pièce le crochet de fer qui sert à la sortir du moule, ainsi qu'il est dit *chapitre I.er*

Lorsque les 15 pains de liquation seront arrangés dans le fourneau de la manière que je viens de le dire, on descendra aux embouchures du fourneau les deux portes, dont une est représentée par la *figure 5;* on les y lutera tout autour avec de l'argile.

SECONDE SECTION.

De la Fonte, dite de Liquation.

LES dispositions détaillées dans la première section étant faites, on procédera à la liquation du plomb & de l'argent que contiennent les 15 pains renfermés dans le fourneau; on aura du bois préparé à cet effet, en bûches refendues, ou en rondins d'un pouce jusqu'à 3 pouces de grosseur, & dont la longueur sera de 18 pouces, qui est celle de la chauffe; quelques pouces de plus ou de moins n'y feront rien, parce que celles qui seront plus longues, porteront sur les côtés de la chauffe, & brûleront aussi-bien que les courtes qui entreront dans son intérieur.

On remplira la chauffe de bois jusqu'à la hauteur de l'arceau du devant du fourneau, on y mettra le feu. La colonne d'air extérieure contraindra la flamme à parcourir tout le dessous des arceaux le long de la voie, & de passer par les trois ouvertures ménagées par les arceaux, d'où elle enveloppera toutes les pièces de liquation, & aura son

issue, ainsi que la fumée, par les trois petites cheminées ou tuyaux expiratoires ménagés dans la voûte du fourneau, & de suite dans la grande cheminée. A mesure que le bois se consommera, & qu'il baissera dans la chauffe, on y en substituera quelques morceaux qui se placeront dessus.

Dans la première opération, le fourneau étant encore froid, on peut sans crainte entretenir la chauffe pleine de bois, sur-tout au commencement; mais dans celles qui suivront celle-ci, il faudra faire peu de feu au commencement de l'opération, sans quoi le plomb, en coulant trop abondamment, pourroit entraîner du cuivre; on pourra augmenter peu à peu la chaleur, lorsqu'environ la moitié du plomb sera sortie des pièces.

Il est indispensable, dans une première opération, de chauffer avec une dixaine de livres de charbon le bassin de réception & sa voie qui traverse le mur du fourneau. Le sol de la grande voie n'a pas besoin de chauffage préliminaire; la flamme l'aura suffisamment échauffé avant que le plomb y tombe; car je pense que dans cette première opération le plomb ne commencera à couler qu'au bout d'environ une heure, à compter du moment qu'on aura mis le feu dans la chauffe; ainsi le sol de la grande voie aura le temps de s'échauffer.

A mesure que le plomb sortira des pièces, il tombera sur le sol de la grande voie de la flamme, & se rendra à l'instant dans le bassin de réception par la voie ménagée dans l'épaisseur du mur, d'où on le puisera avec une cuiller de fer; on le portera dans des lingotières, & l'on en prendra pour les essais, ainsi qu'il est détaillé *chapitre II.*

Lorsque l'on apercevra dans la grande voie quelques crasses, qui pourroient empêcher un peu de plomb de couler dans le bassin de réception, comme il seroit exposé dans cet endroit à être calciné, on nettoyera cette voie par la petite porte, cotée 12 de la *figure 3*, en y introduisant un petit rouable de fer, avec lequel on retirera

ces crasses : on aura soin de refermer aussitôt cette porte. Ces crasses que nous avons nommées ailleurs *déchets de liquation*, ne seront pas mêlées avec celles qui viendront pendant le ressuage qui suit immédiatement la liquation.

On regardera de temps en temps par la petite ouverture de la porte notée 5, afin de voir ce qui se passe dans le fourneau, de s'assurer si la chaleur y paroît égale dans toutes ses parties, & si l'affaissement des pièces est uniforme dans les trois rangées; car lorsque l'une des extrémités s'affaisse plus vîte que les autres, c'est une preuve que la flamme s'y porteroit plus qu'à l'autre bout, alors on y rémédieroit en avançant la brique servant de registre à la petite cheminée qui est de ce côté. (*Voyez* cette brique cotée 8 dans la *figure 4*). En faisant entrer cette brique, elle interceptera une partie, ou même, s'il est nécessaire, la totalité du passage de la flamme, qui alors prendra son cours par les deux autres cheminées ou tuyaux aspiratoires, & par son courant augmentera la chaleur des rangées de pièces qui en avoient besoin, & se ralentira du côté de la rangée qui paroissoit s'affaisser trop promptement. Rien n'est si aisé que de gouverner ainsi le feu, il ne faut qu'un peu d'attention de la part du fondeur.

Si le bois qu'on emploie est de bonne qualité, bien sec & en petits morceaux minces, la flamme, dans cette circonstance, porte une chaleur très-vive dans le fourneau, qui pourroit en peu de temps faire fondre le cuivre avec le plomb. En pareil cas, il ne faut mettre dans la chauffe que trois ou quatre des bûches les plus grosses, & de manière que la chauffe n'en soit pas remplie. Alors il passera un grand courant d'air avec peu de flamme; ce qui rafraîchira le fourneau, & dans un instant l'écoulement trop abondant des métaux en fusion diminuera considérablement.

On pourra encore diminuer la chaleur en fermant en tout ou en partie les ouvertures des trois petites cheminées, par le moyen des briques dont j'ai parlé, & en ouvrant

la petite porte cotée 19 dans la *figure 4;* car alors la colonne d'air extérieur qui entrera par cette porte, rafraîchira aussi le fourneau, & contrebalancera celle qui entre incessamment par la chausse, & empêchera celle-ci de porter la flamme avec autant de rapidité vers l'intérieur du fourneau, ce qui le refroidira; car dans tous fourneaux, & notamment dans ceux à réverbère, la chaleur est toujours en raison de la rapidité de la flamme, & celle-ci proportionnée à la vîtesse du vent qui l'entraîne dans l'intérieur du fourneau.

Si l'on vouloit obtenir, par le moyen de la flamme, une chaleur très-considérable, par exemple, dans le fourneau de la *planche 4,* il faudroit donner beaucoup plus de hauteur au grand tuyau aspiratoire, c'est-à-dire, à la cheminée. Mais cette grande chaleur seroit préjudiciable dans les procédés dont il s'agit ici, & le fourneau consommeroit beaucoup plus de matières combustibles que ces procédés n'en exigent; car cette consommation est aussi en raison du courant d'air : or, ce courant est d'autant plus grand, que l'orifice supérieur de la cheminée est plus élevé au-dessus de la chausse. M. le Comte de Buffon a fait l'application de toute cette théorie dans ses forges, où il a fondu de la mine de fer avec un feu de charbon par un courant d'air, sans le secours de soufflets ni de trompes : mais revenons à l'opération de la liquation qui fait le sujet de cette section.

Lorsque les 15 pièces de liquation paroîtront bien affaissées, & qu'il n'en dégouttera plus, ou très-peu de plomb, on procédera à l'opération du ressuage ou torréfaction de ces pièces, de la manière indiquée dans la section suivante.

TROISIÈME SECTION.

Du Ressuage.

LE ressuage, dans le fourneau que je propose, doit suivre immédiatement la liquation. On a vu au *chapitre III,*

que le but de cette opération eſt d'extraire des pièces liquéfiées autant de plomb qu'il eſt poſſible, ainſi que les matières étrangères au cuivre.

Après que le plomb aura ceſſé de couler ſous la forme métallique, on continuera le feu dans la chauffe; on pourra même augmenter le degré de chaleur juſqu'à un certain point, en mettant du bois plus menu, & en plus grande quantité dans la chauffe, cependant d'abord avec précaution, & on l'augmentera par degrés; on verra bientôt couler l'eſpèce de ſcories dont nous avons parlé en traitant du reſſuage ordinaire, avec quelques gouttes de plomb dont on pourra ici profiter. Il faudra de temps en temps retirer ces ſcories par la porte cotée 12 dans la *figure 3*, & auſſitôt refermer cette porte; car, comme je l'ai dit ailleurs, ſi on laiſſoit ces ſcories long-temps ſur le ſol de la voie, les métaux qu'elles contiennent ſe brûleroient & deviendroient irréductibles. Lorſque ces ſcories qui dans le commencement ſont noirâtres & ſpongieuſes, deviendront rougeâtres & compactes, on ſera aſſuré que l'opération touchera à ſa fin, & elle ſera achevée lorſque ces ſcories refroidies ſeront très-rouges & très-compactes; ce qui annonce la préſence d'une plus grande quantité de cuivre qu'entraîne cette matière vitrifiée.

C'eſt alors qu'on ceſſera de faire du feu dans la chauffe, & auſſitôt on enlèvera les deux portes qui bouchent les extrémités du fourneau, au moyen des deux petits treuils. On ouvrira auſſi la petite porte par laquelle on tire les craſſes. On ſortira toutes les braiſes de la chauffe, afin que la chaleur n'en incommode pas les ouvriers durant les opérations de la liquation & du reſſuage. On doit de temps en temps ſortir les braiſes par la petite ouverture pratiquée dans le bas de la chauffe, ce qui s'exécutera environ toutes les heures. Une trop grande quantité de braiſe ralentit beaucoup la chaleur, en s'oppoſant au courant de la flamme: je l'ai éprouvé bien des fois dans les fourneaux à convertir le fer en acier. Au reſte, quand

on n'a pas besoin de beaucoup de chaleur, c'est un moyen de la diminuer.

Toutes les portes du fourneau étant ouvertes, les fondeurs en sortiront les pièces de cuivre ressuées avec la même tenaille qui aura servi à les y faire entrer, ou ils les feront tomber hors du fourneau avec des crochets de fer, car on ne craint pas dans cette circonstance de les briser, puisqu'elles n'ont plus que le raffinage à subir; mais, de même qu'après le ressuage ordinaire, on aura soin de jeter ces pièces encore toutes rouges dans l'eau, afin d'en pouvoir détacher les écailles vitrifiées, ainsi que je l'ai détaillé en parlant du ressuage ordinaire, *chapitre III.*

Aussitôt que toutes les pièces seront sorties du fourneau, on y en substituera 15 autres de la même manière; on refermera toutes les portes, & on recommencera le feu dans la chauffe, en observant qu'il soit foible durant la première heure, attendu que le fourneau est chaud, & qu'il ne lui faut pas beaucoup de chaleur de plus pour faire couler le plomb aussi vîte qu'il doit sortir des pièces sans entraîner du cuivre avec lui. Le surplus de l'opération de la liquation suivie du ressuage, se fera ainsi que je l'ai décrit ci-dessus pour les 15 premières pièces.

La première opération qui se fera dans le fourneau que je propose, durera, y compris le ressuage, tout au plus huit heures, & les suivantes six heures; c'est-à-dire, environ 3 heures $\frac{1}{2}$ pour la liquation, & pour le ressuage 2 heures $\frac{1}{2}$, un peu plus ou un peu moins, suivant l'attention & l'adresse des ouvriers.

La consommation du bois sera d'environ une corde par 24 heures, pendant lequel temps on fera la liquation & la torréfaction de soixante pièces. Il faut quatre hommes à ces opérations; ils s'entr'aideront à introduire les pièces dans le fourneau & à les en tirer. Au reste, il y aura constamment deux de ces ouvriers près du fourneau; l'un qui fera le feu, & l'autre qui moulera le plomb à mesure

qu'il ſe rendra dans le baſſin de réception, qui décraſſera la voie, & aura attention au degré de chaleur : celui - ci doit être le maître. L'aide qui ſera le feu ne ſera pas fort occupé, car un enfant peut le faire ; mais il aidera à mouler le plomb, à le peſer & à le mettre en magaſin. Lorſque le reſſuage des 15 pièces ſera fait & qu'il s'agira de les ſortir, les deux autres ouvriers ſeront appelés pour aider à cet objet, & à remettre 15 autres pièces dans le fourneau ; alors les premiers pourront ſe repoſer tandis que les deux nouveaux prendront leur place, ou s'ils aiment mieux travailler douze heures de ſuite, ce qui fait un poſte ordinaire, ils ne ſe relayeront que de deux en deux opérations.

REMARQUES.

L'on a vu dans les remarques, à la ſuite du *chapitre III,* les motifs qui m'ont engagé à chercher les moyens de ſimplifier les deux procédés de la liquation & du reſſuage. L'Académie jugera ſi le double procédé que je viens de décrire dans le dernier chapitre, peut remplir toutes mes vues économiques.

Le fourneau que je propoſe pour l'exécution de ce double procédé, ne coûtera pas plus pour ſa conſtruction, & même moins, qu'un fourneau de reſſuage ordinaire. On gagnera donc la conſtruction & l'emplacement de celui de liquation, & ainſi que je l'ai dit, le mien n'exigera que du bois pour ſon chauffage, auquel on pourra même ſubſtituer du charbon de terre, lorſqu'il ſera réduit en *cook*, & qu'il aura perdu ſon odeur pénétrante, occaſionée par le ſoufre & l'acide vitriolique qui pourroient attaquer les métaux, ſur - tout le cuivre, & y occaſioner du déchet. On épargnera donc, en faiſant uſage de mon fourneau, la quantité de charbon employée dans les procédés de la liquation en uſage, & qui, comme on l'a vu au *chapitre II,* eſt aſſez conſidérable.

Il eſt dit, *chapitre III*, que pour reſſuer dans un fourneau ordinaire environ 150 pièces, il faut quatre cordes de bois cubant 384 pieds; & dans le fourneau que je propoſe, on peut liquéfier & reſſuer 60 pièces en 24 heures avec une corde de bois, & en ſuivant la même proportion, on pourra en 60 heures liquéfier & reſſuer 150 pièces de liquation avec deux cordes ½ à trois cordes tout au plus; ce qui fait voir que le reſſuage ſeul, à la manière accoutumée, dépenſe pour ce nombre de pièces, une corde ou une corde ½ de bois de plus que mon fourneau n'en exige pour les deux opérations enſemble. Voilà donc une grande économie, ſans compter celle du charbon employé à la liquation des pièces dans un fourneau ordinaire, qui, ſuivant ce que j'ai dit au *chapitre II*, à la fin de la *ſeconde ſection*, monteroit, pour 150 pièces, à environ 700 pieds cubes de charbon, ou à peu-près 10500 livres peſant.

Pour ſe convaincre de la grande conſommation de bois dans le fourneau de reſſuage ordinaire, il ſuffira de faire attention à ſa conſtruction & à ſa grandeur intérieure, qui, ainſi que je l'ai dit, n'a acquis aſſez de chaleur pour commencer à faire reſſuer les pièces, qu'après environ 15 heures d'un feu ſuivi. Il n'en ſera pas ainſi dans mon fourneau, qui fera le reſſuage des pièces, ſans les déplacer, immédiatement après la liquation, & tandis qu'elles ſont toutes rouges. Ce reſſuage fait de ſuite, ſera auſſi très-avantageux, en ce que, 1.° s'il reſte encore un peu de plomb après la liquation, qui puiſſe conſerver ſa forme métallique, il coulera dans le baſſin de réception, & on l'ajoutera à l'œuvre de la liquation; 2.° en ce qu'il y aura certainement moins de cuivre & de plomb de détruits dans ma manière d'opérer que dans les deux procédés ordinaires. J'ai fait voir qu'une portion de ces deux métaux ſe brûle ou ſe vitrifie d'une manière irréductible; ce qui arrive à une quantité d'autant plus conſidérable, que le feu y eſt plus long-temps appliqué. Cet élément agit bien

du

du temps ſur les pièces dans le fourneau de reſſuage ordinaire ; en conſéquence, les métaux qui en ſortent ſont dans un état de chaux ou de vitrification, dont une partie ne peut être revivifiée.

L'on a vu que dans la liquation en uſage, les pièces reſtent environ 4 heures expoſées au feu, & 36 heures dans le fourneau de reſſuage. Ces pièces ſont donc, environ pendant 40 heures, expoſées à la chaleur, tandis que pour ſubir ces deux opérations dans le fourneau que je propoſe, elles n'y reſteront que 6 heures, ce qui fait 34 heures de moins. Quoique la chaleur ſoit médiocre dans le commencement du reſſuage ordinaire, elle ne laiſſe pas de calciner les métaux, & ſingulièrement le cuivre, qui perd preſqu'auſſi vîte ſon phlogiſtique à une chaleur modérée, qu'à celle qui ſeroit aſſez puiſſante pour le faire entrer en fuſion.

3.° Par mon procédé on évitera beaucoup de journées d'ouvriers, ſoit pour les tranſports d'un fourneau à l'autre, ſoit pour l'arrangement des pièces liquéfiées dans un grand fourneau de reſſuage, ſoit enfin pour le chauffage de ce fourneau & pour l'extraction des pièces lorſqu'elles ſont reſſuées.

4.° J'ai dit que la chaleur, les fumées du bois & les vapeurs du plomb incommodent beaucoup les fondeurs dans l'opération de la liquation qui ſe fait avec le fourneau de réverbère de Schlutter. On ne reſpirera aucunes fumées, ni de bois, ni de plomb, dans le mien ; elles paſſeront toutes par la cheminée. D'ailleurs la chaleur ne les incommodera nullement, & ne ſe fera ſentir que foiblement, même lorſqu'ils ouvriront les portes & qu'ils tireront les pièces du fourneau.

5.° Enfin l'on a dit, *chapitre III*, que les ſcories provenant du reſſuage ſe mêlent avec les braiſes, & qu'on eſt contraint d'en faire le lavage pour en ſéparer les charbons & les cendres, opération qui prend du temps & dans laquelle on perd de ces ſcories riches en métaux : celles qui ſortiront

de mon fourneau feront pures, moins abondantes, & dans le cas d'être fondues fans autre préparation.

CHAPITRE V.

De l'affinage du plomb.

L'AFFINAGE du plomb étant bien connu en France; & particulièrement à Poullaouen en baffe Bretagne, où cette opération fe fait très-bien, je me bornerai à quelques petits détails qui font la fuite des procédés de la liquation que j'ai décrits dans les chapitres précédens, & à faire quelques obfervations fur la conftruction des fourneaux. Je terminerai ce chapitre par donner une nouvelle méthode de former les coupelles.

PREMIÈRE SECTION.

IL y a bien des méthodes en ufage par l'affinage du plomb; les Anglois & les Allemands procèdent tout différemment, & parmi ces derniers, chaque pays ou principauté a fes ufages particuliers, ainfi qu'on le verra dans les deux derniers volumes des Mémoires de MM. Jars & de moi. On peut auffi remarquer une très-grande différence dans la conftruction des fourneaux d'affinage que Schlutter a donnés; les uns ont une chauffe ou tifard à l'un des côtés, les autres n'en ont point. Dans ces derniers, on paffe de grandes pièces de bois qui traverfent la coupelle au-deffus du bain; la flamme de ce bois agitée par le vent des foufflets, forme la litharge. Si on fait attention que les charbons du bois qui tombent fur le bain doivent naturellement revivifier de la litharge, & l'empêcher de fe former dans les parties qui en font couvertes, on rejetera cette manière d'opérer, qui d'ailleurs exige des pièces de bois qu'on ne pourroit pas fe procurer par-tout.

Les uns font leur affinage dans un fourneau couvert d'un chapeau de fer luté; les autres en deffous d'une voûte

ou dôme, qui doit être aſſez élevé pour que l'affineur puiſſe entrer dans le fourneau & y battre ſa coupelle. Ces derniers ſont défectueux, en ce qu'ils conſomment beaucoup plus de bois que ceux dont le chapeau n'eſt pas trop élevé au-deſſus de la ſurface du plomb en bain.

Dans certains ateliers on donne une forme carrée à l'extérieur du fourneau, tandis que l'intérieur eſt rond; ce qui laiſſe dans les angles de groſſes maſſes de maçonnerie, qui ralentiſſent les progrès de la chaleur & prolongent l'opération. Dans d'autres, on leur donne la forme ronde intérieurement & extérieurement, ce qui vaut mieux.

Les uns donnent beaucoup de grandeur à la chauffe ou réverbère, les autres moins; mais en général elle eſt trop grande preſque par-tout. Ce vice qui occaſionne une plus grande conſommation de bois, vient communément de ce que les ouvriers cherchent plutôt leur commodité que le profit de l'entrepreneur. Ils ont moins de peine à faire entrer un fagot par une grande porte, dans une chauffe à grandes dimenſions, que dans une petite chauffe par une porte qui lui ſeroit proportionnée.

Je penſe qu'une chauffe qui ne ſera alimentée que par des fagots, ne doit pas avoir plus de 16 à 17 pouces de largeur, 3 pieds $\frac{1}{2}$ à 4 pieds de longueur, & 20 pouces de hauteur de la voûte à la grille. Je donnerois aux chauffes où l'on ne brûleroit que du bois de corde, 14 à 15 pouces de largeur, 3 pieds à 3 pieds $\frac{1}{2}$ de longueur, & 18 à 19 pouces de hauteur. Le fourneau que je donne, *planche 5*, eſt dans ce cas. Je l'ai fait exécuter aux mines de Baigorry, dans les Pyrénées, où l'on ne ſe ſert que de bois de corde. Je ne lui ai donné, pour la partie de la coupelle, que ſix pieds de diamètre; mais je conſeille, lorſqu'on aura beaucoup de plomb à affiner, de donner à ce baſſin au moins huit pieds de diamètre, ſans plus grandes dimenſions à la chauffe, parce que plus le bain aura de ſurface, & plus il ſe formera de litharge à la fois.

Une choſe bien eſſentielle dans la conſtruction d'un

fourneau d'affinage, eſt de ménager des ſoupiraux qui puiſſent abſorber avec facilité les vapeurs, non-ſeulement celles de la maſſe entière du fourneau, mais auſſi celles qui proviennent de l'humectation des cendres de coupelle. Pour cet effet, il ne faut pas ſe borner aux deux grands canaux ou ſoupiraux en croix à la baſe du fourneau, avec deux autres plus petits en deſſous du lit de ſcories; mais il eſt néceſſaire de faire un petit canal circulaire à environ 18 pouces ou deux pieds du centre du fourneau, & qui ait communication aux autres ſoupiraux qui ont leur iſſue à l'extérieur de la maſſe de maçonnerie. J'ai exprimé le tout ſur le plan de ce fourneau, par des lignes ponctuées.

J'ai vu manquer beaucoup d'affinages pour n'avoir pas diposé ces ſoupiraux d'une manière convenable, & pour les avoir recouverts en pierres de taille bien jointes & cimentées; alors l'eau qui humecte les cendres étant réduite en vapeur, & ne pouvant trouver une iſſue, réagiſſoit ſur la coupelle, & en faiſoit ſoulever des morceaux qui ſurnageoient le bain de plomb. Lorſque cela arrive, l'opération eſt manquée: l'on attribue communément ce défaut à la qualité des cendres & à leur préparation, tandis que le mal réſide dans le fourneau même.

DEUXIÈME SECTION.

Procédé de l'affinage.

ON pourra mettre environ 36 quintaux de plomb dans le fourneau d'affinage dont je donne le deſſin. Lorſque ce plomb ſera en bain, qu'il ſera écumé & que la litharge aura commencé à couler, on pourra y ajouter du plomb qu'on y fera fondre peu-à-peu par la bouche à feu que j'ai ménagée exprès; alors, au lieu de 36 quintaux, on en pourra paſſer 50 à 60, & même plus, ſuivant que la coupelle ſera en état d'en ſupporter ſans être endommagée: ſi les cendres ſont bonnes, bien préparées & la coupelle bien faite, cela ne ſouffrira aucune difficulté. Si la coupelle

avoit 8 pieds de diamètre, elle pourroit contenir environ 100 quintaux de plomb.

L'on a dit, en traitant de la liquation, qu'on doit prendre du plomb dans le baſſin de réception pour en faire les eſſais avant l'aſſinage en grand, & que leurs réſultats devoient être portés ſur un livre à ce deſtiné : on jugera d'après cela ſi l'affineur a bien ou mal opéré.

Le feu doit être très-doux dans le commencement de l'opération, afin que la coupelle ait le temps de ſe débarraſſer de ſon humidité ſurabondante, car elle n'eſt même pas tout-à-fait évaporée lorſque le plomb a commencé à litharger; mais ce qu'il en reſte ne peut cauſer aucun préjudice dans un fourneau conſtruit de la manière indiquée.

J'ai vu pluſieurs fonderies en Allemagne, où l'on fait chauffer avec beaucoup de charbon la coupelle avant d'y porter le plomb : cette dépenſe eſt très-inutile.

Les craſſes ou écumes qui proviennent de l'affinage, ſont miſes ſéparément pour être fondues avec les autres déchets des opérations relatives à la liquation.

Le bain étant bien net & le plomb devenu rouge, la litharge commence à ſe former & à s'imbiber dans les bords de la coupelle qu'elle durcit ; alors on donne le vent, mais foiblement d'abord, & on l'augmente peu-à-peu. Il eſt indifférent de ſe ſervir de ſoufflets ou de trompes : il eſt même inutile, dans cette dernière circonſtance, de poſer deux buzes ou porte-vent; un ſeul ſuffit, en mettant à ſon extrémité une ſoupape ronde de fer que le vent fait ſoulever. Cette ſoupape qu'on nomme *papillon*, rabat le vent ſur la ſurface du bain, accélère la formation de la litharge, & la chaſſe du côté de la voie, où elle trouve une petite rigole pratiquée dans les cendres de la coupelle, d'où elle coule ſur l'aire de la fonderie.

Sans la ſoupape dont on vient de parler, le vent ſillonneroit la ſurface du plomb dans ſa direction ſur une petite largeur, & jeteroit même des grains de plomb par la voie qui eſt à peu-près dans cette direction; & la litharge, au lieu

d'être pouſſée vers la voie, ſe rangeroit des deux côtés du fourneau ſans qu'on pût la faire tomber, ce qui tripleroit la durée de l'opération qu'on ne pourroit même pas finir.

Le papillon ſatisfait à tout, il rend le vent moins violent; en le faiſant tomber ſur la ſurface du bain en forme de lame très-large, il chaſſe la litharge vers la voie; ce qui arrive également, ſoit que la coupelle ſoit pleine, ſoit qu'elle ne contienne plus que peu de plomb, car le vent eſt toujours dirigé en bas. D'ailleurs, ſi l'affineur s'aperçoit que la ſoupape porte le vent plus d'un côté que de l'autre de la coupelle, il y remédie promptement en tournant un peu la verge de fer, au bout de laquelle cette ſoupape eſt fixée à une charnière qui lui permet de ſe lever plus ou moins ſuivant la force du vent.

L'opération dont eſt ici queſtion, quoiqu'une des plus ſimples de la métallurgie, exige néanmoins de la part de l'affineur beaucoup d'attention, ſoit pour donner le feu à propos, ſoit pour éviter de laiſſer couler du plomb avec la litharge, & notamment vers la fin de l'affinage, temps où le plomb qui reſte ſur la coupelle eſt très-riche en argent. Si alors il en couloit ſeulement un marc, on pourroit perdre pluſieurs onces d'argent.

L'opération d'un petit affinage de 36 quintaux, dure environ 16 heures; on y conſomme à peu-près 400 petits fagots, ou depuis trois quarts de corde juſqu'à une corde de bois. Si on y ajoute du plomb pendant l'opération, la conſommation du bois & la durée de l'affinage augmenteront, mais non en proportion, car ſoixante quintaux pourront être paſſés en 20 ou 22 heures; ce qui vient de ce que l'affinage étant une fois en train, il va très-vîte, ſur-tout lorſque le plomb qu'on y ajoute, entretient toujours la coupelle pleine, car alors la ſurface du bain eſt la plus grande poſſible; & l'on ſait que plus cette ſurface eſt grande, & plus il ſe forme de litharge en même temps. Cette réflexion doit faire préférer les grandes coupelles aux petites.

S'il arrivoit que l'on eût tous cuivres dont la teneur

en argent excédât douze onces par quintal, qui eſt la teneur requiſe pour un raffraîchiſſement riche, ainſi que je l'ai dit en ſon lieu, on pourroit faire paſſer une partie de ces cuivres à la coupelle en raffinant l'œuvre provenant de la liquation. Par exemple, ſi après les mélanges faits il reſtoit des cuivres dont la teneur fût de quatre marcs par quintal, alors il n'y auroit pas à balancer d'en ajouter un peu à chaque affinage. On y en peut faire entrer, ſans beaucoup d'inconvénient, la ſeizième partie du poids du plomb; mais je conſeille de n'y en porter qu'un vingt-cinquième, ou tout au plus un vingtième. Ce cuivre, qui doit être préalablement caſſé en petits morceaux, n'eſt mis dans le bain que lorſque le plomb eſt bien chaud & qu'il litharge bien.

Il n'y a que le cas ci-deſſus où je puiſſe conſeiller d'imbiber du cuivre dans le plomb de l'affinage; car quoique ce cuivre paſſe, pour la plus grande partie, dans la litharge & dans les cendres de la coupelle, il y en a toujours de perdu qui ſe détruit par la vitrification, & qu'il eſt impoſſible de revivifier. D'un autre côté, les litharges provenant de ces affinages contiennent le cuivre qu'elles ont ſcorifié avec elles, & pour s'en ſervir dans les mélanges d'un rafraîchiſſement, il faut avoir égard à ce cuivre, & en conſéquence en faire moins entrer dans la compoſition de chaque pièce. Il faut auſſi, par la même raiſon, ajouter une plus grande quantité de litharge, & proportionnellement au cuivre qui y eſt combiné, afin que par ces mélanges on obtienne les mêmes réſultats que nous avons détaillés au *chapitre premier.*

On arrête communément le vent auſſitôt que l'éclair eſt fini & on ceſſe le feu; un moment après on refroidit le plateau d'argent, en verſant dans un petit canal en bois de l'eau qui, du bord de la coupelle, ſe rend toute bouillante ſur l'argent. Il en eſt qui font bouillir l'eau, ce qui eſt inutile, puiſque la coupelle lui communique à l'inſtant ce dégré de chaleur; d'autres ſe ſervent d'une eau de ſavon, ce qui eſt encore très-inutile.

Lorſque le plateau eſt figé, on le détache de la coupelle avec un grand ciſeau ou pince de fer; on le ſort du fourneau & on le plonge dans un baquet plein d'eau, on lui enlève, avec un petit marteau à pointe, les parties de teſt qui peuvent y être reſtées adhérentes. On fait ſécher ce plateau, on le pèſe, &c.

OBSERVATIONS

Sur la préparation des Coupelles.

L'ON n'a juſqu'ici employé pour la formation des coupelles, que des cendres de bois ou d'os. Quelques chimiſtes en ont fait avec de certains ſpaths friables : toutes ces matières poreuſes & abſorbantes ſont ſans contredit très-bonnes pour faire des eſſais en petit deſſous une moufle, où il s'agit de faire imbiber dans la coupelle tout le plomb qu'on y met à meſure qu'il ſe convertit en litharge, & pour obtenir le petit grain d'argent que contient ce plomb.

A l'imitation des chimiſtes & eſſayeurs, les métallurgiſtes ont fait de grandes coupelles avec des cendres; ils ſe ſont pourtant bornés aux cendres de bois, qui ſont plus communes que celles des os d'animaux; ils ont auſſi conçu & reconnu par beaucoup d'expériences, que ſi l'on étoit contraint, dans l'affinage en grand, de faire pénétrer tout le plomb dans la coupelle, qu'il faudroit d'une part une très-grande épaiſſeur à la coupelle, par conſéquent une prodigieuſe quantité de cendres, & que de l'autre l'opération de l'affinage dureroit plus de huit fois autant de temps qu'il en eſt néceſſaire en faiſant litharger. Ils ont vu que la litharge ſe formant toujours à la ſurface du bain, il étoit poſſible de faire une petite rigole dans les cendres du bord de la coupelle, & d'y faire couler la majeure partie des litharges qui ſurnagent le plomb, tandis que l'autre partie pénètre dans la coupelle autour du bain. On a auſſi reconnu que pour accélérer la formation de la litharge & pour la chaſſer vers la voie à meſure qu'elle ſe forme, il étoit à propos d'y

d'y appliquer des soufflets. On en est resté-là depuis très-long-temps.

La dificulté de se procurer assez de cendres dans les ateliers en grand, le prix de ces cendres, ce qu'il en coûte pour en faire la lotion à l'effet d'en retirer les sels, les sables & le charbon, leur recuit dans des fours à réverbère; tous ces objets de beaucoup de dépenses, joint à ce que les coupelles construites avec des cendres qui sont légères, sont sujettes à s'enlever à la surface d'un métal en fusion infiniment plus pesant qu'elles, sur-tout si, comme je l'ai dit, le fourneau n'est pas construit avec attention & que ces cendres ne soient ni bien préparées ni bien battues; tous ces inconvéniens, dis-je, m'ont fait naître le désir de trouver des moyens propres à les éviter. Je vais avoir l'honneur de faire part à l'Académie, de ceux qui m'ont paru les meilleurs; elle voudra bien en juger.

Voici comme j'ai raisonné : puisque dans l'affinage en grand on n'a en vue que de convertir le plomb en litharge pour en obtenir l'argent, ne peut-on pas faire les coupelles de matières non absorbantes, moins coûteuses dans leur préparation, plus durables, plus pesantes & non sujettes à s'enlever pendant l'affinage ? Il ne s'agit plus maintenant que de trouver les matières qui y sont les plus propres.

On sait qu'un sol de fourneau, fait avec de l'argile bien battue, dure plusieurs mois à fondre du minéral de plomb; on en a l'exemple aux mines de basse Bretagne. Je suis assuré qu'un bassin de coupelle fait de bonne argile peu humectée, bien battue à mesure qu'elle sèche, & chauffée avant d'y porter le plomb, dureroit beaucoup; mais il s'y présente une difficulté, c'est que l'argile exposée au feu se durcit trop fortement pour pouvoir en couper pour former la petite rigole servant de passage à la litharge. On pourra remédier à cet inconvénient, en mêlant beaucoup de sable fin & tamisé à l'argile dont on formera la coupelle; on pourra même, suivant moi, faire la coupelle entiérement de sable, ou si l'on veut, l'endroit du passage de la litharge seulement:

alors la voie se feroit avec la même facilité & même plus aisément que dans les cendres, qui se durcissent par l'imbibition de la litharge, au point que l'affineur a souvent beaucoup de peine à former la voie; c'est ce qui me fait croire que de l'argile mêlée de sable pourroit se couper avec les mêmes outils; on pourroit même, en cas de nécessité, avoir recours à une espèce de lime ou rape emmanchée au bout d'une verge de fer.

Pour s'assurer du succès en grand, on en peut faire l'essai dans une coupelle faite de la manière que je viens d'indiquer, & d'une grandeur suffisante pour contenir 15 à 20 livres de plomb. On placeroit cette coupelle sous la voûte d'un petit fourneau à réverbère, tel que celui dont on se sert à Poullaouen pour raffiner l'argent affiné; mais il faut appliquer derrière le fourneau un soufflet qui puisse, comme dans le travail en grand, chasser les litharges en devant, d'où elles puissent couler hors de la coupelle par une petite rigole que l'on feroit au bord de la coupelle, & que l'on approfondiroit à mesure que le plomb diminueroit.

Dans une coupelle en grand, préparée à ma manière, on pourroit je crois passer plus de soixante milliers de plomb de suite, sans craindre d'accident, bien entendu qu'à mesure que le premier plomb mis sur la coupelle lithargeroit, on y en substitueroit d'autre, ainsi qu'il est expliqué.

Outre les avantages dont j'ai parlé, cette manière d'opérer en présente d'autres; elle consommeroit beaucoup moins de bois; elle seroit plus expéditive; on convertiroit tout son plomb en litharge, puisqu'il n'en pénétreroit point dans la coupelle, avantage qu'on trouvera assez considérable si on fait attention, 1.° que la litharge est une matière marchande, & que le test ne l'est point; 2.° que la litharge est beaucoup plus aisée à fondre ou à revivifier que le plomb contenu dans le test, qui, ainsi que je l'ai dit, ne peut pas être employé avec succès dans les mélanges d'un rafraîchissement. 3.° Enfin, le test retient toujours plus d'argent proportionellement que les litharges, ce que j'ai vérifié bien des fois en

paſſant à la coupelle le plomb provenant de ces deux ſubſtances.

On dira peut-être que l'affinage, dans une coupelle préparée de la manière que je propoſe, n'ira pas auſſi vite que dans une coupelle de cendres, puiſque non-ſeulement il coule des litharges hors du fourneau, mais qu'il s'en imbibe en même temps dans la coupelle; à quoi je répondrai que la litharge ne pouvant ſe former que par le contact de l'air, il ne doit pas s'en former dans la partie inférieure du bain contiguë à la coupelle. C'eſt donc toujours à la ſurface du plomb que cette litharge ſe préſente, d'où la majeure partie coule par la voie, tandis que l'autre pénètre dans le bord de la coupelle où le bain ſe termine; or, ſi les matières qui forment les coupelles ne ſont pas abſorbantes, ces litharges, au lieu d'y pénétrer, couleront comme les autres par la voie à meſure qu'elles y ſeront pouſſées par l'impulſion du vent des ſoufflets, ce qui ne retardera point l'opération. Une preuve bien convaincante que la litharge ne pénètre dans les cendres de coupelle qu'autour du diſque du plomb, c'eſt que la croûte imbibée de ces cendres n'eſt pas plus épaiſſe vers le milieu que ſur ſes bords; or, s'il ſe formoit de la litharge en deſſous du bain, le centre de la coupelle où le plomb ſéjourne huit à dix fois plus long-temps que ſur ſes bords, devroit avoir huit à dix fois autant d'épaiſſeur.

Je déſire, pour le bien public & l'avantage particulier des compagnies de mines, que l'on faſſe l'épreuve de la méthode que je propoſe. Je l'exécuterai moi-même lorſque je me trouverai dans des fonderies de plomb.

CHAPITRE VI.

Du Raffinage du cuivre.

J'ai dit, en parlant du rafraîchiſſement, que les cuivres qu'on ſoumet à cette opération ſont communément ce qu'on appelle *cuivres noirs*, c'eſt-à-dire, qu'outre l'argent qu'on en

retire par les opérations du départ, ils contiennent des matières étrangères, comme fer, arſenic, ſoufre, & autres qui les rendent caſſans & qui leur donnent une couleur plus rembrunie que celle du cuivre pur.

Quoiqu'une bonne partie des ſubſtances étrangères ſoit ſortie des cuivres par les procédés précédens & ayent paſſé dans les ſcories ou craſſes, ainſi que je l'ai obſervé, pendant qu'une autre partie a été entièrement brûlée & détruite, il en reſte encore dans les pièces de cuivre reſſuées.

Ce ſont ces ſubſtances hétérogènes, ainſi qu'un peu de plomb qui eſt reſté dans le cuivre, qu'il s'agit d'enlever par le raffinage, afin de le convertir en cuivre roſette & marchand.

Je ne m'arrêterai pas à détailler toutes les différentes méthodes en uſage pour le raffinage du cuivre; je dirai ſeulement qu'elles ſe réduiſent à deux principales. La plus ancienne & la plus uſitée ſe fait dans des petits baſſins ou catins, qui peuvent contenir depuis 2 juſqu'à 4 quintaux de ce métal mis en fuſion par des charbons de bois, dont la chaleur eſt conſidérablement augmentée par le vent de deux forts ſoufflets ou d'une trompe que quelques auteurs nomment *trombes*. Nous avons vu en Tyrol, feu M. Jars & moi, une manière de raffiner le cuivre dans un catin, qui, ſans contredit, eſt la meilleure en ce genre, en ce que le cuivre noir, au lieu d'être levé à l'ordinaire en gâteaux, paſſe tout de ſuite dans le catin du fourneau de raffinage où il eſt raffiné en peu de momens, ce qui fait une grande économie de charbon.

Cette manière d'opérer ne pouvant s'appliquer aux cuivres qui ont paſſé à la liquation, ce n'eſt pas ici le lieu d'en parler; d'ailleurs on en verra la deſcription dans la ſuite de nos Mémoires que M. Jars, correſpondant de l'Académie, va publier.

La ſeconde méthode de raffiner le cuivre, qui eſt la moins

connue, eſt de faire cette opération dans de grands fourneaux à réverbère. Nous en avons vu en Saxe & en Hongrie, mais ils ne valent pas à beaucoup près celui que feu M. Jars a fait conſtruire aux mines de Cheſſy en Lyonnois. Les premiers, ſans donner une auſſi forte chaleur que ce dernier, conſomment beaucoup plus de bois.

Lorſqu'on a une grande quantité de cuivre à raffiner, je conſeille de ſe ſervir de la méthode employée à Cheſſy, décrite dans nos voyages métallurgiques.

Le cuivre noir contenant beaucoup d'argent, eſt toujours plus impur que celui qui provient d'une belle pyrite jaune cuivreuſe, riche en ce métal & qui ne contiendroit point de fin.

Si on raffinoit ce cuivre noir tenant argent, ſans le paſſer à la liquation, il éprouveroit un grand déchet, l'opération ſeroit longue, & le cuivre roſette qui en réſulteroit ne ſeroit même pas bon, il conſerveroit une ſorte de fragilité. Au contraire, la roſette provenant du raffinage des pièces de cuivre deſſéchées eſt belle, malléable & d'un bon débit dans le commerce; partie de ſes impuretés en eſt enlevée par tous les traitemens que ce métal a ſubis avant le raffinage. C'eſt ce qui fait que le déchet du cuivre reſſué ſera moins fort au raffinage, quoiqu'il ait conſervé un peu de plomb, que ſi on l'eût raffiné avant d'avoir paſſé aux procédés de la liquation; mais indépendamment de cela, il ne faut pas s'attendre qu'il donne autant de cuivre roſette que s'il n'eût point ſubi tous ces traitemens, où il s'en détruit une petite partie & l'autre paſſe dans les déchets, ainſi que je l'ai fait remarquer en détaillant chaque opération: mais je le répète, ce cuivre étant bien raffiné eſt d'un meilleur débit, & on a eu l'avantage d'en extraire l'argent.

Les craſſes ou écumes qui proviennent de ces raffinages, contiennent un peu de plomb vitrifié & du cuivre; elles ſont conſervées pour être traitées dans la fonte, qui fait l'objet du chapitre ſuivant.

CHAPITRE VII.

De la fonte des déchets résultant des opérations détaillées dans les chapitres précédens.

LORSQU'ON a passé à la liquation beaucoup de cuivre & qu'on a en magasin une assez grande quantité de crasses ou déchets, tous métalliques, on en tire parti par la fonte dont il s'agit ici.

Cette fonte peut se faire dans un fourneau à manche particulier, ou dans celui qui est destiné au rafraîchissement en observant d'en démolir la doublure, afin de pouvoir en la reconstruisant, donner à l'intérieur du fourneau les dimensions suivantes : 2 pieds $\frac{1}{2}$ de profondeur depuis le devant de la chemise jusqu'au mur mitoyen qui porte la tuyère, 20 pouces de large contre la tuyère, & 1 pied à l'endroit de la chemise ; la hauteur est la même que dans le rafraîchissement, ainsi que la brasque. On fermera également l'ouverture du bas de la chemise avec des charbons, & on y commencera la fonte après qu'on y aura entretenu pendant 7 à 8 heures un petit feu de charbon, ainsi que dans le bassin de l'avant-foyer qui doit être fait comme celui du rafraîchissement. J'ai donné plus d'épaisseur qu'il n'en est nécessaire à la doublure du fourneau de rafraîchissement, *planche 1.re*, afin de pouvoir y en construire une plus mince dans le cas de la fonte des déchets.

L'on a dit que tous les déchets du rafraîchissement de la liquation, du ressuage, & les écumes ou crasses des affinages du plomb & raffinages du cuivre, sont en partie composés de cuivre, de plomb & d'un peu d'argent ; c'est pour en retirer ces métaux qu'on doit fondre ces déchets, & en mouler les parties métalliques en pains ou pièces de liquation comme dans le rafraîchissement. L'on conçoit qu'il n'est pas aisé, dans cette circonstance, de faire des mélanges qui puissent produire des pièces de liquation dont les proportions

en cuivre, plomb & argent, se trouvent égales à celles des pièces qui proviennent d'un rafraîchissement ordinaire; mais il suffira de savoir les quantités de chaque espèce de déchets, afin d'en faire entrer dans les mélanges proportionnellement à ces quantités & d'y ajouter suffisamment de test. Par exemple, on étendra sur l'aire de la fonderie,

1.° Six quintaux d'écumes d'affinage du plomb; 2.° quatre quintaux des scories du ressuage; 3.° deux quintaux de celles de la liquation; 4.° un quintal des crasses ou écumes du raffinage du cuivre; 5.° deux quintaux des déchets provenant du rafraîchissement. Ces 15 quintaux de matière bien mêlés & formant une couche, on étendra également par toute sa surface 30 quintaux de test cassé en morceaux gros comme des noix ou environ; s'il en faut davantage, ce qu'on reconnoîtra à la liquation des premières pièces, on en mettra une plus grande quantité sur les mélanges suivans.

Lorsque le fourneau est chauffé & fermé par devant, on y jette quelques charbons allumés & on le remplit jusqu'au haut de charbon; aussitôt on donne le vent, & on charge deux pleines casserolles du mélange, que l'on recouvre avec une petite corbeille de charbon.

Peu de temps après, on verra couler la matière en fusion dans le bassin de l'avant-foyer; pour lors on met dans ce bassin de la poussière de charbon, afin qu'en couvrant la surface des métaux, le plomb ne perde pas son phlogistique. Cette précaution sera inutile, lorsqu'il y aura assez de scories sur le métal pour garantir sa surface du contact de l'air.

Le bassin étant rempli de ces scories, on les fait couler par l'un des côtés sur la brasque, qui à cet effet doit être en talus.

Les charges doivent se suivre d'assez près & se faire de la manière ci-dessus; mais lorsque le fourneau est échauffé, on porte à chacune de ces charges beaucoup plus de mélange qu'aux premières, sans augmenter la quantité de charbon.

Le bassin de l'avant-foyer étant presque plein de métal, on fait couler de sa surface les crasses qui le surnagent, en

les attirant de côté avec un petit morceau de bois placé au bout d'une verge de fer qui lui sert de manche, & ensuite on perce pour faire couler les métaux dans la poêle de fer pour les y mouler en pains de liquation, ainsi qu'il est dit *chapitre I.*[r], qui traite du rafraîchissement, auquel on aura recours, tant pour l'enduit qu'on doit faire à la poêle que pour le refroidissement des pièces & leur sortie du moule.

Si l'on jugeoit qu'il n'y eût pas dans les déchets la quantité convenable de cuivre pour que les pièces puissent se soutenir dans l'opération de la liquation, on pourra, soit supprimer du test dans les mélanges, soit y ajouter du cuivre tenant argent.

Cette fonte exige que l'on introduise fréquemment par l'œil, un ringard dans le fourneau, avec lequel on détache les amas qui se forment dans le fourneau & qui pourroient l'obstruer. Au reste, cette fonte se conduit comme celle du rafraîchissement.

Lorsqu'il ne reste plus à fondre qu'environ un quart de la première couche du premier mélange, on en fait un semblable, & on continue tant que l'on a des matières à fondre & que le fourneau va bien. Cette fonte ne peut guère être continuée plus de deux ou trois fois vingt-quatre heures, sans que la doublure du fourneau soit très-endommagée par le verre de plomb.

Il faut deux ouvriers à chaque poste pour cette fonte, savoir : un maître & son aide.

Les scories qui proviennent de cette fonte, tiennent encore du métal; c'est pourquoi, lorsque tous les déchets sont fondus, on fait une fonte particulière de ces scories, & on moule pareillement en pains de liquation les métaux qui en résultent, qui, comme dans la précédente, sont du cuivre, du plomb & de l'argent. Nous observerons qu'il ne faut pas jeter les scories qui proviendront de cette refonte de scories, car elles contiennent encore du plomb & même un peu de cuivre, dont on peut tirer parti dans la suite.

Les

Les pains de liquation résultant de l'une & de l'autre de ces fontes, sont liquéfiés de la manière indiquée, *chapitre II*, ou dans le fourneau de reverbère, *planche 4*, dans lequel l'on en fera le ressuage en même temps.

On doit faire les essais de l'œuvre provenant de la liquation de ces pièces, afin de s'assurer de sa teneur en argent. Si toutes les opérations antérieures aux dernières ont été bien faites, cet œuvre ne contiendra tout au plus qu'une once d'argent par quintal; ainsi il n'y auroit pas de profit à le passer à l'affinage en cet état. C'est pourquoi on le conservera pour servir de plomb d'addition dans les mélanges des rafraîchissemens que l'on fera par la suite. En ce cas, on a égard à sa teneur en argent pour faire ses calculs. J'ai dit, en parlant du rafraîchissement, que la litharge convenoit mieux pour servir d'addition que le plomb; c'est pourquoi, dans la circonstance dont il s'agit, je conseillerois de n'ajouter qu'un tiers d'œuvre, & les deux autres tiers en litharge. Je crois que la raison en est palpable, sur-tout si l'on se rappelle ce que j'ai dit, *chapitre I.er*, en traitant de la manière de faire les mélanges dans tous les cas.

CHAPITRE VIII.

Du Raffinage de l'argent affiné.

L'ARGENT, après avoir fait son éclair dans la grande coupelle, contient encore environ un vingtième de plomb. C'est pour lui enlever ce plomb qu'on le passe à une seconde opération, qu'on nomme *raffinage;* car, quand cet argent se trouveroit au titre convenable pour être employé, soit à la monnoie, soit par les orfèvres, le plomb qu'il contient n'est pas un alliage propre à lui donner la solidité requise dans les ouvrages qu'on en fait; il en ternit même l'éclat & empêche qu'il soit sonore : le cuivre lui convient mieux à tous égards.

L'on connoît très-bien en France, la manière de raffiner l'argent ; c'eſt pourquoi je me bornerai à dire qu'en Allemagne on le raffine de deux manières. La première s'opère ſur une coupelle de cendres bien battues dans un cercle de fer, ou dans un poêlon de ce métal ; on place cette coupelle vis-à-vis la tuyère d'un petit ſoufflet de forge, on la recouvre d'une grande moufle qu'on garnit de charbons tout autour ; & afin de ménager ce combuſtible, on le retient avec des briques, dans l'eſpace qu'il doit occuper.

L'autre méthode de raffiner l'argent, & qui eſt en uſage aux mines de Poullaouen en baſſe Bretagne, eſt de placer la coupelle préparée comme deſſus, en deſſous de la voûte d'un petit fourneau de réverbère qui a une chauffe à l'un des bouts, d'où la flamme paſſant par-deſſus la coupelle, ſe rend à une petite cheminée aſpiratoire qui eſt à l'autre bout. Le bois qu'on y emploie doit être très-ſec, & coupé en petits morceaux de la longueur de la chauffe & d'environ un pouce de groſſeur. Du hêtre refendu donne une flamme plus claire & plus vive que le chêne.

C'eſt dans l'une ou l'autre des coupelles dont on vient de parler, qu'on doit raffiner les plateaux d'argent provenant de l'affinage du plomb. Pour cet effet, on le réduit en morceaux qu'on porte ſur la coupelle lorſqu'elle eſt bien ſéchée & le fourneau très-chaud ; l'argent fond en peu de temps ; lorſqu'il eſt parfaitement en bain, on aperçoit de la litharge à la ſurface qui, ſucceſſivement, gagne les bords de la coupelle où elle s'imbibe.

Environ une heure après la parfaite fuſion de l'argent, on voit que ſa ſurface devient plus claire & par conſéquent moins chargée de litharge ; peu de temps après il n'en paroît plus que de petits filets qui vont ſe perdre dans les bords de la coupelle, & enfin quand l'argent eſt au titre de 11 deniers 21 à 22 grains, ſa ſurface eſt très-claire & brillante comme une glace ; alors préſentant un fer froid à un pouce de cette ſurface, ſon image doit parfaitement

paroître dans le bain, & s'il y a encore quelques filets de litharge, on les aperçoit distinctement; s'il n'y en a que très-peu & qu'ils soient petits, c'est une preuve que l'argent est au titre ci-dessus. On cesse le feu & on ouvre le devant du fourneau, afin de modérer la grande chaleur. Lorsqu'il s'est formé une petite pellicule sur l'argent, on y verse de l'eau, d'abord avec précaution, & on en augmente peu-à-peu la quantité. Le plateau étant entièrement figé, on l'enlève tout rouge avec un ciseau de fer, on le porte avec une tenaille sur une enclume, où un homme le tient de champ, tandis qu'un autre frappe à grands coups de masse sur le côté opposé à celui qui est sur l'enclume, & de cette manière on le roule en forme de cornet, afin de pouvoir le faire entrer dans un grand creuset où il est refondu, & ensuite moulé dans une lingotière de fer, chauffée & graissée avec du suif.

On coupe en dessus & en dessous du lingot deux petits boutons d'argent, pour en faire l'essai suivant l'usage, & connoître parfaitement son titre. Un homme accoutumé à raffiner l'argent, ne s'y trompe pas d'un grain de fin.

En pesant le lingot, on est en état de juger du déchet que l'argent a éprouvé.

On donne à la coupelle la capacité nécessaire pour contenir l'argent qu'on a à y raffiner. On peut raffiner dans une coupelle de cinquante jusqu'à cent marcs à la fois, & même plus s'il est nécessaire. Il y a économie de bois & gain de temps, à ne faire qu'un raffinage au lieu de deux.

Des cendres de bois bien préparées suffisent pour la construction des coupelles à raffiner l'argent. Cependant quand on a la commodité de se procurer des os, je conseillerois de les bien calciner, pulvériser, & d'en ajouter environ un quart avec des cendres de bois bien lessivées, & de tamiser sur la coupelle un peu de claire ou cendre d'os la plus fine.

EXPLICATION
DES PLANCHES.

PLANCHE PREMIÈRE.

Fourneau de rafraîchiſſement.

FIGURE PREMIÈRE,

Eſt le plan du fourneau à la hauteur de la tuyère.

1. Murs des côtés du fourneau. 2. Sa doublure. 3. Son intérieur. 4. La tuyère. 5. Encaiſſement de l'avant-foyer. 6. Baſſin de l'avant-foyer. 7. Pierres de taille qui entourent l'avant-foyer. 8. Une pierre ſervant de marche. 9. Une poêle de fer coulé de 3 pouces ½ à 4 pouces de profondeur, dans laquelle on moule les pièces de liquation. Cette poêle doit avoir un pouce de plus de diamètre dans le haut que dans ſon fond, pour en faciliter la ſortie des pièces, & deux pouces & demi à trois pouces d'épaiſſeur tant autour que dans le fond.

FIGURE DEUXIÈME.

Coupe du fourneau.

1. Maçonnerie du derrière du fourneau. 2. Sa doublure. 3. Son intérieur. 4. La tuyère. 5. La braſque. 6. Le baſſin de l'avant-foyer. 7. La chemiſe. 8. L'œil par où la matière ſe rend dans le baſſin. 9. La cheminée. 10. Arceau derrière le fourneau. 11. Marche pour monter à l'avant-foyer. 12. Lit d'argile. 13. Lit de ſcories. 14. Pierres de couvercle. 15. Canaux d'évaporation.

FIGURE TROISIÈME.

Élévation du fourneau vu en devant.

1. Pilliers qui portent la cheminée. 2. La doublure. 3. La chemiſe au bas de laquelle on a laiſſé une ouverture qu'on ferme avec des charbons, ainſi qu'il eſt expliqué *chapitre premier.* 4. Le

bout de la tuyère. 5. Intérieur du fourneau au-dessus des murs de sa doublure qui se termine en talus.

PLANCHE DEUXIÈME.

Fourneau de liquation.

La figure première est le plan du fourneau au rez-de-chaussée.

1. L'un des murs de la fonderie. 2. Autre mur. 3. *Idem* des côtés. 4. La voie ou passage du plomb. 5. Le soupirail. 6. Le bassin de réception.

FIGURE DEUXIÈME.

Plan supérieur du fourneau.

1. Deux murs de la fonderie. 2. Murs des côtés. 3. *Idem* des bouts. 4. L'intérieur du fourneau, garni de deux plaques de fer coulé. 5. Passage entre ces deux plaques, par lequel le plomb s'écoule dans la voie. 6. Sept soupiraux pour donner plus d'activité au charbon enflammé.

FIGURE TROISIÈME.

Coupe en long.

1. Mur de la fonderie. 2. *Idem* des bouts du fourneau. 3. Pavé en talus maçonné en briques au fond de la voie. 4. Canal d'évaporation de l'humidité. 5. La voie. 6. L'une des plaques de fer coulé, vue de côté. 7. Six pièces de liquation. 8. Le soupirail. 9. Le bassin de réception.

FIGURE QUATRIÈME.

Coupe en travers.

1. Mur du bâtiment. 2. Murs des côtés du fourneau. 3. La voie. 4. Les deux plaques de fer coulé. 5. L'intérieur du fourneau. 6. Une des pièces de liquation. 7. Un des soupiraux. 8. Une porte de fer lutée, qui ferme le devant du fourneau lorsque les pièces y sont rangées. 9. Canal d'évaporation.

PLANCHE TROISIÈME.

Fourneau de ressuage.

FIGURE PREMIÈRE.

Plan au rez-de-chaussée.

1. Murs du bâtiment. 2. Murs des côtés du fourneau, construits en moellons. 3. Murs du fond en briques. 4. Petits murs de séparation des voies. 5. Les trois voies. 6. Trois passages pour la flamme & la fumée. 7. Une barre de fer pour soutenir les petits murs de la séparation des voies.

FIGURE DEUXIÈME.

Coupe en long.

1. Mur du bâtiment. 2. *Idem* du fond du fourneau. 3. Un des petits murs de séparation des voies. 4. Pavé en briques posées de champ; ce pavé qui fait le sol de chaque voie est en pente. 5 L'intérieur du fourneau. 6. Une forte plaque de fer fondu plus épaisse dans son milieu que sur ses bords. Il y en a une sur chaque mur de séparation. 7. L'un des trois soupiraux ou cheminées qui aboutissent à la partie supérieure de la voûte. 8. La voûte.

FIGURE TROISIÈME.

Élévation du fourneau vu en devant.

1. Mur du bâtiment. 2. Murs des côtés du fourneau construit en moellons. 3. La doublure en briques. 4. La voûte. 5. L'entrée des trois soupiraux. 6. l'intérieur du fourneau. 7. Les quatre murs de séparation des voies. 8. Ces voies. 9. Quatre plaques de fonte posées sur les murs de séparation. 10. Barre de fer pour la solidité des murs de séparation.

FIGURE QUATRIÈME.

La porte de fer lutée qui par le moyen d'une chaîne passée dans l'anneau 1, & correspondant à un petit treuil ou cabestan, s'enlève & se place à volonté.

Cette porte est destinée à fermer le devant du fourneau depuis

le dessus des plaques de fer cotées 9 dans la *figure troisième* jusqu'à la voûte, ce qui s'exécute lorsque les pains de cuivre liquéfiés sont arrangés dans le fourneau.

PLANCHE QUATRIÈME.

Fourneau pour le double procédé de liquation & du ressuage.

FIGURE PREMIÈRE.

Plan du fourneau à sa base.

1. L'un des murs du bâtiment contre lequel est adossé le fourneau. 2. Murs des côtés du fourneau construits en moellons, chaux & sable. 3. Maçonnerie en briques servant de doublure au fourneau. On y peut employer des pierres, mais il faut qu'elles puissent résister à la chaleur : les briques de cette partie doivent être scellées avec de l'argile ou de la terre à four réfractaire. 4. La voie de la flamme & des matières fondues. 5. Autre voie par où s'écoule le plomb. 6. Emplacement d'une petite porte de tôle lutée, en dessous de laquelle on laisse un petit trou pour le passage du plomb. 7. Le bassin de réception où se rend le plomb à mesure qu'il coule des pains de liquation. 8. La chausse où le bois se place en longueur. 9. Petite porte par où l'on sort les braises, & qu'on tient bouchée avec une brique. 10. Trois petits conduits entre les murs pour procurer une libre sortie aux vapeurs aqueuses qui s'émanent de la maçonnerie, qui sans cela feroit lezarder les murs. 11. Six autres petits conduits pour le même objet.

N.a On pourroit, ce qui feroit encore mieux, pour tenir lieu de tous ces soupiraux, laisser un vide de chaque côté du fourneau, de deux à trois pouces, entre la doublure & les murs, lequel vide prendroit depuis le rez-de-chaussée jusqu'au haut, & qui régneroit dans toute la longueur du fourneau, en observant seulement de laisser de distance en distance, des briques saillantes qui de la doublure iroient s'appuyer contre les murs de maçonnerie cotés 2; ce qui donneroit la solidité requise & empêcheroit la poussée des murs de côté. Je conseille même d'en faire autant dans la construction de tous les fourneaux soit à manche ou autres.

12. Petite porte carrée par laquelle on décrasse la voie avec un petit rouable de fer. Mais au reste, cette ouverture doit être

exactement fermée par une brique ou pierre lutée tout autour avec de la terre; on ne l'ouvrira que lorsqu'il s'agira de décrasser. 13. Murs de la chauffe.

FIGURE DEUXIÈME.

Plan supérieur du fourneau.

1. Murs du bâtiment, 2. Maçonnerie des côtés du fourneau. 3. Murs en brique des bouts du fourneau. 4. Sa doublure. 5. Six plaques de fer coulé, inclinées comme le fait voir la *figure trois.* 6. Les trois ouvertures entre les arceaux pour le passage de la flamme, & par lesquelles le plomb tombe dans la voie. 7. La chauffe. 8. Petits murs de la chauffe, & qu'il sera bon de couvrir avec une plaque de fer fondu de la même forme, sans quoi les briques seroient sujettes à se déranger en mettant le bois.

FIGURE TROISIÈME.

Coupe en long du fourneau.

1. Murs des bouts. 2. Coupe des quatre arceaux, qui doivent être construits en bon granit ou pierre schisteuse qui tiennent au feu sans s'éclater. Au défaut de ces pierres on se servira de briques. Les deux arceaux des extrémités n'ont que la moitié de la longueur des deux autres. 3. Quatre petits murs en briques, & en talus sur les arceaux pour recevoir les plaques de fer. 4. Le dessous des arceaux ou conduits de la flamme. 5. Les trois passages de la flamme entre les arceaux. 6. La voie. 7. Le pavé en pente de la voie. 8. Endroit où se rend le plomb, d'où il coule dans le bassin de réception. 9. La chauffe. 10. Trou par où l'on retire les braises lorsqu'il y en a trop dans la chauffe. 11. Sol de la chauffe. 12. Porte pour retirer les crasses. 13. Les six plaques de fer sur lesquelles reposent les pièces de liquation. 14. Trois pièces de liquation posées de champ sur les plaques de fer. 15. Intérieur du fourneau. 16. La voûte. 17. Les trois petites cheminées. 18. La grande cheminée. 19. Maçonnerie en briques, dans laquelle sont pratiquées les trois petites cheminées.

FIGURE QUATRIÈME.

Coupe en travers du fourneau.

1. Mur du bâtiment. 2. Murs des côtés du fourneau. 3. Sa doublure

doublure en briques. 4. La voûte. 5. Mur qui porte les petites cheminées obliques. 6. L'une de ces cheminées. 7. Passage de la flamme dans cette cheminée. 8. Une brique servant de régistre, que l'on peut avancer ou reculer pour régler le dégré de chaleur. 9. La grande cheminée qui n'a que six pouces intérieurement en ce sens & un pied de largeur. 10. Les briques de couvercle de l'une des petites cheminées. 11. L'intérieur du fourneau. 12. L'un des arceaux en pierres de taille, dont les panneaux des côtés doivent porter d'un pouce sur les murs de la doublure, ainsi que la figure le fait voir. Les lignes ponctuées sur ces arceaux, marquent l'inclinaison des parois pour le passage de la flamme. 13. L'une des plaques de fer vue sur sa longueur. 14. Cinq pièces de liquation placées comme il convient. 15. Le passage de la flamme, où l'on voit la petite porte cotée 12 dans la figure trois 16. La voie par laquelle le plomb coule dans le bassin de réception. 17. Ce bassin. 18. Huit petits soupiraux pour l'évaporation de l'humidité. 19. Pavé de la voie en briques posées de champ, qui doivent être bien scellées afin que le plomb ne puisse pas pénétrer.

FIGURE CINQUIÈME.

L'une des deux portes qu'il faut pour fermer les deux bouts du fourneau, lorsqu'on y a placé les quinze pièces de liquation.

1. Cercle de fer autour de la porte. 2. Trois bandes de fer en travers. 3. Trois autres bandes *idem* en long. 4. Crochet ou anneau de fer, dans lequel on fixera une chaîne qui passera sur une poulie, d'où elle répondra à un petit treuil au moyen duquel on enlèvera facilement cette porte, & on la posera à l'une des embouchures du fourneau sur les petits murs cotés 1, figure trois. 5. Petit trou dans la porte, par lequel on pourra voir ce qui se passera dans le fourneau, & si toutes les pièces ont la chaleur nécessaire; mais on aura soin de la fermer, soit avec une brique ou par une petite porte de tôle posée sur ses gonds.

L'on ne voit que l'extérieur de la porte. La partie qui s'applique contre l'ouverture du fourneau est cachée; elle doit être garnie d'un bon lut retenu par des crochets de fer, qui eux-mêmes tiennent dans des feuilles de tôle attachées aux barres de fer.

FIGURE SIXIÈME.

Deux morceaux de terre bien cuite ou de briques taillées comme la figure l'indique.

Ces pièces sont destinées à tenir les pains de liquation dans une position verticale. Il en faut douze de celle cotée *(a)* & six de celle cotée *(b)* pour les quinze pièces de liquation qui entrent dans une fournée. Celles *b* se placent de manière que la partie cotée 1 porte contre les briques de la voûte du fourneau, & celle 2 repose sur la pièce de liquation qui est dans l'un des côtés.

La pièce de terre cuite cotée *a*, se place de manière que ses extrémités cotées 1 portent sur deux pains ; & la partie 2 qui ne doit avoir que trois pouces de longueur, descend entre ces pains & les empêche de s'approcher.

PLANCHE CINQUIÈME.

Fourneau d'affinage ou de coupelle.

FIGURE PREMIÈRE.

Plan du fourneau au rez-de chaussée.

1. Maçonnerie ou massif de la base du fourneau. 2. Les grands canaux d'évaporation. 3. Murs du cendrier. 4. Le cendrier.

FIGURE DEUXIÈME.

Plan supérieur du fourneau.

1. Mur du pourtour du fourneau. 2. La chauffe avec sa grille. 3. Le passage de la flamme. 4. Porte de la chauffe. 5. Petits canaux pour l'évaporation de l'humidité, que l'on a exprimés par des lignes ponctuées. 6. Voie ou passage de la litharge. 7. Autre ouverture qu'on nomme *bouche à feu*, pour introduire du plomb dans le fourneau à mesure que la litharge tombe sur l'aire de la fonderie. 8. Trou pour placer le canon ou buse de la trompe qui porte le vent dans le fourneau. Si ce sont des soufflets, il faut deux de ces trous pour y placer deux buses.

Fig. 1.

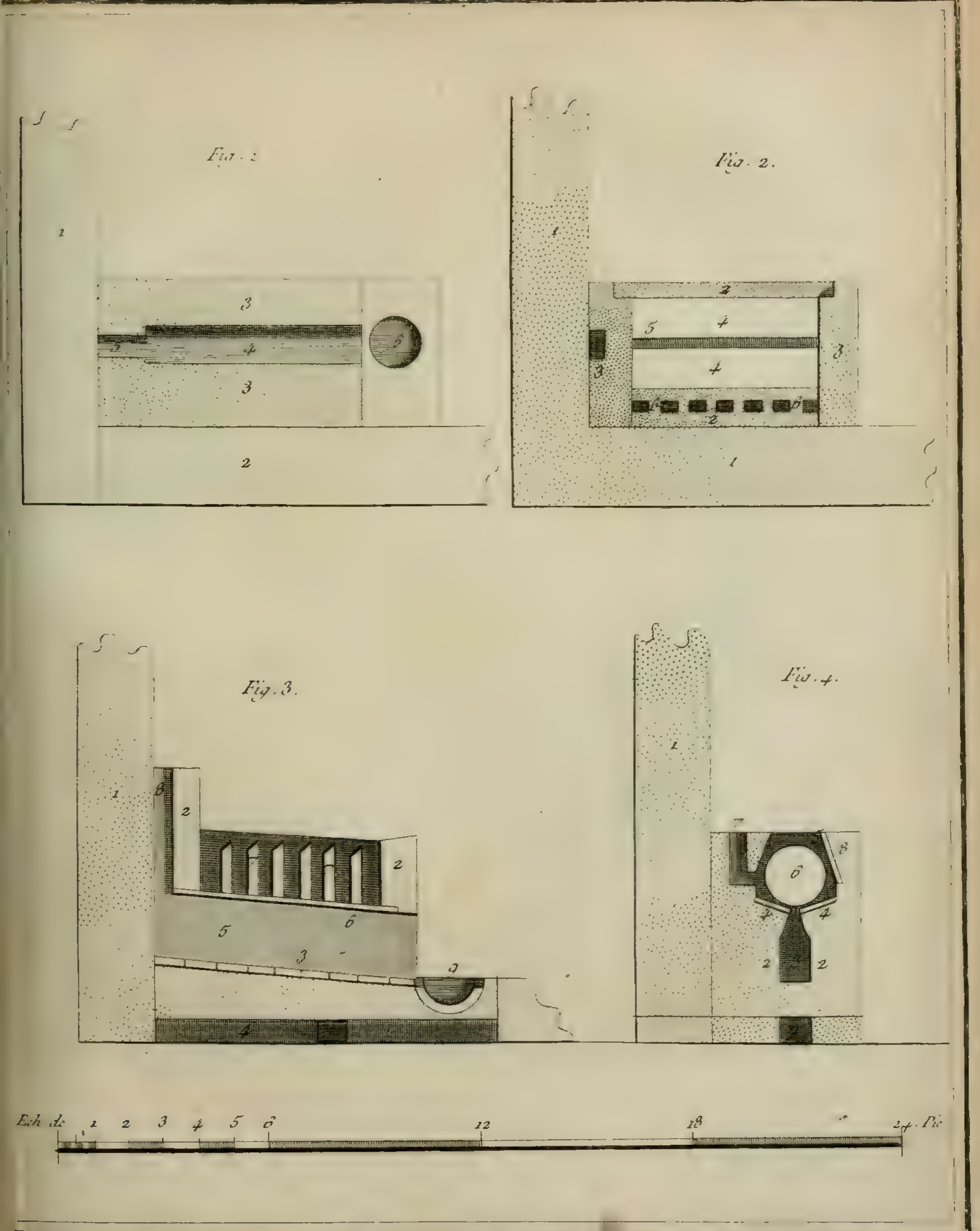
Fig. 2.

Fig. 3.

Ech. de 1 2 3 4 5 6 12 18 24 P.

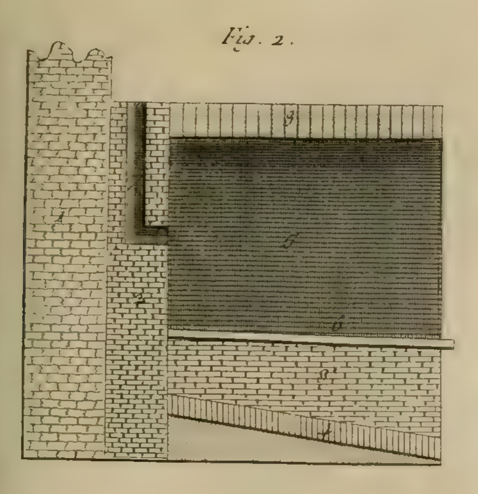
Vis.th Haussard Sculp.

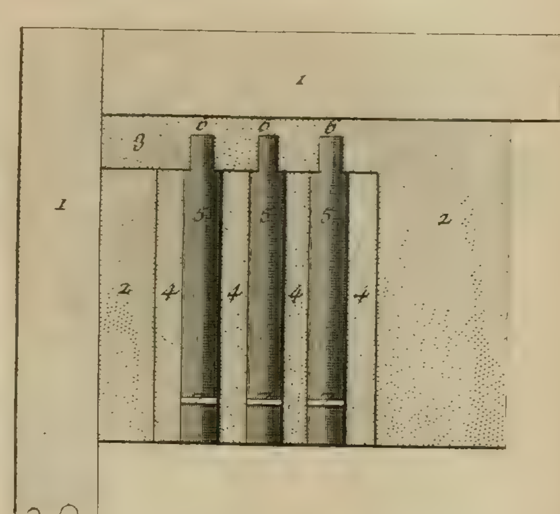


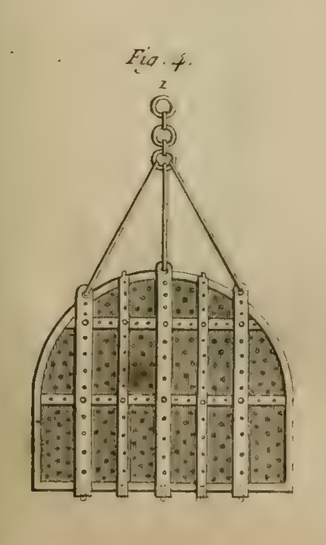


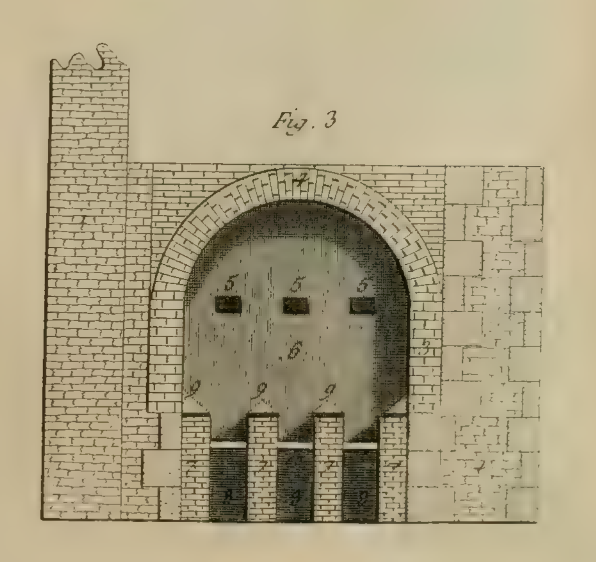
Haussard Sculp.







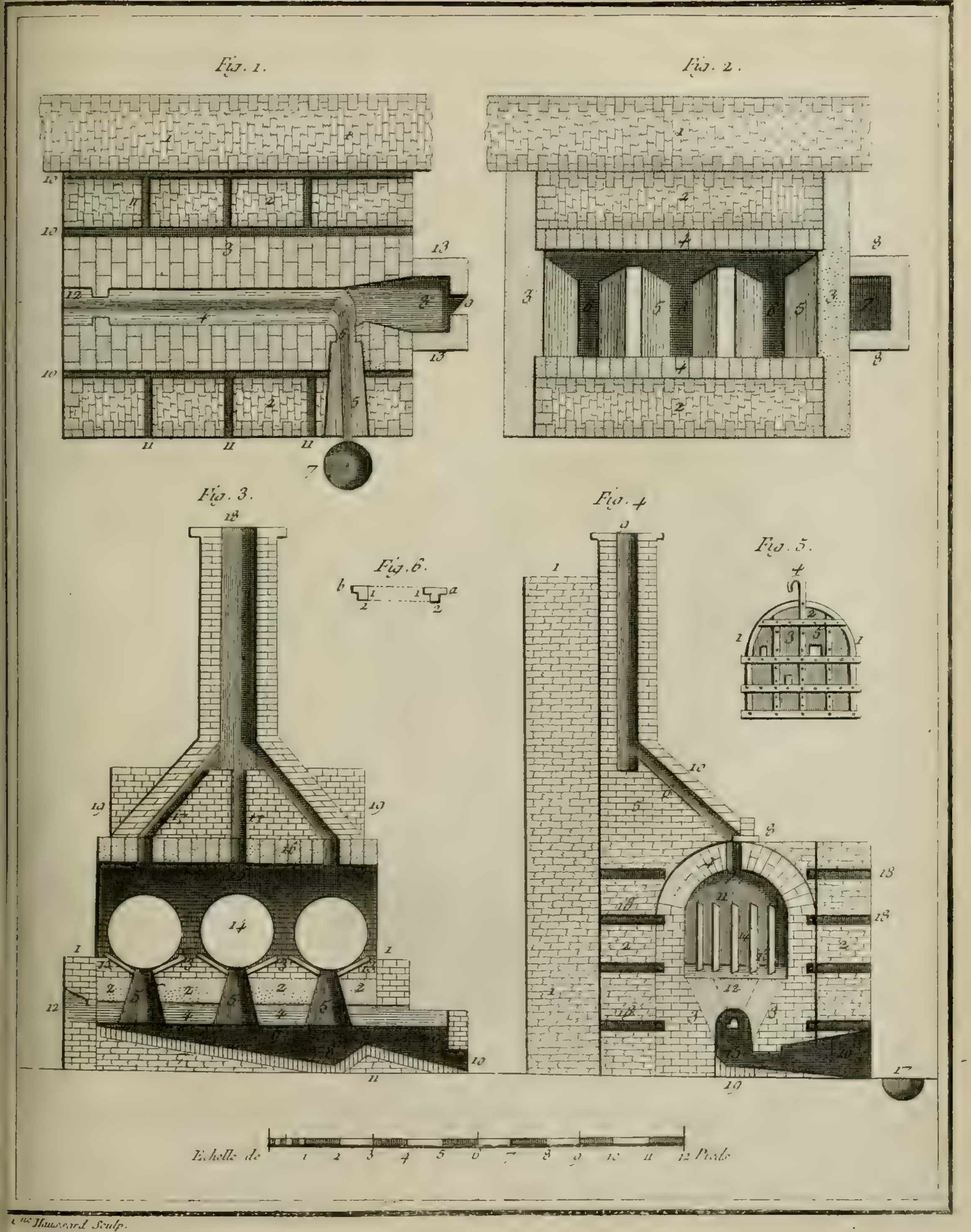




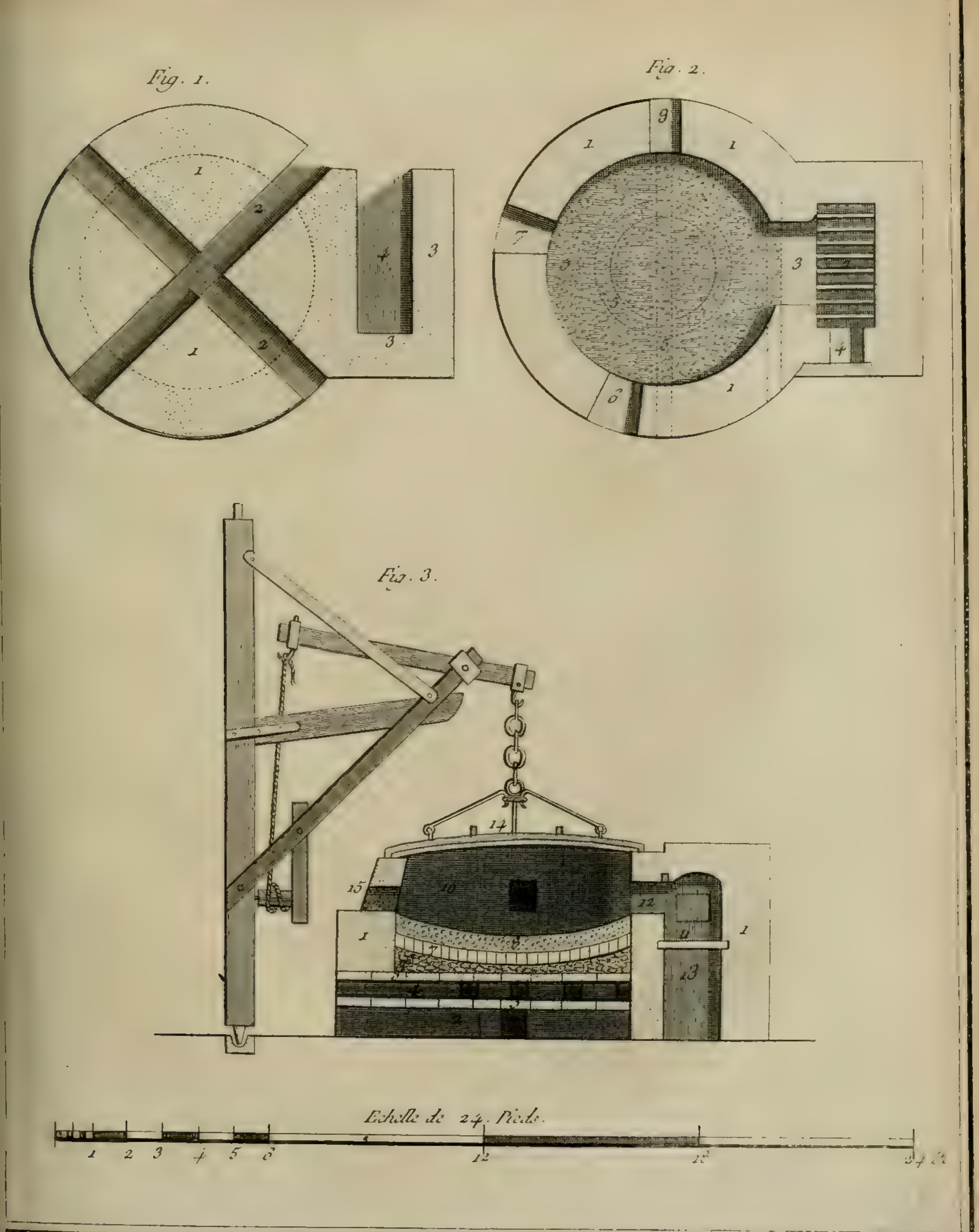
Ech. 1 2 3 4 5 6 12 18 24 Pieds

Hussard Sculp.




Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4
Fig. 5.
Fig. 6.
Echelle de 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 Pieds





Haussard Sculp.



FIGURE TROISIÈME.

Coupe du fourneau & de la chauffe.

1. Murs du fourneau & de la chauffe.
2. Grands canaux d'évaporation.
3. Leurs pierres de couvercle.
4. Petits canaux d'évaporation.
5. Leurs pierres de couvercle.
6. Lit de ſcories.
7. Pavé en briques poſées de champ.
8. Baſſin de la coupelle.
9. Trou de la tuyère.
10. L'intérieur du fourneau.
11. Celui de la chauffe.
12. Le paſſage de la flamme.
13. Le cendrier.
14. Le chapeau de fer avec ſon lut & ſon gruau pour l'enlever.
15. Le trou ou bouche à feu.



NOUVELLES RECHERCHES

Sur les constructions des Équations en différences finies du 1.er ordre, & sur celle des limites de ces Équations.

Par M. CHARLES.

L'INTÉGRALE d'une équation en différences finies du 1.er ordre peut être regardée comme la suite d'un nombre donné de points qui doivent être placés d'après un point aussi donné, suivant certaines conditions. Or, si l'équation est élevée, le nombre des intégrales ou des suites de points qui peuvent vérifier l'équation, dépendra du nombre de points qui doivent être placés d'après ce point donné, & du degré d'élévation de la proposée; de manière que, nommant p ce degré d'élévation & n le nombre des points à placer, on a p^n pour le nombre des intégrales.

Effectivement, soit $\varphi(n)$, ce nombre pour n points, on aura $\varphi(n+1) = p\,\varphi(n)$; donc $\varphi(n) = p^n$.

Si, dans chacune des intégrales, on joint chaque point par une ligne à son consécutif, on aura pour les p^n intégrales p^n polygones, qui pourront les représenter; mais si, dans tous ces polygones, on compare les directions de deux côtés de même n.°, on n'en trouvera que p distinctes.

Maintenant, soit l'équation en différences finies $\Delta y - p \Delta x = \pm \Delta x \sqrt{(q)}$, où Δ est la caractéristique de différentiation. Des 2^n intégrales que peut avoir cette proposée, il y en a trois principales : 1.° celle où le radical est pris toujours en plus; 2.° celle où il est pris toujours en moins; 3.° celle où il est pris alternativement en plus & en moins.

Deux côtés consécutifs des polygones qui représentent les deux premières intégrales, font entre eux un angle

de l'ordre Δx. Il n'en eſt pas ainſi pour le polygone qui repréſente la troiſième intégrale; tellement que, ſi l'équation tombe dans l'infiniment petit, cet angle devient infiniment petit pour les deux premiers polygones, & reſte fini dans le troiſième, ſauf dans certains cas pour certaines valeurs de la conſtante. Les courbes limites dans leſquelles ſe changent les deux premiers polygones, n'ont donc qu'une tangente pour chacun de leurs points; la courbe limite du troiſième polygone, a pour chacun de ſes points deux tangentes qui diffèrent entre elles d'un angle fini.

Reprenons la propoſée du premier ordre $\Delta y - p \Delta x = \pm \Delta x \sqrt{(q)}$, pour en trouver la troiſième intégrale; & à cette fin, multiplions-la par un facteur φ, qui faſſe du premier membre une différentielle complette que j'appellerai Δv; on aura donc:

$$\Delta v = \pm \varphi \Delta x \sqrt{(q)}.$$

Maintenant, ſoit pour abréger $\varphi \Delta x \sqrt{(q)} = \Delta r)$; ſoient encore V, R des valeurs de v & de r correſpondantes & données, $V', V'' .. V^{\mu} = v$, & $R', R'' .. R^{\mu} = r$ des valeurs conſécutives à V & à R; on aura d'abord l'équation indéterminée $v' = v \pm \Delta r$; & les ſuivantes déterminées

$$V' = V + \Delta R;$$
$$V'' = V + \Delta R - \Delta R';$$
$$V''' = V + \Delta R - \Delta R' + \Delta R'';$$
$$V^{\mu} \text{ ou } v = V + \Delta R - \Delta R' + \Delta R'' - \Delta R''' . ; \pm \Delta R^{\mu - 1}:$$

$$\text{donc } v = V + \Delta R \operatorname{cos.} \pi\, 0 + \Delta R' \operatorname{cos.} 1 . \pi + \Delta R'' \operatorname{cos.} 2 \pi .. + \Delta R^{\mu - 1} \operatorname{cos.} (\mu - 1) \pi.$$

Pour avoir la ſomme de μ, terme d'une ſuite, il faut intégrer le terme $(\mu + 1)$, terme qui eſt ici,

$\Delta\ R^{\mu}$ cos. $\pi\ \mu = \Delta\ r$ cos. $\pi\ \mu$:

donc $v = V + \Sigma\ \Delta\ r$ cos. $\pi\ \mu$, & mettant les valeurs en φ, x & y,

$$\Sigma\,\varphi\,(\Delta y - p\,\Delta x) = \Sigma\,[\varphi\,\Delta\,x \text{ cos. } \pi\,\mu\,.\,\sqrt{(q\,.)}] + V.$$

Si la formule tombe dans l'infiniment petit, alors on a:

$$\int \varphi\,(d\,y - p\,d\,x) = V - \frac{\varphi\,d\,x}{2} \text{ cos. } \pi\,\mu\,\sqrt{(q)}.$$

V est la constante. J'avois trouvé déjà sous le nom de *deuxième intégrale*, cette formule que j'appelle ici *troisième*, & qui est aussi complette que les deux premières. J'ai fait voir aussi que les intégrales connues jusqu'ici sous le nom d'*intégrales particulières*, n'étoient que des cas incomplets tirés de cette troisième intégrale, qu'on obtenoit en donnant à la constante une valeur déterminée.

On peut donc regarder cette troisième intégrale comme la véritable origine des intégrales particulières.

Formule d'interpolation.

Comme la formule suivante est très-courte, je l'insère ici, quoique étrangère à l'objet de ce mémoire. Soient donc y & x deux indéterminées; & $2\,\pi$ le rapport de la circonférence au diamètre. S'il falloit trouver une fonction y qui, pour les valeurs de x, 0, 1, 2, &c. devînt Y, Y', Y'', &c. on pourroit écrire:

$$\pi^2\,y = (\text{sin. } \pi\,x)^2\left(\frac{Y}{x^2} + \frac{Y'}{(x-1)^2} + \frac{Y''}{(x-2)^2} + \text{\&c.}\right).$$



MANIÈRE

De construire un Aréomètre qui soit tel, que les pesanteurs spécifiques qu'il indique soient en raison inverse des volumes qu'il mesure, & qui, en conséquence, fait connoître la pesanteur spécifique des liqueurs par sa simple immersion, & sans qu'il soit besoin d'aucun calcul.

Par M. BRISSON.

LA connoissance de la pesanteur spécifique des corps, tant solides que liquides, en est une très-importante en physique. Aussi les physiciens ont-ils de tous temps cherché à se procurer des instrumens propres à leur donner une connoissance si utile. Celui des instrumens qui est le plus commode pour faire connoître les pesanteurs spécifiques des liqueurs, est l'aréomètre. Nous ne pouvons pas disconvenir que celui qu'a employé Fahrenheit, *(a)* ne soit capable de remplir toutes les vues qu'on se propose, puisqu'il mesure toujours des volumes égaux de liqueurs, & que le poids de ces volumes est donné avec exactitude par la somme du poids de l'instrument & du poids dont on le charge pour le faire enfoncer toujours de la même quantité, dans quelque liqueur qu'on le plonge. Il sembleroit donc qu'il n'y a plus de recherches à faire, puisque ce que l'on désire est déjà trouvé depuis long-temps. Mais on reproche à cet instrument de ne pas faire connoître tout d'un coup les différences des pesanteurs spéci-

Déposé à l'Académie le 12, & lu le 26 avril 1769.

(a) L'aréomètre de Fahrenheit est un aréomètre de verre, lesté de mercure à l'ordinaire, mais dont la tige, qui doit être très-courte & très-menue, est surmontée d'un petit bassin propre à recevoir des poids.

ſiques des liqueurs, & d'exiger un calcul pour les rapporter à une table générale. En effet il en exige un, qui n'eſt cependant pas fort pénible : mais il y a beaucoup de gens qui voudroient s'éviter juſqu'au plus petit travail.

On déſireroit donc un aréomètre qui par ſa ſimple immerſion dans les liqueurs, indiquât avec exactitude le rapport de la denſité ou peſanteur ſpécifique de ces liqueurs, à celle de l'eau de pluie ou de l'eau diſtillée. Perſonne juſqu'à préſent n'a donné la conſtruction d'un aréomètre qui puiſſe remplir ces vues.

L'aréomètre qui eſt actuellement en uſage, & qui eſt celui de Boyle, n'eſt point propre à remplir cet objet. Ses degrés ne ſe rapportent à aucun terme connu; & les aréomètres de cette eſpèce, conſtruits par différentes perſonnes, ou par la même en différens temps, ne ſont point comparables entr'eux. Il eſt même très-rare que le même ouvrier faſſe, quoique dans le même temps, pluſieurs de ces inſtrumens, qui, étant plongés dans les mêmes liqueurs, s'y tiennent tous au même degré. On ne doit pas en être étonné; car les degrés de ces ſortes d'aréomètres ſont des parties égales en longueur, & cependant leurs tiges ſont rarement cylindriques, & plus rarement encore en même rapport avec le reſte de l'inſtrument.

L'aréomètre qu'a imaginé M. de Montigny, pour connoître les différens degrés de pureté des eaux-de-vie, ſera très-propre à répondre à ſes vues, lorſqu'il ſera conſtruit avec exactitude & ſuivant les règles qu'il a établies; mais il n'eſt propre qu'à cela, & ne peut point faire connoître les peſanteurs ſpécifiques des liqueurs.

L'aréomètre de M. Baumé, dont il a donné la conſtruction dans les papiers publics, (*b*) & qu'il deſtine auſſi à faire connoître le degré de rectification des liqueurs ſpiritueuſes, ne peut pas non plus faire connoître la

(1) Voyez l'Avant-Coureur, N.os 45, 50, 51 & 52, *année 1768;* & N.° 2, *année 1769.*

peſanteur

pesanteur spécifique de ces liqueurs; & en effet, je ne crois pas que M. Baumé lui-même le regarde comme propre à cet effet, quoique le titre de son ouvrage l'annonce. Mais on peut dire de plus, que cet aréomètre n'est pas même propre à remplir l'objet qu'il s'est proposé, c'est-à-dire, à faire connoître, sur-tout avec la précision qu'il promet, le dégré de rectification des liqueurs spiritueuses; car il gradue son aréomètre, en le plongeant d'abord dans neuf parties d'eau, dans lesquelles il a fait dissoudre une partie de sel marin bien sec : la partie de la tige à laquelle il cesse de se plonger dans cette liqueur, est marquée *zéro*. Il plonge ensuite l'instrument dans de l'eau très-pure; ce qui lui donne le dixième degré. Il divise donc l'intervalle qui sépare ces deux termes en dix parties égales, qui forment autant de degrés; ensuite il se sert de cette échelle pour graduer de la même manière, jusqu'à cinquante degrés, le reste de la longueur de la tige. Il est aisé de voir combien cette graduation est défectueuse. 1.° L'aréomètre est gradué au moyen de l'eau chargée de sel, pour essayer des liqueurs spiritueuses. Il est bien vrai que dans le mélange de l'eau, soit avec les sels, soit avec les esprits ardens, il y a pénétration dans les deux cas; mais elle n'est ni égale ni proportionnelle. 2.° Les degrés sont des parties égales : il faut pour cela que la tige soit bien cylindrique; ce qui arrive rarement. Mais supposons-la telle : l'aréomètre n'en sera pas plus exact; car les degrés ne doivent pas être égaux : la raison en est que les degrés d'enfoncement de l'instrument étant proportionnels à la densité de la liqueur, ne le sont pas au degré de rectification; puisque ce degré de rectification n'est pas lui-même proportionnel à cette densité, comme je l'ai prouvé dans mon Mémoire *sur le rapport des différentes densités de l'esprit-de-vin avec ses différens degrés de pureté.* (c).

(c) Voyez les Mémoires de l'Académie, *année 1768.*

Il eſt vrai que M. Baumé donne une table qui marque les degrés d'enfoncement de l'aréomètre dans différens mélanges d'eau & d'eſprit-de-vin, au moyen de laquelle on pourroit un peu rectifier les erreurs que les défauts de ſon inſtrument peuvent cauſer. Mais cette table eſt-elle exacte ? il eſt bien difficile de le croire, lorſqu'on voit que dans quelques-uns des mélanges elle marque l'enfoncement de l'aréomètre toujours au même degré, ſoit que ces mélanges ſoient refroidis par la glace, ou même à 5, à 10 & à 15 degrés au deſſous de la congélation, ſoit qu'ils ſoient échauffés à 5, à 10, à 15, à 20, & même à 25 degrés au-deſſus de la congélation; comme ſi 40 degrés de différence dans la température de ces liqueurs, ne cauſoient aucun changement dans leurs denſités; ce qui n'eſt ni vrai ni vraiſemblable.

Un aréomètre gradué ſur les principes de M. Baumé, quand il n'auroit pas les défauts dont nous venons de parler, ne ſeroit pas non plus propre à faire connoître avec préciſion, comme il le prétend, la quantité de matières ſalines contenues dans l'eau, à moins que ce ne fût une eau chargée uniquement du même ſel que celui dont on ſe ſeroit ſervi pour graduer l'inſtrument; car la pénétration qui a lieu dans la diſſolution des différens ſels dans l'eau, n'eſt pas la même pour toutes ſortes de ſels : ce qui produiroit dans ces diſſolutions des denſités différentes, quoiqu'elles tinſſent toutes la même quantité de ſels.

M. le Ratz de Lanthenée vient de publier une petite brochure in-12 de 32 pages, dans laquelle il donne la conſtruction d'un aréomètre qui a quelque rapport à celui de Fahrenheit, mais qui eſt beaucoup moins bien conçu, & qui, à une conſtruction beaucoup plus difficile, réunit tous les inconvéniens qu'on reproche à ce dernier.

M. le Ratz veut 1.° que tous les aréomètres pèſent exactement 1000 grains, quels que ſoient leurs volumes, & qu'on marque l'endroit de leur tige où ceſſe leur

immerſion dans l'eau de pluie : qu'enſuite on les plonge une ſeconde fois, en les chargeant d'un poids connu, comme, par exemple, de 40 grains ; & qu'on diviſe en 40 parties égales, l'intervalle qui ſépare les points des deux immerſions; ce qui ſervira d'échelle pour graduer le reſte de la longueur de la tige. 2.° Si l'aréomètre pèſe plus ou moins de 1000 grains, M. le Ratz veut que le poids dont on le charge enſuite pour former l'échelle de 40 degrés, ſoit proportionnel au poids de l'aréomètre : difficulté très-conſidérable pour l'ouvrier qui ſeroit chargé de la conſtruction de ces inſtrumens.

On voit par-là que M. le Ratz a affaire à des volumes de liqueurs qu'il regarde comme égaux, & qui ne le ſeront qu'autant que la tige de l'aréomètre ſera parfaitement cylindrique; ce qui ne ſe trouvera preſque jamais. Enſuite, comme les denſités ſont en raiſon inverſe des volumes, il faudra faire une règle de proportion, pour avoir le rapport de la denſité d'une liqueur à celle de l'eau de pluie. Cet aréomètre, comme celui de Fahrenheit, qui meſure toujours des volumes égaux, dans quelque liqueur qu'on le plonge, n'eſt point ſujet aux erreurs que peut cauſer l'irrégularité de la tige, & comme il eſt d'ailleurs d'une conſtruction beaucoup plus ſimple & plus facile, il eſt préférable à tous égards.

M. le Ratz ayant ſenti ces difficultés de conſtruction, a cherché à ſimplifier celle de ſes aréomètres; & il prétend y être parvenu, en diſant que des aréomètres de différens poids ſeront toujours comparables entr'eux (c'eſt-à-dire ſans doute qu'ils marqueront les mêmes degrés dans les mêmes liqueurs), ſi l'intervalle qui ſépare les points des deux immerſions dont nous avons parlé ci-deſſus, eſt diviſé en autant de parties égales ou degrés qu'on aura employé de grains pour produire la ſeconde immerſion : ce qui eſt une erreur ſi groſſière, qu'elle n'a pas beſoin d'être démontrée. Il eſt vrai qu'il dit enſuite, qu'il faut avoir égard au poids de l'aréomètre; mais cela rentre

dans l'ordre de celui de Fahrenheit; & ſon inſtrument, non plus que ce dernier, ne peut pas faire connoître ſans calcul, le rapport des denſités des liqueurs.

D'après ce que nous venons de dire, il eſt clair que nous n'avons point d'aréomètre qui puiſſe, par ſa ſeule immerſion, donner le rapport de la peſanteur ſpécifique des liqueurs à celle de l'eau de pluie ou de l'eau diſtillée. Je crois avoir trouvé la manière d'en faire tels qu'on les déſire; & c'eſt d'un aréomètre de cette eſpèce dont je vais donner la conſtruction.

Un aréomètre que l'on plonge dans des liqueurs de différentes denſités ou peſanteurs ſpécifiques, meſure toujours des volumes de liqueurs, qui ſont en raiſon inverſe de ces denſités; en ſorte que le volume de la partie plongée dans une liqueur, excède autant le volume de la partie plongée dans une autre liqueur plus peſante, que la denſité de cette dernière liqueur excède la denſité de la première. Ainſi, pour conſtruire un aréomètre qui, par ſa ſimple immerſion, faſſe connoître le rapport de la denſité d'une liqueur quelconque à celle de l'eau de pluie, il s'agit de trouver un moyen de connoître exactement le rapport du volume de la partie plongée dans l'eau de pluie, au volume de la partie plongée dans cette liqueur.

De même qu'un aréomètre, dont le poids demeure toujours le même, s'enfonce dans une liqueur moins denſe plus qu'il ne le fait dans une liqueur plus denſe, & que ce *plus* eſt toujours en raiſon inverſe des denſités de ces liqueurs; de même auſſi un aréomètre qu'on charge ſucceſſivement de différens poids, s'enfonce davantage dans la même liqueur, à meſure qu'il eſt plus chargé; & la quantité dont il s'enfonce de plus dans ce dernier cas, eſt toujours proportionnelle aux poids dont il eſt chargé. Si donc on plonge dans l'eau un aréomètre qui pèſe, par exemple, 9 gros, & enſuite 10 gros, le volume de la partie plongée dans le premier cas ſera au volume de la partie plongée dans le ſecond, comme 9 eſt à 10. Si

ensuite, réduisant l'aréomètre à son premier poids (que j'appelle *poids primitif*), savoir, à 9 gros, on le plonge dans une liqueur moins dense que l'eau, & qu'il s'y enfonce jusqu'au point où il s'est enfoncé dans l'eau lorsqu'il pesoit 10 gros, il est clair que le volume de cette liqueur, mesuré par l'aréomètre, sera au volume de l'eau mesuré par l'aréomètre de même poids, comme 10 est à 9; & puisque les densités sont en raison inverse des volumes, on conclura avec raison que la densité de cette liqueur est à celle de l'eau comme 9 est à 10.

C'est sur ce principe qu'est fondée la manière de graduer un aréomètre qui soit propre à faire connoître, par la simple immersion, & sans exiger aucun calcul, le rapport de la densité ou pesanteur spécifique des différentes liqueurs à celle de l'eau de pluie ou de l'eau distillée. C'est donc en ajoutant au poids primitif de l'aréomètre, ou en retranchant de ce poids des quantités connues, & qui soient dans un rapport convenable pour chaque degré avec ce poids primitif, & en plongeant l'aréomètre, ainsi chargé ou déchargé dans l'eau de pluie ou l'eau distillée, qu'on peut en déterminer exactement chaque degré. C'est de ces quantités convenables pour chaque degré, que j'ai formé des Tables, au moyen desquelles on pourra graduer de pareils aréomètres.

Voici la règle suivant laquelle ces Tables sont construites.

Supposons qu'on connoît exactement le poids de l'aréomètre, qui exprime la densité de l'eau:

Soit a le poids primitif de l'aréomètre, ou la densité de l'eau. Soit b le volume d'eau qu'il déplace. Soit x le volume qu'il déplaceroit de plus que le volume b, dans un fluide dont la densité seroit à celle de l'eau :: $n : a$, n étant plus petit que a.

Alors, selon les principes de l'hydrostatique, le poids absolu du volume du nouveau fluide déplacé, est égal au poids absolu de l'aréomètre, c'est-à-dire, au poids du volume d'eau qu'il déplace.

Or le volume déplacé dans le fluide dont la densité est n, est $b + x$ par la supposition; donc, puisque la densité est n, son poids absolu est $(b + x) \times n$.

Par la même raison, le poids absolu de l'aréomètre, ou du volume d'eau qu'il déplace, est $b \times a$; il faut donc que $(b + x) \times n = b \times a$, ou que $bn + nx = ba$, d'où l'on tire $x = \frac{ba - bn}{n}$, que l'on peut changer en $x = b \times \frac{a - n}{n}$.

Cette règle fait voir qu'alors la quantité dont l'aréomètre doit plonger de plus, est une portion du volume qu'il déplace dans l'eau, exprimée par une fraction qui a pour numérateur la différence des densités de l'eau & du fluide dont il s'agit, & pour dénominateur la densité de ce dernier.

Nous avons supposé n plus petit que a, & par conséquent qu'alors l'aréomètre plongeroit plus que dans l'eau. Si n étoit plus grand que a, il est évident, à l'inspection de la valeur $x = b \times \frac{a - n}{n}$, qu'alors la valeur de x seroit négative; ce qui doit être en effet, puisqu'alors l'aréomètre doit moins plonger que dans l'eau. Toute la différence qu'il y a, est donc qu'au lieu d'ajouter au volume déplacé dans l'eau, ou ce qui est la même chose, au poids primitif de l'aréomètre, il faut au contraire en retrancher; mais la quantité que l'on doit retrancher, se détermine toujours par la même règle

Ainsi la quantité qu'il faut ajouter au poids primitif de l'aréomètre, ou qu'il en faut retrancher, est une fraction de ce poids, qui a pour dénominateur la densité que doit indiquer l'aréomètre, ou le degré que l'on cherche, & pour numérateur la différence de cette densité à la densité de l'eau.

En supposant donc, comme nous le faisons, que la densité de l'eau est égale à 1000, le dénominateur de cette frac-

tion eſt le degré que l'on cherche ; & le numérateur eſt ce qui manque au dénominateur pour faire 1000, ou l'excès du dénominateur ſur 1000 ; & lorſque le dénominateur eſt moindre que 1000, qui eſt le cas où *n* eſt plus petit que *a*, la quantité exprimée par la fraction, eſt additive : mais lorſque le dénominateur excède 1000, qui eſt le cas où *n* eſt plus grand que *a*, cette quantité eſt ſouſtractive.

On prendra donc un aréomètre ordinaire de verre *A B* (*fig. 1 & 2*), convenablement leſté de mercure en *B*, & à la tige duquel on donnera une longueur ſuffiſante pour le nombre de degrés qu'on veut lui faire porter. On paſſera dans ſa tige le petit rouleau de papier qui doit porter ſa graduation, enſuite on pèſera l'inſtrument avec des balances bien exactes, & on tiendra note de ce poids qui eſt celui que j'appelle *poids primitif;* cela fait, on plongera l'aréomètre dans l'eau de pluie ou l'eau diſtillée; & l'endroit *C* de la tige où il ceſſera de s'enfoncer, ſera marqué 1000; pour avoir les autres degrés, on ajoutera ou l'on retranchera, pour chacun, les quantités indiquées par les tables.

Il faut avoir ſoin de conſerver l'eau dans un même degré de température, pendant tout le temps qu'on en ſera uſage pour graduer l'inſtrument; & l'on s'aſſurera de ce degré au moyen d'un bon thermomètre. On pourra choiſir tel degré qu'on voudra; mais je crois qu'il conviendroit d'en prendre un qu'on puiſſe aiſément ſe procurer en toutes les ſaiſons. J'ai fait voir ailleurs que 14 du thermomètre de M. de Réaumur eſt un degré convenable pour cela.

Il ſuffira de chercher par l'épreuve les degrés de 10 en 10; & l'on diviſera en 10 parties égales, qui formeront autant de degrés, l'intervalle qui ſépare chaque dixaine. Ces degrés ne devroient pas être égaux entr'eux : ainſi cette manière de graduer l'inſtrument occaſionnera une erreur, mais qui peut être négligée, parce qu'elle eſt très-petite ; elle ne peut pas aller à un dix-milliéme. Le défaut

de régularité dans la figure de la tige, & le trait de plume qui marquera chaque degré sur l'échelle, peuvent occasionner une erreur plus grande. Si l'on veut éviter cette petite erreur, on cherchera par l'épreuve tous les degrés les uns après les autres.

Toutes les fois qu'on plonge l'aréomètre, il faut avoir soin que toute sa surface soit bien nette, afin que l'eau s'y applique immédiatement. Il faut aussi l'obliger à se plonger un peu plus qu'il ne le doit, afin que, sa tige étant mouillée, il se mette ensuite bien en équilibre avec l'eau; sans cette précaution, il arriveroit souvent que les petits frottemens qu'éprouve sa tige, en s'enfonçant dans l'eau, le soutiendroient moins plongé qu'il ne doit l'être; de sorte que la partie plongée mesureroit un volume de liqueur moins pesant que l'instrument.

Il n'est pas possible que le même aréomètre puisse servir pour toutes les liqueurs, moins dense & plus dense que l'eau : lorsqu'on en feroit usage pour celles de ces dernières dont la densité différeroit beaucoup de celle de l'eau, il ne manqueroient pas de faire la bascule. Il vaut donc mieux faire des aréomètres dont les uns soient destinés à faire connoître les pesanteurs spécifiques des liqueurs moins denses que l'eau, & les autres à faire connoître les pesanteurs spécifiques des liqueurs plus denses que l'eau. Les premiers *(fig. 1)* seront lestés de manière qu'ils s'enfoncent dans l'eau à quelques lignes seulement au-dessus de la boule; & là sera marqué le terme 1000. Dans ceux-ci, la communication de la grosse boule à la petite dans laquelle est le mercure, sera fermée, parce que, pour les graduer, on n'a rien à retrancher de leur poids primitif; on n'a seulement qu'à y ajouter. Mais ceux qui seront destinés à faire connoître les pesanteurs spécifiques des liqueurs plus denses que l'eau *(fig. 2)*, seront lestés, de manière qu'ils s'enfoncent dans l'eau jusqu'à quelques lignes de l'extrémité supérieure de leur tige, & là sera marqué le terme 1000. Dans ceux-ci, la communication de la grosse à la petite boule

boule sera ouverte, parce que, pour les graduer, on aura besoin de retrancher de leur poids primitif.

J'ai donné à mes tables une étendue plus que suffisante; afin qu'elles puissent servir pour toutes sortes de liqueurs, depuis les plus légères jusqu'aux plus pesantes ; de sorte qu'un aréomètre dont la graduation seroit aussi étendue que les tables, pourroit servir à faire connoître les pesanteurs spécifiques de toutes les liqueurs, depuis l'éther, jusqu'à l'huile de vitriol concentrée exclusivement; & afin de rendre ces tables d'un usage plus commode, j'ai réduit à leur plus simple expression toutes les fractions qui en étoient susceptibles.

Dans presque tous les aréomètres que l'on a imaginés jusqu'ici, les degrés sont des parties égales. Un peu de réflexion fait voir que cela ne doit pas être ainsi : & la nouvelle construction que je viens de donner, le prouve évidemment. Tous ces degrés vont en augmentant de grandeur d'un côté & en diminuant de l'autre, à mesure qu'ils s'éloignent de 1000; c'est-à-dire, que ces dégrés ont d'autant plus d'étendue, qu'ils indiquent les pesanteurs spécifiques de liqueurs moins denses, & qu'ils ont au contraire d'autant moins d'étendue, qu'ils indiquent les pesanteurs spécifiques de liqueurs plus denses; de sorte que les degrés voisins de celui qui indique la pesanteur spécifique de l'éther, sont environ cinq fois aussi étendus que le sont les degrés voisins de celui qui indique la pesanteur spécifique de l'huile de vitriol concentrée.

Pour rendre la graduation de ces aréomètres la plus exacte qu'il est possible, je ne connois point de moyen plus efficace, & en même temps plus commode que celui dont s'est servi M. de Montigny pour graduer les aréomètres qu'il a destinés à éprouver les eaux de vie. Le voici en peu de mots.

Sur le bord d'un vase *V V* (*fig. 3*) de verre ou de métal, dont la profondeur sera un peu plus grande que la longueur totale de l'aréomètre *A B*, on fixera vertica-

lement une tige quarrée d'ivoire, *D G,* dont la longueur excédera au moins d'un pouce celle de la tige de l'aréomètre, & sur laquelle glissera un curseur de cuivre perpendiculaire à la tige quarrée, & bien dressé dans sa partie inférieure.

On remplira ce vase d'eau de pluie ou d'eau distillée, & l'on aura soin de l'entretenir toujours également plein; on y plongera l'aréomètre (supposons que c'en soit un destiné uniquement pour les liqueurs moins denses que l'eau), il ne s'y enfoncera qu'à quelques lignes au-dessus de la boule, comme en *C.* Le curseur *E F* étant en *g*, & touchant immédiatement l'extrémité supérieure *A* de la tige, on tirera un petit trait de crayon *g*, que l'on marquera 1000. Ensuite on ajoutera au poids primitif de l'aréomètre, une quantité de mercure qui égale $\frac{1}{99}$ de ce poids. L'aréomètre s'enfoncera encore d'une petite quantité, par exemple jusqu'en *H*; on fera descendre d'autant le curseur *E F*, de façon qu'il touche encore immédiatement l'extrémité supérieure *A* de la tige. Le curseur étant fixé en *h*, on tirera encore un trait de crayon *h*, que l'on marquera 990. Après avoir ôté le mercure qu'on avoit ajouté, on ajoutera de nouveau au poids primitif de l'aréomètre une quantité de mercure qui égale $\frac{1}{49}$ de ce poids. L'aréomètre s'enfoncera d'une quantité un peu plus grande que la précédente fois, par exemple, jusqu'en *I.* Après avoir fait descendre d'autant le curseur *E F*, comme ci-dessus, on tirera un troisième trait de crayon *i*, qu'on marquera 980, & ainsi de suite, en continuant d'ajouter, pour chaque dixaine, la quantité de poids indiquée par la table.

L'opération finie, la graduation de l'aréomètre se trouvera sur la tige quarrée, d'ivoire, *D G;* il faudra la transporter sur le petit rouleau de papier qu'on aura mis dans la tige de l'instrument; ce que l'on fera aisément au moyen d'un compas. Mais il faudra avoir soin de la placer sur le rouleau de papier dans le sens opposé à celui dans lequel elle se trouve sur la tige quarrée; c'est-à-dire, que le terme 1000, au lieu d'être en haut, sera en bas en *C*;

& les autres termes en montant, comme on le voit en *C*, *D*, *E*, *F*, (*Fig. 1.*). Enfuite en enfonçant plus ou moins le rouleau de papier dans la tige de l'aréomètre, on fera répondre exactement le terme 1000 à l'endroit *C* de la tige qui fe trouvera à la furface de l'eau, l'aréomètre n'étant chargé que de fon poids primitif.

Suppofons maintenant qu'on ait à graduer un aréomètre deftiné à pefer les liqueurs plus denfes que l'eau; il fera lefté de manière qu'il s'enfonce dans l'eau jufqu'à quelques lignes de l'extrémité fupérieure *A* de fa tige. On fera donc gliffer le curfeur *E F* en en bas, jufqu'à ce qu'il vienne toucher immédiatement l'extrémité de la tige de l'aréomètre; & là on tirera un trait de crayon, que l'on marquera 1000, comme nous l'avons dit ci-deffus. Enfuite en retranchant fucceffivement du poids primitif de l'aréomètre $\frac{1}{101}$, $\frac{1}{51}$, $\frac{3}{103}$, &c. on marquera en montant fur la tige quarrée *G D*, les termes 1010, 1020, 1030, &c.

Lorfque la graduation fera achevée, on la tranfportera de la tige quarrée fur le rouleau de papier, en obfervant de l'y placer, comme nous l'avons dit pour l'autre aréomètre, dans le fens oppofé à celui dans lequel elle fe trouve fur la tige quarrée, comme on le voit en *C*, *H*, *I*, *K*, (*fig. 2*).

Il eft néceffaire que le pied du curfeur n'embraffe la tige quarrée d'ivoire que fur trois côtés, ayant feulement deux petits rebords, qui faffent reffort fur le quatrième, afin qu'en faifant gliffer le curfeur le long de la tige quarrée, on n'efface pas les traits de crayon qu'on aura marqué précédemment.

Je ne dois pas finir ce Mémoire, fans avertir que l'opération de graduer ces fortes d'aréomètres, demande trop d'exactitude & de foins pour qu'on puiffe en confier la conftruction à des ouvriers ordinaires. Ce doit être un ouvrage réfervé aux phyficiens qui défireront fe procurer de pareils inftrumens.

PREMIÈRE TABLE.

Quantités qu'il faut ajouter au poids de l'Aréomètre, ou retrancher de ce poids pour le graduer de 10 en 10 degrés.

Pour	Ajoutez			
700 degrés	$\frac{300}{700}$	ou	$\frac{3}{7}$	du poids de l'aréomètre.
710.....	$\frac{290}{710}$	..	$\frac{29}{71}$	
720.....	$\frac{280}{720}$	..	$\frac{7}{18}$	
730.....	$\frac{270}{730}$	..	$\frac{27}{73}$	
740.....	$\frac{260}{740}$	..	$\frac{13}{37}$	
750.....	$\frac{250}{750}$	..	$\frac{1}{3}$	
760.....	$\frac{240}{760}$	..	$\frac{6}{19}$	
770.....	$\frac{230}{770}$	..	$\frac{23}{77}$	
780.....	$\frac{220}{780}$	..	$\frac{11}{39}$	
790.....	$\frac{210}{790}$	..	$\frac{21}{79}$	
800.....	$\frac{200}{800}$	..	$\frac{1}{4}$	
810.....	$\frac{190}{810}$	..	$\frac{19}{81}$	
820.....	$\frac{180}{820}$	..	$\frac{9}{41}$	
830.....	$\frac{170}{830}$	..	$\frac{17}{83}$	
840.....	$\frac{160}{840}$	..	$\frac{4}{21}$	
850.....	$\frac{150}{850}$	..	$\frac{3}{17}$	
860.....	$\frac{140}{860}$	..	$\frac{7}{43}$	
870.....	$\frac{130}{870}$	..	$\frac{13}{87}$	
880.....	$\frac{120}{880}$	..	$\frac{3}{22}$	
890.....	$\frac{110}{890}$	..	$\frac{11}{89}$	
900.....	$\frac{100}{900}$	..	$\frac{1}{9}$	
910.....	$\frac{90}{910}$	..	$\frac{9}{91}$	
920.....	$\frac{80}{920}$	..	$\frac{2}{23}$	
930.....	$\frac{70}{930}$	..	$\frac{7}{93}$	

Pour	Ajoutez			
940 degrés	$\frac{60}{940}$	ou	$\frac{3}{47}$	du poids de l'aréomètre.
950.....	$\frac{50}{950}$	..	$\frac{1}{19}$	
960.....	$\frac{40}{960}$	..	$\frac{1}{24}$	
970.....	$\frac{30}{970}$	..	$\frac{3}{97}$	
980.....	$\frac{20}{980}$	..	$\frac{1}{49}$	
990.....	$\frac{10}{990}$	..	$\frac{1}{99}$	
1000.............			ôtez	
1010.....	$\frac{10}{1010}$	..	$\frac{1}{101}$	
1020.....	$\frac{20}{1020}$	..	$\frac{1}{51}$	
1030.....	$\frac{30}{1030}$	..	$\frac{3}{103}$	
1040.....	$\frac{40}{1040}$	..	$\frac{1}{26}$	
1050.....	$\frac{50}{1050}$	..	$\frac{1}{21}$	
1060.....	$\frac{60}{1060}$	..	$\frac{3}{53}$	
1070.....	$\frac{70}{1070}$	..	$\frac{7}{107}$	
1080.....	$\frac{80}{1080}$	..	$\frac{2}{27}$	
1090.....	$\frac{90}{1090}$	..	$\frac{9}{109}$	
1100.....	$\frac{100}{1100}$	..	$\frac{1}{11}$	
1110.....	$\frac{110}{1110}$	..	$\frac{11}{111}$	
1120.....	$\frac{120}{1120}$	..	$\frac{3}{28}$	
1130.....	$\frac{130}{1130}$	..	$\frac{13}{113}$	
1140.....	$\frac{140}{1140}$	..	$\frac{7}{57}$	
1150.....	$\frac{150}{1150}$	..	$\frac{3}{23}$	
1160.....	$\frac{160}{1160}$	..	$\frac{4}{29}$	
1170.....	$\frac{170}{1170}$	..	$\frac{17}{117}$	

Pour	Otez			Pour	Otez		
1180.....	$\frac{180}{1180}$	ou	$\frac{9}{59}$ du poids de	1470 degrés	$\frac{470}{1470}$	ou	$\frac{47}{147}$ du poids de
1190.....	$\frac{190}{1190}$	..	$\frac{19}{119}$ l'aréomètre.	1480.....	$\frac{480}{1480}$	..	$\frac{12}{37}$ l'aréomètre.
1200.....	$\frac{200}{1200}$	..	$\frac{1}{6}$	1490.....	$\frac{490}{1490}$	..	$\frac{49}{149}$
1210.....	$\frac{210}{1210}$	..	$\frac{21}{121}$	1500.....	$\frac{500}{1500}$	..	$\frac{1}{3}$
1220.....	$\frac{220}{1220}$	..	$\frac{11}{61}$	1510.....	$\frac{510}{1510}$	..	$\frac{51}{151}$
1230.....	$\frac{230}{1230}$	..	$\frac{23}{123}$	1520.....	$\frac{520}{1520}$	..	$\frac{13}{38}$
1240.....	$\frac{240}{1240}$	..	$\frac{6}{31}$	1530.....	$\frac{530}{1530}$	..	$\frac{53}{153}$
1250.....	$\frac{250}{1250}$	..	$\frac{1}{5}$	1540.....	$\frac{540}{1540}$	..	$\frac{27}{77}$
1260.....	$\frac{260}{1260}$	..	$\frac{13}{63}$	1550.....	$\frac{550}{1550}$	..	$\frac{11}{31}$
1270.....	$\frac{270}{1270}$	..	$\frac{27}{127}$	1560.....	$\frac{560}{1560}$	..	$\frac{14}{39}$
1280.....	$\frac{280}{1280}$	..	$\frac{7}{32}$	1570.....	$\frac{570}{1570}$	..	$\frac{57}{157}$
1290.....	$\frac{290}{1290}$	..	$\frac{29}{129}$	1580.....	$\frac{580}{1580}$	..	$\frac{29}{79}$
1300.....	$\frac{300}{1300}$	..	$\frac{3}{13}$	1590.....	$\frac{590}{1590}$	..	$\frac{59}{159}$
1310.....	$\frac{310}{1310}$	..	$\frac{31}{131}$	1600.....	$\frac{600}{1600}$	..	$\frac{3}{8}$
1320.....	$\frac{320}{1320}$	..	$\frac{8}{33}$	1610.....	$\frac{610}{1610}$	..	$\frac{61}{161}$
1330.....	$\frac{330}{1330}$	..	$\frac{33}{133}$	1620.....	$\frac{620}{1620}$	..	$\frac{31}{81}$
1340.....	$\frac{340}{1340}$	..	$\frac{17}{67}$	1630.....	$\frac{630}{1630}$	..	$\frac{63}{163}$
1350.....	$\frac{350}{1350}$	..	$\frac{7}{27}$	1640.....	$\frac{640}{1640}$	..	$\frac{16}{41}$
1360.....	$\frac{360}{1360}$	..	$\frac{9}{34}$	1650.....	$\frac{650}{1650}$	..	$\frac{13}{33}$
1370.....	$\frac{370}{1370}$	..	$\frac{37}{137}$	1660.....	$\frac{660}{1660}$	..	$\frac{33}{83}$
1380.....	$\frac{380}{1380}$	..	$\frac{19}{69}$	1670.....	$\frac{670}{1670}$	..	$\frac{67}{167}$
1390.....	$\frac{390}{1390}$	..	$\frac{39}{139}$	1680.....	$\frac{680}{1680}$	..	$\frac{17}{42}$
1400.....	$\frac{400}{1400}$	..	$\frac{2}{7}$	1690.....	$\frac{690}{1690}$	..	$\frac{69}{169}$
1410.....	$\frac{410}{1410}$	..	$\frac{41}{141}$	1700.....	$\frac{700}{1700}$	..	$\frac{7}{17}$
1420.....	$\frac{420}{1420}$	..	$\frac{21}{71}$	1710.....	$\frac{710}{1710}$	..	$\frac{71}{171}$
1430.....	$\frac{430}{1430}$	..	$\frac{43}{143}$	1720.....	$\frac{720}{1720}$	..	$\frac{18}{43}$
1440.....	$\frac{440}{1440}$	..	$\frac{11}{36}$	1730.....	$\frac{730}{1730}$	..	$\frac{73}{173}$
1450.....	$\frac{450}{1450}$	..	$\frac{9}{29}$	1740.....	$\frac{740}{1740}$	..	$\frac{37}{87}$
1460.....	$\frac{460}{1460}$	..	$\frac{23}{73}$	1750.....	$\frac{750}{1750}$	..	$\frac{3}{7}$

SECONDE TABLE.

Quantités qu'il faut ajouter au poids de l'Aréomètre, ou retrancher de ce poids pour le graduer de degré en degré.

Pour	Ajoutez			
700 degrés	$\frac{300}{700}$	ou	$\frac{3}{7}$	du poids de l'aréomètre.
701	$\frac{299}{701}$			
702	$\frac{298}{702}$	..	$\frac{149}{351}$	
703	$\frac{297}{703}$			
704	$\frac{296}{704}$	..	$\frac{37}{88}$	
705	$\frac{295}{705}$	..	$\frac{59}{141}$	
706	$\frac{294}{706}$	..	$\frac{147}{353}$	
707	$\frac{293}{707}$			
708	$\frac{292}{708}$	..	$\frac{73}{177}$	
709	$\frac{291}{709}$			
710	$\frac{290}{710}$	..	$\frac{29}{71}$	
711	$\frac{289}{711}$			
712	$\frac{288}{712}$	..	$\frac{36}{89}$	
713	$\frac{287}{713}$			
714	$\frac{286}{714}$	..	$\frac{143}{357}$	
715	$\frac{285}{715}$	..	$\frac{57}{143}$	
716	$\frac{284}{716}$	..	$\frac{71}{179}$	
717	$\frac{283}{717}$			
718	$\frac{282}{718}$	..	$\frac{141}{359}$	
719	$\frac{281}{719}$			
720	$\frac{280}{720}$	..	$\frac{7}{18}$	
721	$\frac{279}{721}$			
722	$\frac{278}{722}$	..	$\frac{139}{361}$	
723	$\frac{277}{723}$			

Pour	Ajoutez			
724 degrés	$\frac{276}{724}$	ou	$\frac{69}{181}$	du poids de l'aréomètre.
725	$\frac{275}{725}$	..	$\frac{11}{29}$	
726	$\frac{274}{726}$	..	$\frac{137}{363}$	
727	$\frac{273}{727}$			
728	$\frac{272}{728}$	..	$\frac{34}{91}$	
729	$\frac{271}{729}$			
730	$\frac{270}{730}$	..	$\frac{27}{73}$	
731	$\frac{269}{731}$			
732	$\frac{268}{732}$	..	$\frac{67}{183}$	
733	$\frac{267}{733}$			
734	$\frac{266}{734}$	..	$\frac{133}{367}$	
735	$\frac{265}{735}$	..	$\frac{53}{147}$	
736	$\frac{264}{736}$	..	$\frac{33}{92}$	
737	$\frac{263}{737}$			
738	$\frac{262}{738}$	..	$\frac{131}{369}$	
739	$\frac{261}{739}$			
740	$\frac{260}{740}$	..	$\frac{13}{37}$	
741	$\frac{259}{741}$			
742	$\frac{258}{742}$	..	$\frac{129}{371}$	
743	$\frac{257}{743}$			
744	$\frac{256}{744}$	..	$\frac{32}{93}$	
745	$\frac{255}{745}$	..	$\frac{51}{149}$	
746	$\frac{254}{746}$	..	$\frac{127}{373}$	
747	$\frac{253}{747}$			

Pour	Ajoutez		
748 degrés	$\frac{252}{748}$	ou $\frac{63}{187}$	du poids de l'aréomètre.
749	$\frac{251}{749}$		
750	$\frac{250}{750}$	. . $\frac{1}{3}$	
751	$\frac{249}{751}$		
752	$\frac{248}{752}$	. . $\frac{31}{94}$	
753	$\frac{247}{753}$		
754	$\frac{246}{754}$	. . $\frac{123}{377}$	
755	$\frac{245}{755}$	. . $\frac{49}{101}$	
756	$\frac{244}{756}$	. . $\frac{61}{189}$	
757	$\frac{243}{757}$		
758	$\frac{242}{758}$	. . $\frac{121}{379}$	
759	$\frac{241}{759}$		
760	$\frac{240}{760}$	. . $\frac{6}{19}$	
761	$\frac{239}{761}$		
762	$\frac{238}{762}$	. . $\frac{119}{381}$	
763	$\frac{237}{763}$		
764	$\frac{236}{764}$	. . $\frac{59}{191}$	
765	$\frac{235}{765}$	. . $\frac{47}{153}$	
766	$\frac{234}{766}$	. . $\frac{117}{383}$	
767	$\frac{233}{767}$		
768	$\frac{232}{768}$	. . $\frac{29}{96}$	
769	$\frac{231}{769}$		
770	$\frac{230}{770}$	. . $\frac{23}{77}$	
771	$\frac{229}{771}$		
772	$\frac{228}{772}$	. . $\frac{57}{193}$	
773	$\frac{227}{773}$		
774	$\frac{226}{774}$	. . $\frac{113}{387}$	
775	$\frac{225}{775}$	. . $\frac{45}{155}$	
776	$\frac{224}{776}$	. . $\frac{28}{97}$	

Pour	Ajoutez		
777 degrés	$\frac{223}{777}$		du poids de l'aréomètre.
778	$\frac{222}{778}$	ou $\frac{111}{389}$	
779	$\frac{221}{779}$		
780	$\frac{220}{780}$	. . $\frac{11}{39}$	
781	$\frac{219}{781}$		
782	$\frac{218}{782}$	. . $\frac{109}{391}$	
783	$\frac{217}{783}$		
784	$\frac{216}{784}$	. . $\frac{27}{98}$	
785	$\frac{215}{785}$	. . $\frac{43}{157}$	
786	$\frac{214}{786}$	. . $\frac{107}{393}$	
787	$\frac{213}{787}$		
788	$\frac{212}{788}$	. . $\frac{53}{197}$	
789	$\frac{211}{789}$		
790	$\frac{210}{790}$	. . $\frac{21}{79}$	
791	$\frac{209}{791}$		
792	$\frac{208}{792}$	. . $\frac{26}{99}$	
793	$\frac{207}{793}$		
794	$\frac{206}{794}$	. . $\frac{103}{397}$	
795	$\frac{205}{795}$	. . $\frac{41}{159}$	
796	$\frac{204}{796}$	. . $\frac{51}{199}$	
797	$\frac{203}{797}$		
798	$\frac{202}{798}$	. . $\frac{101}{399}$	
799	$\frac{201}{799}$		
800	$\frac{200}{800}$	. . $\frac{1}{4}$	
801	$\frac{199}{801}$		
802	$\frac{198}{802}$	. . $\frac{99}{401}$	
803	$\frac{197}{803}$		
804	$\frac{196}{804}$	. . $\frac{49}{201}$	
805	$\frac{195}{805}$	. . $\frac{39}{161}$	

Pour	Ajoutez	ou		Pour	Ajoutez	ou	
806 degrés	$\frac{194}{806}$	ou $\frac{97}{403}$	du poids de l'aréomètre.	835.....	$\frac{165}{835}$	ou $\frac{33}{167}$	du poids de l'aréomètre.
807.....	$\frac{193}{807}$			836.....	$\frac{164}{836}$	.. $\frac{41}{209}$	
808.....	$\frac{192}{808}$	.. $\frac{24}{101}$		837.....	$\frac{163}{837}$		
809.....	$\frac{191}{809}$			838.....	$\frac{162}{838}$	.. $\frac{81}{419}$	
810.....	$\frac{190}{810}$	.. $\frac{19}{81}$		839.....	$\frac{161}{839}$		
811.....	$\frac{189}{811}$			840.....	$\frac{160}{840}$	.. $\frac{4}{21}$	
812.....	$\frac{188}{812}$	.. $\frac{47}{303}$		841.....	$\frac{159}{841}$		
813.....	$\frac{187}{813}$			842.....	$\frac{158}{842}$	.. $\frac{79}{421}$	
814.....	$\frac{186}{814}$	.. $\frac{93}{407}$		843.....	$\frac{157}{843}$		
815.....	$\frac{185}{815}$	.. $\frac{37}{163}$		844.....	$\frac{156}{844}$	.. $\frac{39}{211}$	
816.....	$\frac{184}{816}$	.. $\frac{23}{102}$		845.....	$\frac{155}{845}$	.. $\frac{31}{169}$	
817.....	$\frac{183}{817}$			846.....	$\frac{154}{846}$	.. $\frac{77}{423}$	
818.....	$\frac{182}{818}$	.. $\frac{91}{409}$		847.....	$\frac{153}{847}$		
819.....	$\frac{181}{819}$			848.....	$\frac{152}{848}$	.. $\frac{19}{106}$	
820.....	$\frac{180}{820}$	.. $\frac{9}{41}$		849.....	$\frac{151}{849}$		
821.....	$\frac{179}{821}$			850.....	$\frac{150}{850}$	.. $\frac{3}{77}$	
822.....	$\frac{178}{822}$	.. $\frac{89}{411}$		851.....	$\frac{149}{851}$		
823.....	$\frac{177}{823}$			852.....	$\frac{148}{852}$	.. $\frac{37}{213}$	
824.....	$\frac{176}{824}$	.. $\frac{22}{103}$		853.....	$\frac{147}{853}$		
825.....	$\frac{175}{825}$	.. $\frac{7}{33}$		854.....	$\frac{146}{854}$	.. $\frac{73}{427}$	
826.....	$\frac{174}{826}$	.. $\frac{87}{413}$		855.....	$\frac{145}{855}$	.. $\frac{29}{171}$	
827.....	$\frac{173}{827}$			856.....	$\frac{144}{856}$	.. $\frac{18}{107}$	
828.....	$\frac{172}{828}$	.. $\frac{43}{207}$		857.....	$\frac{143}{857}$		
829.....	$\frac{171}{829}$			858.....	$\frac{142}{858}$	.. $\frac{71}{429}$	
830.....	$\frac{170}{830}$	.. $\frac{17}{83}$		859.....	$\frac{141}{859}$		
831.....	$\frac{169}{831}$			860.....	$\frac{140}{860}$	.. $\frac{7}{43}$	
832.....	$\frac{168}{832}$	.. $\frac{21}{104}$		861.....	$\frac{139}{861}$		
833.....	$\frac{167}{833}$			862.....	$\frac{138}{862}$	.. $\frac{69}{431}$	
834.....	$\frac{166}{834}$	.. $\frac{83}{417}$		863.....	$\frac{137}{863}$		

Pour

Pour	Ajoutez			
864 degrés	$\frac{136}{864}$	ou	$\frac{17}{108}$	du poids de l'aréomètre.
865.....	$\frac{135}{865}$	..	$\frac{27}{173}$	
866.....	$\frac{134}{866}$	..	$\frac{67}{433}$	
867.....	$\frac{133}{867}$			
868.....	$\frac{132}{868}$	..	$\frac{33}{217}$	
869.....	$\frac{131}{869}$			
870.....	$\frac{130}{870}$	..	$\frac{13}{87}$	
871.....	$\frac{129}{871}$			
872.....	$\frac{128}{872}$	..	$\frac{16}{109}$	
873.....	$\frac{127}{873}$			
874.....	$\frac{126}{874}$	..	$\frac{63}{437}$	
875.....	$\frac{125}{875}$	..	$\frac{1}{7}$	
876.....	$\frac{124}{876}$	..	$\frac{31}{219}$	
877.....	$\frac{123}{877}$			
878.....	$\frac{122}{878}$	..	$\frac{61}{439}$	
879.....	$\frac{121}{879}$			
880.....	$\frac{120}{880}$	..	$\frac{3}{22}$	
881.....	$\frac{119}{881}$			
882.....	$\frac{118}{882}$	..	$\frac{59}{441}$	
883.....	$\frac{117}{883}$			
884.....	$\frac{116}{884}$	..	$\frac{29}{221}$	
885.....	$\frac{115}{885}$	..	$\frac{23}{177}$	
886.....	$\frac{114}{886}$	..	$\frac{57}{443}$	
887.....	$\frac{113}{887}$			
888.....	$\frac{112}{888}$	..	$\frac{14}{111}$	
889.....	$\frac{111}{889}$			
890.....	$\frac{110}{890}$	..	$\frac{11}{89}$	
891.....	$\frac{109}{891}$			
892.....	$\frac{108}{892}$	..	$\frac{27}{223}$	
893 degrés	$\frac{107}{893}$			du poids de l'aréomètre.
894.....	$\frac{106}{894}$	ou	$\frac{53}{447}$	
895.....	$\frac{105}{895}$	..	$\frac{21}{179}$	
896.....	$\frac{104}{896}$	..	$\frac{13}{112}$	
897.....	$\frac{103}{897}$			
898.....	$\frac{102}{898}$	..	$\frac{51}{449}$	
899.....	$\frac{101}{899}$			
900.....	$\frac{100}{900}$	..	$\frac{1}{9}$	
901.....	$\frac{99}{901}$			
902.....	$\frac{98}{902}$	..	$\frac{49}{451}$	
903.....	$\frac{97}{903}$			
904.....	$\frac{96}{904}$	..	$\frac{12}{113}$	
905.....	$\frac{95}{905}$	..	$\frac{19}{181}$	
906.....	$\frac{94}{906}$	..	$\frac{47}{453}$	
907.....	$\frac{93}{907}$			
908.....	$\frac{92}{908}$	..	$\frac{23}{227}$	
909.....	$\frac{91}{909}$			
910.....	$\frac{90}{910}$	..	$\frac{9}{91}$	
911.....	$\frac{89}{911}$			
912.....	$\frac{88}{912}$	..	$\frac{11}{114}$	
913.....	$\frac{87}{913}$			
914.....	$\frac{86}{914}$	..	$\frac{43}{457}$	
915.....	$\frac{85}{915}$	..	$\frac{17}{183}$	
916.....	$\frac{84}{916}$	..	$\frac{21}{229}$	
917.....	$\frac{83}{917}$			
918.....	$\frac{82}{918}$	..	$\frac{41}{459}$	
919.....	$\frac{81}{919}$			
920.....	$\frac{80}{920}$	..	$\frac{2}{23}$	
921.....	$\frac{79}{921}$			

Pour	Ajoutez	ou	
922 degrés	$\frac{78}{922}$	ou $\frac{39}{461}$	du poids de l'aréomètre.
923	$\frac{77}{923}$		
924	$\frac{76}{924}$	. . $\frac{19}{231}$	
925	$\frac{75}{925}$	. . $\frac{3}{37}$	
926	$\frac{74}{926}$	. . $\frac{37}{463}$	
927	$\frac{73}{927}$		
928	$\frac{72}{928}$	. . $\frac{9}{116}$	
929	$\frac{71}{929}$		
930	$\frac{70}{930}$	. . $\frac{7}{93}$	
931	$\frac{69}{931}$		
932	$\frac{68}{932}$	. . $\frac{17}{233}$	
933	$\frac{67}{933}$		
934	$\frac{66}{934}$	. . $\frac{33}{467}$	
935	$\frac{65}{935}$	. . $\frac{13}{187}$	
936	$\frac{64}{936}$	. . $\frac{8}{117}$	
937	$\frac{63}{937}$		
938	$\frac{62}{938}$	. . $\frac{31}{469}$	
939	$\frac{61}{939}$		
940	$\frac{60}{940}$	. . $\frac{3}{47}$	
941	$\frac{59}{941}$		
942	$\frac{58}{942}$	. . $\frac{29}{471}$	
943	$\frac{57}{943}$		
944	$\frac{56}{944}$	. . $\frac{7}{118}$	
945	$\frac{55}{945}$	. . $\frac{11}{189}$	
946	$\frac{54}{946}$	. . $\frac{27}{473}$	
947	$\frac{53}{947}$		
948	$\frac{52}{948}$	. . $\frac{13}{237}$	
949	$\frac{51}{949}$		
950	$\frac{50}{950}$	. . $\frac{1}{19}$	
Pour	**Ajoutez**		
951 degrés	$\frac{49}{951}$		du poids de l'aréomètre.
952	$\frac{48}{952}$	ou $\frac{6}{119}$	
953	$\frac{47}{953}$		
954	$\frac{46}{954}$	. . $\frac{23}{477}$	
955	$\frac{45}{955}$	. . $\frac{9}{191}$	
956	$\frac{44}{956}$	. . $\frac{11}{239}$	
957	$\frac{43}{957}$		
958	$\frac{42}{958}$	. . $\frac{21}{479}$	
959	$\frac{41}{959}$		
960	$\frac{40}{960}$	. . $\frac{1}{24}$	
961	$\frac{39}{961}$		
962	$\frac{38}{962}$	. . $\frac{19}{481}$	
963	$\frac{37}{963}$		
964	$\frac{36}{964}$	. . $\frac{9}{241}$	
965	$\frac{35}{965}$	. . $\frac{7}{193}$	
966	$\frac{34}{966}$	. . $\frac{17}{483}$	
967	$\frac{33}{967}$		
968	$\frac{32}{968}$	. . $\frac{4}{121}$	
969	$\frac{31}{969}$		
970	$\frac{30}{970}$	. . $\frac{3}{97}$	
971	$\frac{29}{971}$		
972	$\frac{28}{972}$	. . $\frac{7}{243}$	
973	$\frac{27}{973}$		
974	$\frac{26}{974}$	. . $\frac{13}{487}$	
975	$\frac{25}{975}$	. . $\frac{1}{39}$	
976	$\frac{24}{976}$	. . $\frac{3}{122}$	
977	$\frac{23}{977}$		
978	$\frac{22}{978}$	. . $\frac{11}{489}$	
979	$\frac{21}{979}$		

Pour	Ajoutez			
980 degrés	$\frac{20}{980}$	ou	$\frac{1}{49}$	du poids de l'aréomètre.
981	$\frac{19}{981}$			
982	$\frac{18}{982}$	. .	$\frac{9}{491}$	
983	$\frac{17}{983}$			
984	$\frac{16}{984}$	. .	$\frac{2}{123}$	
985	$\frac{15}{985}$	. .	$\frac{3}{197}$	
986	$\frac{14}{986}$	. .	$\frac{7}{493}$	
987	$\frac{13}{987}$			
988	$\frac{12}{988}$	. .	$\frac{3}{247}$	
989	$\frac{11}{989}$			
990	$\frac{10}{990}$	. .	$\frac{1}{99}$	
991	$\frac{9}{991}$			
992	$\frac{8}{992}$	. .	$\frac{1}{124}$	
993	$\frac{7}{993}$			
994	$\frac{6}{994}$	. .	$\frac{3}{497}$	
995	$\frac{5}{995}$	. .	$\frac{1}{199}$	
996	$\frac{4}{996}$	. .	$\frac{1}{249}$	
997	$\frac{3}{997}$			
998	$\frac{2}{998}$	. .	$\frac{1}{499}$	
999	$\frac{1}{999}$			
1000	ôtez			
1001	$\frac{1}{1001}$			
1002	$\frac{2}{1002}$	ou	$\frac{1}{501}$	
1003	$\frac{3}{1003}$			
1004	$\frac{4}{1004}$	. .	$\frac{1}{251}$	
1005	$\frac{5}{1005}$	. .	$\frac{1}{201}$	
1006	$\frac{6}{1006}$	. .	$\frac{3}{503}$	
1007	$\frac{7}{1007}$			
1008	$\frac{8}{1008}$	. .	$\frac{1}{126}$	

Pour	Otez			
1009 degrés	$\frac{9}{1009}$			du poids de l'aréomètre.
1010	$\frac{10}{1010}$	ou	$\frac{1}{101}$	
1011	$\frac{11}{1011}$			
1012	$\frac{12}{1012}$	. .	$\frac{3}{253}$	
1013	$\frac{13}{1013}$			
1014	$\frac{14}{1014}$	. .	$\frac{7}{507}$	
1015	$\frac{15}{1015}$	. .	$\frac{3}{203}$	
1016	$\frac{16}{1016}$	. .	$\frac{2}{127}$	
1017	$\frac{17}{1017}$			
1018	$\frac{18}{1018}$	. .	$\frac{9}{509}$	
1019	$\frac{19}{1019}$			
1020	$\frac{20}{1020}$	. .	$\frac{1}{51}$	
1021	$\frac{21}{1021}$			
1022	$\frac{22}{1022}$	. .	$\frac{11}{511}$	
1023	$\frac{23}{1023}$			
1024	$\frac{24}{1024}$	. .	$\frac{3}{128}$	
1025	$\frac{25}{1025}$	. .	$\frac{1}{41}$	
1026	$\frac{26}{1026}$	. .	$\frac{13}{513}$	
1027	$\frac{27}{1027}$			
1028	$\frac{28}{1028}$	. .	$\frac{7}{257}$	
1029	$\frac{29}{1029}$			
1030	$\frac{30}{1030}$	. .	$\frac{3}{103}$	
1031	$\frac{31}{1031}$			
1032	$\frac{32}{1032}$	. .	$\frac{4}{129}$	
1033	$\frac{33}{1033}$			
1034	$\frac{34}{1034}$	. .	$\frac{17}{517}$	
1035	$\frac{35}{1035}$	. .	$\frac{7}{207}$	
1036	$\frac{36}{1036}$	. .	$\frac{9}{259}$	
1037	$\frac{37}{1037}$			

Pour	Otez		
1038 degrés	$\frac{38}{1038}$	ou $\frac{19}{519}$	du poids de l'aréomètre.
1039.....	$\frac{39}{1039}$		
1040.....	$\frac{40}{1040}$	.. $\frac{1}{26}$	
1041.....	$\frac{41}{1041}$		
1042.....	$\frac{42}{1042}$	.. $\frac{21}{521}$	
1043.....	$\frac{43}{1043}$		
1044.....	$\frac{44}{1044}$	.. $\frac{11}{261}$	
1045.....	$\frac{45}{1045}$	.. $\frac{9}{209}$	
1046.....	$\frac{46}{1046}$	.. $\frac{23}{523}$	
1047.....	$\frac{47}{1047}$		
1048.....	$\frac{48}{1048}$	.. $\frac{6}{131}$	
1049.....	$\frac{49}{1049}$		
1050.....	$\frac{50}{1050}$	.. $\frac{1}{21}$	
1051.....	$\frac{51}{1051}$		
1052.....	$\frac{52}{1052}$	.. $\frac{13}{263}$	
1053.....	$\frac{53}{1053}$		
1054.....	$\frac{54}{1054}$	.. $\frac{27}{527}$	
1055.....	$\frac{55}{1055}$	.. $\frac{11}{211}$	
1056.....	$\frac{56}{1056}$	.. $\frac{7}{232}$	
1057.....	$\frac{57}{1057}$		
1058.....	$\frac{58}{1058}$	.. $\frac{29}{529}$	
1059.....	$\frac{59}{1059}$		
1060.....	$\frac{60}{1060}$	.. $\frac{3}{53}$	
1061.....	$\frac{61}{1061}$		
1062.....	$\frac{62}{1062}$	.. $\frac{31}{531}$	
1063.....	$\frac{63}{1063}$		
1064.....	$\frac{64}{1064}$	.. $\frac{8}{133}$	
1065.....	$\frac{65}{1065}$	.. $\frac{13}{213}$	
1066.....	$\frac{66}{1066}$	.. $\frac{33}{533}$	
Pour	Otez		
1067 degrés	$\frac{67}{1067}$		du poids de l'aréomètre.
1068.....	$\frac{68}{1068}$	ou $\frac{17}{267}$	
1069.....	$\frac{69}{1069}$		
1070.....	$\frac{70}{1070}$	.. $\frac{7}{107}$	
1071.....	$\frac{71}{1071}$		
1072.....	$\frac{72}{1072}$	.. $\frac{9}{134}$	
1073.....	$\frac{73}{1073}$		
1074.....	$\frac{74}{1074}$	.. $\frac{37}{537}$	
1075.....	$\frac{75}{1075}$	.. $\frac{3}{43}$	
1076.....	$\frac{76}{1076}$	.. $\frac{19}{269}$	
1077.....	$\frac{77}{1077}$		
1078.....	$\frac{78}{1078}$	.. $\frac{39}{539}$	
1079.....	$\frac{79}{1079}$		
1080.....	$\frac{80}{1080}$	.. $\frac{2}{27}$	
1081.....	$\frac{81}{1081}$		
1082.....	$\frac{82}{1082}$	.. $\frac{41}{541}$	
1083.....	$\frac{83}{1083}$		
1084.....	$\frac{84}{1084}$	.. $\frac{21}{271}$	
1085.....	$\frac{85}{1085}$	.. $\frac{17}{217}$	
1086.....	$\frac{86}{1086}$	.. $\frac{43}{543}$	
1087.....	$\frac{87}{1087}$		
1088.....	$\frac{88}{1088}$	.. $\frac{11}{136}$	
1089.....	$\frac{89}{1089}$		
1090.....	$\frac{90}{1090}$	.. $\frac{9}{109}$	
1091.....	$\frac{91}{1091}$		
1092.....	$\frac{92}{1092}$	.. $\frac{23}{273}$	
1093.....	$\frac{93}{1093}$		
1094.....	$\frac{94}{1094}$	.. $\frac{47}{547}$	
1095.....	$\frac{95}{1095}$	.. $\frac{19}{219}$	

Pour	Otez		
1096 degrés	$\frac{96}{1096}$	ou $\frac{12}{137}$	du poids de l'aréomètre.
1097.....	$\frac{97}{1097}$		
1098.....	$\frac{98}{1098}$	.. $\frac{49}{549}$	
1099.....	$\frac{99}{1099}$		
1100.....	$\frac{100}{1100}$	.. $\frac{1}{11}$	
1101.....	$\frac{101}{1101}$		
1102.....	$\frac{102}{1102}$	.. $\frac{51}{551}$	
1103.....	$\frac{103}{1103}$		
1104.....	$\frac{104}{1104}$	.. $\frac{13}{138}$	
1105.....	$\frac{105}{1105}$	.. $\frac{21}{221}$	
1106.....	$\frac{106}{1106}$	.. $\frac{53}{553}$	
1107.....	$\frac{107}{1107}$		
1108.....	$\frac{108}{1108}$	.. $\frac{27}{277}$	
1109.....	$\frac{109}{1109}$		
1110.....	$\frac{110}{1110}$	.. $\frac{11}{111}$	
1111.....	$\frac{111}{1111}$		
1112.....	$\frac{112}{1112}$	.. $\frac{14}{139}$	
1113.....	$\frac{113}{1113}$		
1114.....	$\frac{114}{1114}$	.. $\frac{57}{557}$	
1115.....	$\frac{115}{1115}$	.. $\frac{23}{223}$	
1116.....	$\frac{116}{1116}$	.. $\frac{29}{279}$	
1117.....	$\frac{117}{1117}$		
1118.....	$\frac{118}{1118}$	.. $\frac{59}{559}$	
1119.....	$\frac{119}{1119}$		
1120.....	$\frac{120}{1120}$	.. $\frac{3}{28}$	
1121.....	$\frac{121}{1121}$		
1122.....	$\frac{122}{1122}$	.. $\frac{61}{561}$	
1123.....	$\frac{123}{1123}$		
1124.....	$\frac{124}{1124}$	.. $\frac{31}{281}$	

Pour	Otez		
1125 degrés	$\frac{125}{1125}$	ou $\frac{1}{9}$	du poids de l'aréometre.
1126.....	$\frac{126}{1126}$	.. $\frac{63}{563}$	
1127.....	$\frac{127}{1127}$		
1128.....	$\frac{128}{1128}$	.. $\frac{16}{141}$	
1129.....	$\frac{129}{1129}$		
1130.....	$\frac{130}{1130}$	.. $\frac{13}{113}$	
1131.....	$\frac{131}{1131}$		
1132.....	$\frac{132}{1132}$	.. $\frac{33}{283}$	
1133.....	$\frac{133}{1133}$		
1134.....	$\frac{134}{1134}$	.. $\frac{67}{567}$	
1135.....	$\frac{135}{1135}$	.. $\frac{27}{227}$	
1136.....	$\frac{136}{1136}$	.. $\frac{17}{142}$	
1137.....	$\frac{137}{1137}$		
1138.....	$\frac{138}{1138}$	.. $\frac{69}{569}$	
1139.....	$\frac{139}{1139}$		
1140.....	$\frac{140}{1140}$	.. $\frac{7}{57}$	
1141.....	$\frac{141}{1141}$		
1142.....	$\frac{142}{1142}$	.. $\frac{71}{571}$	
1143.....	$\frac{143}{1143}$		
1144.....	$\frac{144}{1144}$	.. $\frac{18}{143}$	
1145.....	$\frac{145}{1145}$	.. $\frac{29}{229}$	
1146.....	$\frac{146}{1146}$	.. $\frac{73}{573}$	
1147.....	$\frac{147}{1147}$		
1148.....	$\frac{148}{1148}$	.. $\frac{37}{287}$	
1149.....	$\frac{149}{1149}$		
1150.....	$\frac{150}{1150}$	.. $\frac{3}{23}$	
1151.....	$\frac{151}{1151}$		
1152.....	$\frac{152}{1152}$	.. $\frac{19}{144}$	
1153.....	$\frac{153}{1153}$		

Pour	Otez		ou	
1154 degrés	$\frac{154}{1154}$	ou	$\frac{77}{577}$	du poids de l'aréomètre.
1155.....	$\frac{155}{1155}$	..	$\frac{31}{231}$	
1156.....	$\frac{156}{1156}$	..	$\frac{39}{289}$	
1157.....	$\frac{157}{1157}$			
1158.....	$\frac{158}{1158}$	..	$\frac{79}{579}$	
1159.....	$\frac{159}{1159}$			
1160.....	$\frac{160}{1160}$	..	$\frac{4}{29}$	
1161.....	$\frac{161}{1161}$			
1162.....	$\frac{162}{1162}$	..	$\frac{81}{581}$	
1163.....	$\frac{163}{1163}$			
1164.....	$\frac{164}{1164}$	..	$\frac{41}{291}$	
1165.....	$\frac{165}{1165}$	..	$\frac{33}{233}$	
1166.....	$\frac{166}{1166}$	..	$\frac{83}{583}$	
1167.....	$\frac{167}{1167}$			
1168.....	$\frac{168}{1168}$	..	$\frac{21}{146}$	
1169.....	$\frac{169}{1169}$			
1170.....	$\frac{170}{1170}$	..	$\frac{17}{117}$	
1171.....	$\frac{171}{1171}$			
1172.....	$\frac{172}{1172}$	..	$\frac{43}{293}$	
1173.....	$\frac{173}{1173}$			
1174.....	$\frac{174}{1174}$	..	$\frac{87}{587}$	
1175.....	$\frac{175}{1175}$	..	$\frac{7}{47}$	
1176.....	$\frac{176}{1176}$	..	$\frac{22}{147}$	
1177.....	$\frac{177}{1177}$			
1178.....	$\frac{178}{1178}$	..	$\frac{89}{589}$	
1179.....	$\frac{179}{1179}$			
1180.....	$\frac{180}{1180}$	..	$\frac{9}{59}$	
1181.....	$\frac{181}{1181}$			
1182.....	$\frac{182}{1182}$	..	$\frac{91}{591}$	
1183 degrés	$\frac{183}{1183}$			du poids de l'aréomètre.
1184.....	$\frac{184}{1184}$	ou	$\frac{23}{148}$	
1185.....	$\frac{185}{1185}$	..	$\frac{37}{237}$	
1186.....	$\frac{186}{1186}$	..	$\frac{93}{593}$	
1187.....	$\frac{187}{1187}$			
1188.....	$\frac{188}{1188}$	..	$\frac{47}{297}$	
1189.....	$\frac{189}{1189}$			
1190.....	$\frac{190}{1190}$	..	$\frac{19}{119}$	
1191.....	$\frac{191}{1191}$			
1192.....	$\frac{192}{1192}$	..	$\frac{24}{149}$	
1193.....	$\frac{193}{1193}$			
1194.....	$\frac{194}{1194}$	..	$\frac{97}{597}$	
1195.....	$\frac{195}{1195}$	..	$\frac{39}{239}$	
1196.....	$\frac{196}{1196}$	..	$\frac{49}{299}$	
1197.....	$\frac{197}{1197}$			
1198.....	$\frac{198}{1198}$	..	$\frac{99}{599}$	
1199.....	$\frac{199}{1199}$			
1200.....	$\frac{200}{1200}$	..	$\frac{1}{6}$	
1201.....	$\frac{201}{1201}$			
1202.....	$\frac{202}{1202}$	..	$\frac{101}{601}$	
1203.....	$\frac{203}{1203}$			
1204.....	$\frac{204}{1204}$	..	$\frac{51}{301}$	
1205.....	$\frac{205}{1205}$	..	$\frac{41}{241}$	
1206.....	$\frac{206}{1206}$	..	$\frac{103}{603}$	
1207.....	$\frac{207}{1207}$			
1208.....	$\frac{208}{1208}$	..	$\frac{26}{151}$	
1209.....	$\frac{209}{1209}$			
1210.....	$\frac{210}{1210}$	..	$\frac{21}{121}$	
1211.....	$\frac{211}{1211}$			

Pour	Otez		
1212 degrés	$\frac{212}{1212}$	ou $\frac{53}{303}$	du poids de l'aréomètre.
1213.....	$\frac{213}{1213}$		
1214.....	$\frac{214}{1214}$	.. $\frac{107}{607}$	
1215.....	$\frac{215}{1215}$	.. $\frac{43}{243}$	
1216.....	$\frac{216}{1216}$	.. $\frac{27}{152}$	
1217.....	$\frac{217}{1217}$		
1218.....	$\frac{218}{1218}$	.. $\frac{109}{609}$	
1219.....	$\frac{219}{1219}$		
1220.....	$\frac{220}{1220}$	.. $\frac{11}{61}$	
1221.....	$\frac{221}{1221}$		
1222.....	$\frac{222}{1222}$	.. $\frac{111}{611}$	
1223.....	$\frac{223}{1223}$		
1224.....	$\frac{224}{1224}$	.. $\frac{28}{153}$	
1225.....	$\frac{225}{1225}$	.. $\frac{9}{49}$	
1226.....	$\frac{226}{1226}$	.. $\frac{113}{613}$	
1227.....	$\frac{227}{1227}$		
1228.....	$\frac{228}{1228}$	.. $\frac{57}{307}$	
1229.....	$\frac{229}{1229}$		
1230.....	$\frac{230}{1230}$	.. $\frac{23}{123}$	
1231.....	$\frac{231}{1231}$		
1232.....	$\frac{232}{1232}$	.. $\frac{29}{154}$	
1233.....	$\frac{233}{1233}$		
1234.....	$\frac{234}{1234}$	.. $\frac{117}{617}$	
1235.....	$\frac{235}{1235}$	.. $\frac{47}{247}$	
1236.....	$\frac{236}{1236}$	.. $\frac{59}{309}$	
1237.....	$\frac{237}{1237}$		
1238.....	$\frac{238}{1238}$	.. $\frac{119}{619}$	
1239.....	$\frac{239}{1239}$		
1240.....	$\frac{240}{1240}$	.. $\frac{6}{31}$	

Pour	Otez		
1241 degrés	$\frac{241}{1241}$		du poids de l'aréomètre.
1242.....	$\frac{242}{1242}$	ou $\frac{121}{621}$	
1243.....	$\frac{243}{1243}$		
1244.....	$\frac{244}{1244}$	.. $\frac{61}{311}$	
1245.....	$\frac{245}{1245}$	.. $\frac{49}{249}$	
1246.....	$\frac{246}{1246}$	.. $\frac{123}{623}$	
1247.....	$\frac{247}{1247}$		
1248.....	$\frac{248}{1248}$	.. $\frac{31}{156}$	
1249.....	$\frac{249}{1249}$		
1250.....	$\frac{250}{1250}$	.. $\frac{1}{5}$	
1251.....	$\frac{251}{1251}$		
1252.....	$\frac{252}{1252}$	.. $\frac{63}{313}$	
1253.....	$\frac{253}{1253}$		
1254.....	$\frac{254}{1254}$	.. $\frac{127}{627}$	
1255.....	$\frac{255}{1255}$	.. $\frac{51}{251}$	
1256.....	$\frac{256}{1256}$	.. $\frac{32}{157}$	
1257.....	$\frac{257}{1257}$		
1258.....	$\frac{258}{1258}$	.. $\frac{129}{629}$	
1259.....	$\frac{259}{1259}$		
1260.....	$\frac{260}{1260}$	.. $\frac{13}{63}$	
1261.....	$\frac{261}{1261}$		
1262.....	$\frac{262}{1262}$	.. $\frac{131}{631}$	
1263.....	$\frac{263}{1263}$		
1264.....	$\frac{264}{1264}$	.. $\frac{33}{158}$	
1265.....	$\frac{265}{1265}$	.. $\frac{53}{253}$	
1266.....	$\frac{266}{1266}$	.. $\frac{133}{633}$	
1267.....	$\frac{267}{1267}$		
1268.....	$\frac{268}{1268}$	.. $\frac{67}{317}$	
1269.....	$\frac{269}{1269}$		

Pour	Otez		
1270 degrés	$\frac{270}{1270}$	ou $\frac{27}{127}$	du poids de l'aréomètre.
1271	$\frac{271}{1271}$		
1272	$\frac{272}{1272}$	.. $\frac{34}{159}$	
1273	$\frac{273}{1273}$		
1274	$\frac{274}{1274}$	.. $\frac{137}{637}$	
1275	$\frac{275}{1275}$	.. $\frac{11}{51}$	
1276	$\frac{276}{1276}$	.. $\frac{69}{319}$	
1277	$\frac{277}{1277}$		
1278	$\frac{278}{1278}$	.. $\frac{139}{639}$	
1279	$\frac{279}{1279}$		
1280	$\frac{280}{1280}$	.. $\frac{7}{32}$	
1281	$\frac{281}{1281}$		
1282	$\frac{282}{1282}$	.. $\frac{141}{641}$	
1283	$\frac{283}{1283}$		
1284	$\frac{284}{1284}$	.. $\frac{71}{321}$	
1285	$\frac{285}{1285}$	.. $\frac{57}{357}$	
1286	$\frac{286}{1286}$	.. $\frac{143}{643}$	
1287	$\frac{287}{1287}$		
1288	$\frac{288}{1288}$	.. $\frac{36}{161}$	
1289	$\frac{289}{1289}$		
1290	$\frac{290}{1290}$	.. $\frac{29}{129}$	
1291	$\frac{291}{1291}$		
1292	$\frac{292}{1292}$	.. $\frac{73}{323}$	
1293	$\frac{293}{1293}$		
1294	$\frac{294}{1294}$	.. $\frac{147}{647}$	
1295	$\frac{295}{1295}$	.. $\frac{59}{259}$	
1296	$\frac{296}{1296}$	.. $\frac{37}{162}$	
1297	$\frac{297}{1297}$		
1298	$\frac{298}{1298}$	.. $\frac{149}{649}$	

Pour	Otez		
1299 degrés	$\frac{299}{1299}$		du poids de l'aréomètre.
1300	$\frac{300}{1300}$	ou $\frac{3}{13}$	
1301	$\frac{301}{1301}$		
1302	$\frac{302}{1302}$	.. $\frac{151}{651}$	
1303	$\frac{303}{1303}$		
1304	$\frac{304}{1304}$	.. $\frac{38}{163}$	
1305	$\frac{305}{1305}$	.. $\frac{61}{261}$	
1306	$\frac{306}{1306}$	.. $\frac{153}{653}$	
1307	$\frac{307}{1307}$		
1308	$\frac{308}{1308}$	.. $\frac{77}{327}$	
1309	$\frac{309}{1309}$		
1310	$\frac{310}{1310}$	.. $\frac{31}{131}$	
1311	$\frac{311}{1311}$		
1312	$\frac{312}{1312}$	.. $\frac{39}{164}$	
1313	$\frac{313}{1313}$		
1314	$\frac{314}{1314}$	.. $\frac{157}{657}$	
1315	$\frac{315}{1315}$	.. $\frac{63}{263}$	
1316	$\frac{316}{1316}$	.. $\frac{79}{329}$	
1317	$\frac{317}{1317}$		
1318	$\frac{318}{1218}$	.. $\frac{159}{659}$	
1319	$\frac{319}{1319}$		
1320	$\frac{320}{1320}$	.. $\frac{8}{33}$	
1321	$\frac{321}{1321}$		
1322	$\frac{322}{1322}$	.. $\frac{161}{661}$	
1323	$\frac{323}{1323}$		
1324	$\frac{324}{1324}$	.. $\frac{81}{331}$	
1325	$\frac{325}{1325}$	.. $\frac{13}{53}$	
1326	$\frac{326}{1326}$	.. $\frac{163}{663}$	
1327	$\frac{327}{1327}$		

Pour

Pour	Otez		Pour	Otez	
1328 degrés	$\frac{328}{1328}$	ou $\frac{41}{166}$ du poids de l'aréomètre.	1357 degrés	$\frac{357}{1357}$	du poids de l'aréomètre.
1329.....	$\frac{329}{1329}$		1358.....	$\frac{358}{1358}$	ou $\frac{179}{679}$
1330.....	$\frac{330}{1330}$	.. $\frac{33}{133}$	1359.....	$\frac{359}{1359}$	
1331.....	$\frac{331}{1331}$		1360.....	$\frac{360}{1360}$	.. $\frac{9}{34}$
1332.....	$\frac{332}{1332}$	.. $\frac{83}{333}$	1361.....	$\frac{361}{1361}$	
1333.....	$\frac{333}{1333}$		1362.....	$\frac{362}{1362}$	.. $\frac{181}{681}$
1334.....	$\frac{334}{1334}$	.. $\frac{167}{667}$	1363.....	$\frac{363}{1363}$	
1335.....	$\frac{335}{1335}$	.. $\frac{67}{267}$	1364.....	$\frac{364}{1364}$	.. $\frac{91}{341}$
1336.....	$\frac{336}{1336}$	.. $\frac{42}{167}$	1365.....	$\frac{365}{1365}$	.. $\frac{73}{273}$
1337.....	$\frac{337}{1337}$		1366.....	$\frac{366}{1366}$	.. $\frac{183}{683}$
1338.....	$\frac{338}{1338}$	.. $\frac{169}{669}$	1367.....	$\frac{367}{1367}$	
1339.....	$\frac{339}{1339}$		1368.....	$\frac{368}{1368}$	.. $\frac{46}{171}$
1340.....	$\frac{340}{1340}$	.. $\frac{17}{67}$	1369.....	$\frac{369}{1369}$	
1341.....	$\frac{341}{1341}$		1370.....	$\frac{370}{1370}$	.. $\frac{37}{137}$
1342.....	$\frac{342}{1342}$	.. $\frac{171}{671}$	1371.....	$\frac{371}{1371}$	
1343.....	$\frac{343}{1343}$		1372.....	$\frac{372}{1372}$	.. $\frac{93}{343}$
1344.....	$\frac{344}{1344}$	.. $\frac{43}{168}$	1373.....	$\frac{373}{1373}$	
1345.....	$\frac{345}{1345}$	.. $\frac{69}{269}$	1374.....	$\frac{374}{1374}$	.. $\frac{187}{687}$
1346.....	$\frac{346}{1346}$	.. $\frac{173}{673}$	1375.....	$\frac{375}{1375}$	.. $\frac{3}{11}$
1347.....	$\frac{347}{1347}$		1376.....	$\frac{376}{1376}$	.. $\frac{47}{172}$
1348.....	$\frac{348}{1348}$	.. $\frac{87}{337}$	1377.....	$\frac{377}{1377}$	
1349.....	$\frac{349}{1349}$		1378.....	$\frac{378}{1378}$	.. $\frac{189}{689}$
1350.....	$\frac{350}{1350}$	.. $\frac{7}{27}$	1379.....	$\frac{379}{1379}$	
1351.....	$\frac{351}{1351}$		1380.....	$\frac{380}{1380}$	.. $\frac{19}{69}$
1352.....	$\frac{352}{1352}$	.. $\frac{44}{169}$	1381.....	$\frac{381}{1381}$	
1353.....	$\frac{353}{1353}$		1382.....	$\frac{382}{1382}$	.. $\frac{191}{691}$
1354.....	$\frac{354}{1354}$	.. $\frac{177}{677}$	1383.....	$\frac{383}{1383}$	
1355.....	$\frac{355}{1355}$	.. $\frac{71}{271}$	1384.....	$\frac{384}{1384}$	.. $\frac{48}{173}$
1356.....	$\frac{356}{1356}$	.. $\frac{89}{339}$	1385.....	$\frac{385}{1385}$	.. $\frac{77}{277}$

Pour	Otez		
1386 degrés	$\frac{386}{1386}$	ou $\frac{193}{693}$	du poids de l'aréomètre.
1387.....	$\frac{387}{1387}$		
1388.....	$\frac{388}{1388}$	.. $\frac{97}{347}$	
1389.....	$\frac{389}{1389}$		
1390.....	$\frac{390}{1390}$	.. $\frac{39}{139}$	
1391.....	$\frac{391}{1391}$		
1392.....	$\frac{392}{1392}$	.. $\frac{49}{174}$	
1393.....	$\frac{393}{1393}$		
1394.....	$\frac{394}{1394}$	.. $\frac{197}{697}$	
1395.....	$\frac{395}{1395}$	.. $\frac{79}{279}$	
1396.....	$\frac{396}{1396}$	.. $\frac{99}{349}$	
1397.....	$\frac{397}{1397}$		
1398.....	$\frac{398}{1398}$	.. $\frac{199}{699}$	
1399.....	$\frac{399}{1399}$		
1400.....	$\frac{400}{1400}$	.. $\frac{2}{7}$	
1401.....	$\frac{401}{1401}$		
1402.....	$\frac{402}{1402}$	.. $\frac{201}{701}$	
1403.....	$\frac{403}{1403}$		
1404.....	$\frac{404}{1404}$	.. $\frac{101}{351}$	
1405.....	$\frac{405}{1405}$	.. $\frac{81}{281}$	
1406.....	$\frac{406}{1406}$	.. $\frac{203}{703}$	
1407.....	$\frac{407}{1407}$		
1408.....	$\frac{408}{1408}$	.. $\frac{51}{176}$	
1409.....	$\frac{409}{1409}$		
1410.....	$\frac{410}{1410}$	.. $\frac{41}{141}$	
1411.....	$\frac{411}{1411}$		
1412.....	$\frac{412}{1412}$	.. $\frac{103}{353}$	
1413.....	$\frac{413}{1413}$		
1414.....	$\frac{414}{1414}$	.. $\frac{207}{707}$	

Pour	Otez		
1415 degrés	$\frac{415}{1415}$	ou $\frac{83}{283}$	du poids de l'aréomètre.
1416.....	$\frac{416}{1416}$	.. $\frac{52}{177}$	
1417.....	$\frac{417}{1417}$		
1418.....	$\frac{418}{1418}$	.. $\frac{209}{709}$	
1419.....	$\frac{419}{1419}$		
1420.....	$\frac{420}{1420}$	.. $\frac{21}{71}$	
1421.....	$\frac{421}{1421}$		
1422.....	$\frac{422}{1422}$	.. $\frac{211}{711}$	
1423.....	$\frac{423}{1423}$		
1424.....	$\frac{424}{1424}$	.. $\frac{53}{178}$	
1425.....	$\frac{425}{1425}$	.. $\frac{17}{57}$	
1426.....	$\frac{426}{1426}$	.. $\frac{213}{713}$	
1427.....	$\frac{327}{1427}$		
1428.....	$\frac{428}{1428}$	.. $\frac{107}{357}$	
1429.....	$\frac{429}{1429}$		
1430.....	$\frac{430}{1430}$	.. $\frac{43}{143}$	
1431.....	$\frac{431}{1431}$		
1432.....	$\frac{432}{1432}$	.. $\frac{54}{179}$	
1433.....	$\frac{433}{1433}$		
1434.....	$\frac{434}{1434}$	.. $\frac{217}{717}$	
1435.....	$\frac{435}{1435}$	.. $\frac{87}{287}$	
1436.....	$\frac{436}{1436}$	.. $\frac{109}{359}$	
1437.....	$\frac{437}{1437}$		
1438.....	$\frac{438}{1438}$	.. $\frac{219}{719}$	
1439.....	$\frac{439}{1439}$		
1440.....	$\frac{440}{1440}$	.. $\frac{11}{36}$	
1441.....	$\frac{441}{1441}$		
1442.....	$\frac{442}{1442}$	.. $\frac{221}{721}$	
1443.....	$\frac{443}{1443}$		

Pour	Otez			
1444 degrés	$\frac{444}{1444}$	ou	$\frac{111}{361}$	du poids de l'aréomètre.
1445	$\frac{445}{1445}$	..	$\frac{89}{289}$	
1446	$\frac{446}{1446}$	..	$\frac{223}{723}$	
1447	$\frac{447}{1447}$			
1448	$\frac{448}{1448}$	..	$\frac{56}{181}$	
1449	$\frac{449}{1449}$			
1450	$\frac{450}{1450}$	..	$\frac{9}{29}$	
1451	$\frac{451}{1451}$			
1452	$\frac{452}{1452}$	..	$\frac{113}{363}$	
1453	$\frac{453}{1453}$			
1454	$\frac{454}{1454}$	..	$\frac{227}{727}$	
1455	$\frac{455}{1455}$	..	$\frac{91}{291}$	
1456	$\frac{456}{1456}$	..	$\frac{57}{182}$	
1457	$\frac{457}{1457}$			
1458	$\frac{458}{1458}$	..	$\frac{229}{729}$	
1459	$\frac{459}{1459}$			
1460	$\frac{460}{1460}$	..	$\frac{23}{73}$	
1461	$\frac{461}{1461}$			
1462	$\frac{462}{1462}$	..	$\frac{231}{731}$	
1463	$\frac{463}{1463}$			
1464	$\frac{464}{1464}$	..	$\frac{58}{183}$	
1465	$\frac{465}{1465}$	..	$\frac{93}{293}$	
1466	$\frac{466}{1466}$	..	$\frac{233}{733}$	
1467	$\frac{467}{1467}$			
1468	$\frac{468}{1468}$	..	$\frac{117}{367}$	
1469	$\frac{469}{1469}$			
1470	$\frac{470}{1470}$	..	$\frac{47}{147}$	
1471	$\frac{471}{1471}$			
1472	$\frac{472}{1472}$	..	$\frac{59}{184}$	

Pour	Otez			
1473 degrés	$\frac{473}{1473}$			du poids de l'aréomètre.
1474	$\frac{474}{1474}$	ou	$\frac{237}{737}$	
1475	$\frac{475}{1475}$	..	$\frac{19}{59}$	
1476	$\frac{476}{1476}$	..	$\frac{119}{369}$	
1477	$\frac{477}{1477}$			
1478	$\frac{478}{1478}$	..	$\frac{239}{739}$	
1479	$\frac{479}{1479}$			
1480	$\frac{480}{1480}$	..	$\frac{12}{37}$	
1481	$\frac{481}{1481}$			
1482	$\frac{482}{1482}$	..	$\frac{241}{741}$	
1483	$\frac{483}{1483}$			
1484	$\frac{484}{1484}$	..	$\frac{121}{371}$	
1485	$\frac{485}{1485}$	..	$\frac{97}{297}$	
1486	$\frac{486}{1486}$	..	$\frac{243}{743}$	
1487	$\frac{487}{1487}$			
1488	$\frac{488}{1488}$	..	$\frac{61}{186}$	
1489	$\frac{489}{1489}$			
1490	$\frac{490}{1490}$	..	$\frac{49}{149}$	
1491	$\frac{491}{1491}$			
1492	$\frac{492}{1492}$	..	$\frac{123}{373}$	
1493	$\frac{493}{1493}$			
1494	$\frac{494}{1494}$	..	$\frac{247}{747}$	
1495	$\frac{495}{1495}$	..	$\frac{99}{299}$	
1496	$\frac{496}{1496}$	..	$\frac{62}{187}$	
1497	$\frac{497}{1497}$			
1498	$\frac{498}{1498}$	..	$\frac{249}{749}$	
1499	$\frac{499}{1499}$			
1500	$\frac{500}{1500}$	..	$\frac{1}{3}$	
1501	$\frac{501}{1501}$			

Pour	Otez			
1502 degrés	$\frac{502}{1502}$	ou	$\frac{251}{751}$	du poids de l'aréometre.
1503.....	$\frac{503}{1503}$			
1504.....	$\frac{504}{1504}$	..	$\frac{63}{188}$	
1505.....	$\frac{505}{1505}$	..	$\frac{101}{301}$	
1506.....	$\frac{506}{1506}$	..	$\frac{253}{753}$	
1507.....	$\frac{507}{1507}$			
1508.....	$\frac{508}{1508}$	..	$\frac{127}{377}$	
1509.....	$\frac{509}{1509}$			
1510.....	$\frac{510}{1510}$	..	$\frac{51}{151}$	
1511.....	$\frac{511}{1511}$			
1512.....	$\frac{512}{1512}$	..	$\frac{64}{189}$	
1513.....	$\frac{513}{1513}$			
1514.....	$\frac{514}{1514}$	..	$\frac{257}{757}$	
1515.....	$\frac{515}{1515}$	..	$\frac{103}{303}$	
1516.....	$\frac{516}{1516}$	..	$\frac{129}{379}$	
1517.....	$\frac{517}{1517}$			
1518.....	$\frac{518}{1518}$	..	$\frac{259}{759}$	
1519.....	$\frac{519}{1519}$			
1520.....	$\frac{520}{1520}$	..	$\frac{13}{38}$	
1521.....	$\frac{521}{1521}$			
1522.....	$\frac{522}{1522}$	..	$\frac{261}{761}$	
1523.....	$\frac{523}{1523}$			
1524.....	$\frac{524}{1524}$	..	$\frac{131}{381}$	
1525.....	$\frac{525}{1525}$	..	$\frac{21}{61}$	
1526.....	$\frac{526}{1526}$	..	$\frac{263}{763}$	
1527.....	$\frac{527}{1527}$			
1528.....	$\frac{528}{1528}$	..	$\frac{66}{191}$	
1529.....	$\frac{529}{1529}$			
1530.....	$\frac{530}{1530}$	..	$\frac{53}{153}$	

Pour	Otez			
1531 degrés	$\frac{531}{1531}$			du poids de l'aréomètre.
1532.....	$\frac{532}{1532}$	ou	$\frac{133}{383}$	
1533.....	$\frac{533}{1533}$			
1534.....	$\frac{534}{1534}$	..	$\frac{267}{767}$	
1535.....	$\frac{535}{1535}$	..	$\frac{107}{307}$	
1536.....	$\frac{536}{1536}$	..	$\frac{67}{192}$	
1537.....	$\frac{537}{1537}$			
1538.....	$\frac{538}{1538}$	..	$\frac{269}{769}$	
1539.....	$\frac{539}{1539}$			
1540.....	$\frac{540}{1540}$	..	$\frac{27}{77}$	
1541.....	$\frac{541}{1541}$			
1542.....	$\frac{542}{1542}$	..	$\frac{271}{771}$	
1543.....	$\frac{543}{1543}$			
1544.....	$\frac{544}{1544}$	..	$\frac{68}{193}$	
1545.....	$\frac{545}{1545}$	..	$\frac{109}{309}$	
1546.....	$\frac{546}{1546}$	..	$\frac{273}{773}$	
1547.....	$\frac{547}{1547}$			
1548.....	$\frac{548}{1548}$	..	$\frac{137}{387}$	
1549.....	$\frac{549}{1549}$			
1550.....	$\frac{550}{1550}$	..	$\frac{11}{31}$	
1551.....	$\frac{551}{1551}$			
1552.....	$\frac{552}{1552}$	..	$\frac{69}{194}$	
1553.....	$\frac{553}{1553}$			
1554.....	$\frac{554}{1554}$	..	$\frac{277}{777}$	
1555.....	$\frac{555}{1555}$	..	$\frac{111}{311}$	
1556.....	$\frac{556}{1556}$	..	$\frac{139}{389}$	
1557.....	$\frac{557}{1557}$			
1558.....	$\frac{558}{1558}$	..	$\frac{279}{779}$	
1559.....	$\frac{559}{1559}$			

Pour	Otez			
1560 degrés	$\frac{560}{1560}$	ou	$\frac{14}{39}$	du poids de l'aréomètre.
1561.....	$\frac{561}{1561}$			
1562.....	$\frac{562}{1562}$	..	$\frac{281}{781}$	
1563.....	$\frac{563}{1563}$			
1564.....	$\frac{564}{1564}$	..	$\frac{141}{391}$	
1565.....	$\frac{565}{1565}$	..	$\frac{113}{313}$	
1566.....	$\frac{566}{1566}$	..	$\frac{283}{783}$	
1567.....	$\frac{567}{1567}$			
1568.....	$\frac{568}{1568}$	..	$\frac{71}{196}$	
1569.....	$\frac{569}{1569}$			
1570.....	$\frac{570}{1570}$	..	$\frac{57}{157}$	
1571.....	$\frac{571}{1571}$			
1572.....	$\frac{572}{1572}$	..	$\frac{143}{393}$	
1573.....	$\frac{573}{1573}$			
1574.....	$\frac{574}{1574}$	..	$\frac{287}{787}$	
1575.....	$\frac{575}{1575}$	..	$\frac{23}{63}$	
1576.....	$\frac{576}{1576}$	..	$\frac{72}{197}$	
1577.....	$\frac{577}{1577}$			
1578.....	$\frac{578}{1578}$	..	$\frac{289}{789}$	
1579.....	$\frac{579}{1579}$			
1580.....	$\frac{580}{1580}$	..	$\frac{29}{79}$	
1581.....	$\frac{581}{1581}$			
1582.....	$\frac{582}{1582}$	..	$\frac{291}{791}$	
1583.....	$\frac{583}{1583}$			
1584.....	$\frac{584}{1584}$	..	$\frac{73}{198}$	
1585.....	$\frac{585}{1585}$	..	$\frac{117}{317}$	
1586.....	$\frac{586}{1586}$	..	$\frac{293}{793}$	
1587.....	$\frac{587}{1587}$			
1588.....	$\frac{588}{1588}$	..	$\frac{147}{397}$	

Pour	Otez			
1589 degrés	$\frac{589}{1589}$			du poids de l'aréomètre.
1590.....	$\frac{590}{1590}$	ou	$\frac{59}{159}$	
1591.....	$\frac{591}{1591}$			
1592.....	$\frac{592}{1592}$	..	$\frac{74}{199}$	
1593.....	$\frac{593}{1593}$			
1594.....	$\frac{594}{1594}$	..	$\frac{297}{797}$	
1595.....	$\frac{595}{1595}$			
1596.....	$\frac{596}{1596}$	..	$\frac{149}{399}$	
1597.....	$\frac{597}{1597}$			
1598.....	$\frac{598}{1598}$	..	$\frac{299}{799}$	
1599.....	$\frac{599}{1599}$			
1600.....	$\frac{600}{1600}$	..	$\frac{3}{8}$	
1601.....	$\frac{601}{1601}$			
1602.....	$\frac{602}{1602}$	..	$\frac{301}{801}$	
1603.....	$\frac{603}{1603}$			
1604.....	$\frac{604}{1604}$	..	$\frac{151}{401}$	
1605.....	$\frac{605}{1605}$	..	$\frac{121}{321}$	
1606.....	$\frac{606}{1606}$	..	$\frac{303}{803}$	
1607.....	$\frac{607}{1607}$			
1608.....	$\frac{608}{1608}$	..	$\frac{76}{201}$	
1609.....	$\frac{609}{1609}$			
1610.....	$\frac{610}{1610}$	..	$\frac{61}{161}$	
1611.....	$\frac{611}{1611}$			
1612.....	$\frac{612}{1612}$	..	$\frac{153}{403}$	
1613.....	$\frac{613}{1613}$			
1614.....	$\frac{614}{1614}$	..	$\frac{307}{807}$	
1615.....	$\frac{615}{1615}$	..	$\frac{123}{323}$	
1616.....	$\frac{616}{1616}$	..	$\frac{77}{202}$	
1617.....	$\frac{617}{1617}$			

Pour	Otez		
1618 degrés	$\frac{618}{1618}$	ou $\frac{309}{809}$	du poids de l'aréomètre.
1619.....	$\frac{619}{1619}$		
1620.....	$\frac{620}{1620}$	.. $\frac{31}{81}$	
1621.....	$\frac{621}{1621}$		
1622.....	$\frac{622}{1622}$	.. $\frac{311}{811}$	
1623.....	$\frac{623}{1623}$		
1624.....	$\frac{624}{1624}$	.. $\frac{78}{203}$	
1625.....	$\frac{625}{1625}$	.. $\frac{5}{13}$	
1626.....	$\frac{626}{1626}$	.. $\frac{313}{813}$	
1627.....	$\frac{627}{1627}$		
1628.....	$\frac{628}{1628}$	.. $\frac{157}{407}$	
1629.....	$\frac{629}{1629}$		
1630.....	$\frac{630}{1630}$	.. $\frac{63}{163}$	
1631.....	$\frac{631}{1631}$		
1632.....	$\frac{632}{1632}$	.. $\frac{79}{204}$	
1633.....	$\frac{633}{1633}$		
1634.....	$\frac{634}{1634}$	.. $\frac{317}{817}$	
1635.....	$\frac{635}{1635}$	.. $\frac{127}{327}$	
1636.....	$\frac{636}{1636}$	.. $\frac{159}{409}$	
1637.....	$\frac{637}{1637}$		
1638.....	$\frac{638}{1638}$	.. $\frac{319}{819}$	
1639.....	$\frac{639}{1639}$		
1640.....	$\frac{640}{1640}$	.. $\frac{16}{41}$	
1641.....	$\frac{641}{1641}$		
1642.....	$\frac{642}{1642}$	.. $\frac{321}{821}$	
1643.....	$\frac{643}{1643}$		
1644.....	$\frac{644}{1644}$	.. $\frac{161}{411}$	
1645.....	$\frac{645}{1645}$	.. $\frac{129}{329}$	
1646.....	$\frac{646}{1646}$	.. $\frac{323}{823}$	

Pour	Otez		
1647 degrés	$\frac{647}{1647}$		du poids de l'aréomètre.
1648.....	$\frac{648}{1648}$	ou $\frac{81}{206}$	
1649.....	$\frac{649}{1649}$		
1650.....	$\frac{650}{1650}$	.. $\frac{13}{33}$	
1651.....	$\frac{651}{1651}$		
1652.....	$\frac{652}{1652}$	.. $\frac{163}{413}$	
1653.....	$\frac{653}{1653}$		
1654.....	$\frac{654}{1654}$	.. $\frac{327}{827}$	
1655.....	$\frac{655}{1655}$	.. $\frac{131}{331}$	
1656.....	$\frac{656}{1656}$	.. $\frac{82}{207}$	
1657.....	$\frac{657}{1657}$		
1658.....	$\frac{658}{1658}$	.. $\frac{329}{829}$	
1659.....	$\frac{659}{1659}$		
1660.....	$\frac{660}{1660}$	.. $\frac{33}{83}$	
1661.....	$\frac{661}{1661}$		
1662.....	$\frac{662}{1662}$	.. $\frac{331}{831}$	
1663.....	$\frac{663}{1663}$		
1664.....	$\frac{664}{1664}$	.. $\frac{83}{208}$	
1665.....	$\frac{665}{1665}$	.. $\frac{133}{333}$	
1666.....	$\frac{666}{1666}$	.. $\frac{333}{833}$	
1667.....	$\frac{667}{1667}$		
1668.....	$\frac{668}{1668}$	.. $\frac{167}{417}$	
1669.....	$\frac{669}{1669}$		
1670.....	$\frac{670}{1670}$	.. $\frac{67}{167}$	
1671.....	$\frac{671}{1671}$		
1672.....	$\frac{672}{1672}$	.. $\frac{84}{209}$	
1673.....	$\frac{673}{1673}$		
1674.....	$\frac{674}{1674}$	.. $\frac{337}{837}$	
1675.....	$\frac{675}{1675}$	.. $\frac{27}{67}$	

Pour	Otez		
1676 degrés	$\frac{676}{1676}$	ou $\frac{169}{419}$	du poids de l'aréomètre.
1677	$\frac{677}{1677}$		
1678	$\frac{678}{1678}$	. . $\frac{339}{839}$	
1679	$\frac{679}{1679}$		
1680	$\frac{680}{1680}$	. . $\frac{17}{42}$	
1681	$\frac{681}{1681}$		
1682	$\frac{682}{1682}$	. . $\frac{341}{841}$	
1683	$\frac{683}{1683}$		
1684	$\frac{684}{1684}$	. . $\frac{171}{421}$	
1685	$\frac{685}{1685}$	. . $\frac{137}{337}$	
1686	$\frac{686}{1686}$	. . $\frac{343}{843}$	
1687	$\frac{687}{1687}$		
1688	$\frac{688}{1688}$	. . $\frac{86}{211}$	
1689	$\frac{689}{1689}$		
1690	$\frac{690}{1690}$	. . $\frac{69}{169}$	
1691	$\frac{691}{1691}$		
1692	$\frac{692}{1692}$	. . $\frac{173}{423}$	
1693	$\frac{693}{1693}$		
1694	$\frac{694}{1694}$	. . $\frac{347}{847}$	
1695	$\frac{695}{1695}$	. . $\frac{139}{339}$	
1696	$\frac{696}{1696}$	. . $\frac{87}{212}$	
1697	$\frac{697}{1697}$		
1698	$\frac{698}{1698}$	. . $\frac{349}{849}$	
1699	$\frac{699}{1699}$		
1700	$\frac{700}{1700}$	. . $\frac{7}{17}$	
1701	$\frac{701}{1701}$		
1702	$\frac{702}{1702}$	. . $\frac{351}{851}$	
1703	$\frac{703}{1703}$		
1704	$\frac{704}{1704}$	. . $\frac{88}{213}$	

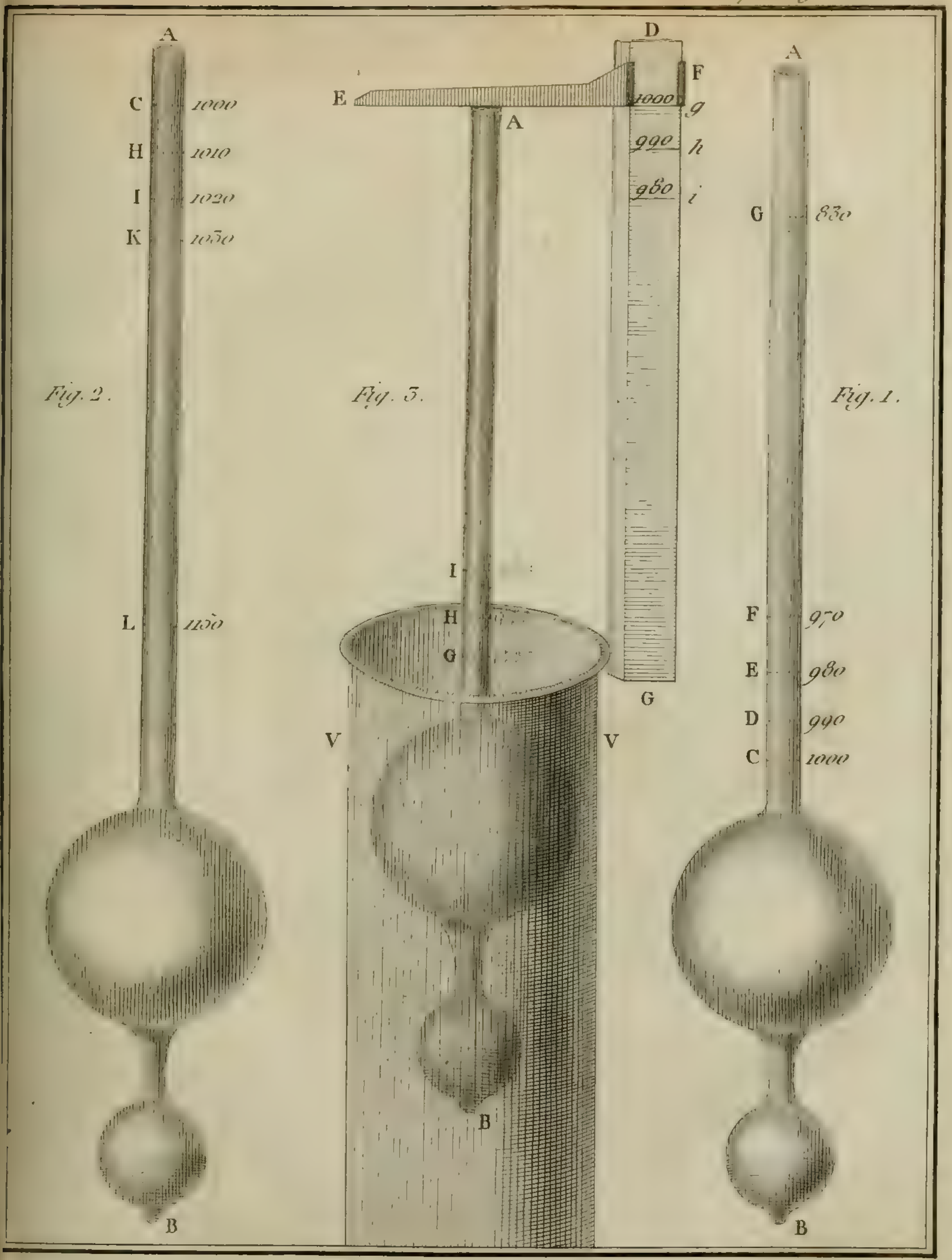
Pour	Otez		
1705 degrés	$\frac{705}{1705}$	ou $\frac{141}{341}$	du poids de l'aréomètre.
1706	$\frac{706}{1706}$	. . $\frac{353}{853}$	
1707	$\frac{707}{1707}$		
1708	$\frac{708}{1708}$	. . $\frac{177}{427}$	
1709	$\frac{709}{1709}$		
1710	$\frac{710}{1710}$	. . $\frac{71}{171}$	
1711	$\frac{711}{1711}$		
1712	$\frac{712}{1712}$	. . $\frac{89}{214}$	
1713	$\frac{713}{1713}$		
1714	$\frac{714}{1714}$	. . $\frac{357}{857}$	
1715	$\frac{715}{1715}$	. . $\frac{143}{343}$	
1716	$\frac{716}{1716}$	. . $\frac{179}{429}$	
1717	$\frac{717}{1717}$		
1718	$\frac{718}{1718}$	. . $\frac{359}{859}$	
1719	$\frac{719}{1719}$		
1720	$\frac{720}{1720}$	. . $\frac{18}{43}$	
1721	$\frac{721}{1721}$		
1722	$\frac{722}{1722}$	. . $\frac{361}{861}$	
1723	$\frac{720}{1723}$		
1724	$\frac{724}{1724}$	. . $\frac{191}{431}$	
1725	$\frac{725}{1725}$	. . $\frac{29}{49}$	
1726	$\frac{726}{1726}$	. . $\frac{363}{863}$	
1727	$\frac{727}{1727}$		
1728	$\frac{728}{1728}$	. . $\frac{91}{216}$	
1729	$\frac{729}{1729}$		
1730	$\frac{730}{1730}$	. . $\frac{73}{173}$	
1731	$\frac{731}{1731}$		
1732	$\frac{732}{1732}$	. . $\frac{183}{433}$	
1733	$\frac{733}{1733}$		

Pour	Otez			
1734 degrés	$\frac{734}{1734}$	ou	$\frac{367}{867}$	du poids de l'aréomètre.
1735	$\frac{735}{1735}$	. .	$\frac{147}{347}$	
1736	$\frac{736}{1736}$	. .	$\frac{92}{217}$	
1737	$\frac{737}{1737}$			
1738	$\frac{738}{1738}$	. .	$\frac{369}{869}$	
1739	$\frac{739}{1739}$			
1740	$\frac{740}{1740}$	. .	$\frac{37}{87}$	
1741	$\frac{741}{1741}$			
1742	$\frac{742}{1742}$	. .	$\frac{371}{871}$	

Pour	Otez			
1743 degrés	$\frac{743}{1743}$			du poids de l'aréomètre.
1744	$\frac{744}{1744}$	ou	$\frac{93}{218}$	
1745	$\frac{745}{1745}$	. .	$\frac{149}{349}$	
1746	$\frac{746}{1746}$	. .	$\frac{373}{873}$	
1747	$\frac{747}{1747}$			
1748	$\frac{743}{1748}$	. .	$\frac{187}{437}$	
1749	$\frac{749}{1749}$			
1750	$\frac{750}{1750}$	. .	$\frac{3}{7}$	



SIXIÈME



P. Le Gouaz sculp.





ACTION

Du gros globe sur les différens points du contact. La densité moyenne du gros globe est D; son rayon R, le rayon du petit globe est r.

TABLEAU *de 24 Équations destinées à déterminer la densité électrique moyenne de 24 petits globes, les centres placés en ligne droite, le petit globe 1 en contact avec un gros globe.*

Dans ce Tableau, les N.os au haut de chaque colonne indiquent la place du petit globe; en sorte, par exemple, qu'à la huitième colonne verticale, troisième ligne horizontale, l'on trouve la quantité $-\frac{2}{11^2}$ qui est censée multipliée par $\overset{8}{\delta}$, ou par la densité moyenne du huitième petit globe, à compter du gros globe.

1.ere ÉQUATION. $D =$	$+\overset{1}{\delta}$	$+\frac{2\overset{2}{\delta}}{3^2}$	$+\frac{2\overset{3}{\delta}}{5^2}$	$+\frac{2\overset{4}{\delta}}{7^2}$	$+\frac{2\overset{5}{\delta}}{9^2}$	$+\frac{2\overset{6}{\delta}}{11^2}$	$+\frac{2\overset{7}{\delta}}{13^2}$	$+\frac{2\overset{8}{\delta}}{15^2}$	$+\frac{2\overset{9}{\delta}}{17^2}$	$+\frac{2\overset{10}{\delta}}{19^2}$	$+\frac{2\overset{11}{\delta}}{21^2}$	$+\frac{2\overset{12}{\delta}}{23^2}$	$+\frac{2\overset{13}{\delta}}{25^2}$	$+\frac{2\overset{14}{\delta}}{27^2}$	$+\frac{2\overset{15}{\delta}}{29^2}$	$+\frac{2\overset{16}{\delta}}{31^2}$	$+\frac{2\overset{17}{\delta}}{33^2}$	$+\frac{2\overset{18}{\delta}}{35^2}$	$+\frac{2\overset{19}{\delta}}{37^2}$	$+\frac{2\overset{20}{\delta}}{39^2}$	$+\frac{2\overset{21}{\delta}}{41^2}$	$+\frac{2\overset{22}{\delta}}{43^2}$	$+\frac{2\overset{23}{\delta}}{45^2}$	$+\frac{2\overset{24}{\delta}}{47^2}$
2.eme ... $\frac{2DR^2}{(R+2r)^2} =$	$-\delta$	$+1$	$+\frac{2}{3^2}$	$+\frac{2}{5^2}$	$+\frac{2}{7^2}$	$+\frac{2}{9^2}$	$+\frac{2}{11^2}$	$+\frac{2}{13^2}$	$+\frac{2}{15^2}$	$+\frac{2}{17^2}$	$+\frac{2}{19^2}$	$+\frac{2}{21^2}$	$+\frac{2}{23^2}$	$+\frac{2}{25^2}$	$+\frac{2}{27^2}$	$+\frac{2}{29^2}$	$+\frac{2}{31^2}$	$+\frac{2}{33^2}$	$+\frac{2}{35^2}$	$+\frac{2}{37^2}$	$+\frac{2}{39^2}$	$+\frac{2}{41^2}$	$+\frac{2}{43^2}$	$+\frac{2}{45^2}$
3.eme ... $\frac{2DR^2}{(R+4r)^2} =$	$-\frac{2\delta}{3^2}$	-1	$+1$	$+\frac{2}{3^2}$	$+\frac{2}{5^2}$	$+\frac{2}{7^2}$	$+\frac{2}{9^2}$	$+\frac{2}{11^2}$	$+\frac{2}{13^2}$	$+\frac{2}{15^2}$	$+\frac{2}{17^2}$	$+\frac{2}{19^2}$	$+\frac{2}{21^2}$	$+\frac{2}{23^2}$	$+\frac{2}{25^2}$	$+\frac{2}{27^2}$	$+\frac{2}{29^2}$	$+\frac{2}{31^2}$	$+\frac{2}{33^2}$	$+\frac{2}{35^2}$	$+\frac{2}{37^2}$	$+\frac{2}{39^2}$	$+\frac{2}{41^2}$	$+\frac{2}{43^2}$
4.eme ... $\frac{2DR^2}{(R+6r)^2} =$	$-\frac{2\delta}{5^2}$	$-\frac{2}{3^2}$	-1	$+1$	$+\frac{2}{3^2}$	$+\frac{2}{5^2}$	$+\frac{2}{7^2}$	$+\frac{2}{9^2}$	$+\frac{2}{11^2}$	$+\frac{2}{13^2}$	$+\frac{2}{15^2}$	$+\frac{2}{17^2}$	$+\frac{2}{19^2}$	$+\frac{2}{21^2}$	$+\frac{2}{23^2}$	$+\frac{2}{25^2}$	$+\frac{2}{27^2}$	$+\frac{2}{29^2}$	$+\frac{2}{31^2}$	$+\frac{2}{33^2}$	$+\frac{2}{35^2}$	$+\frac{2}{37^2}$	$+\frac{2}{39^2}$	$+\frac{2}{41^2}$
5.eme ... $\frac{2DR^2}{(R+8r)^2} =$	$-\frac{2\delta}{7^2}$	$-\frac{2}{5^2}$	$-\frac{2}{3^2}$	-1	$+1$	$+\frac{2}{3^2}$	$+\frac{2}{5^2}$	$+\frac{2}{7^2}$	$+\frac{2}{9^2}$	$+\frac{2}{11^2}$	$+\frac{2}{13^2}$	$+\frac{2}{15^2}$	$+\frac{2}{17^2}$	$+\frac{2}{19^2}$	$+\frac{2}{21^2}$	$+\frac{2}{23^2}$	$+\frac{2}{25^2}$	$+\frac{2}{27^2}$	$+\frac{2}{29^2}$	$+\frac{2}{31^2}$	$+\frac{2}{33^2}$	$+\frac{2}{35^2}$	$+\frac{2}{37^2}$	$+\frac{2}{39^2}$
6.eme ... $\frac{2DR^2}{(R+10r)^2} =$	$-\frac{2\delta}{9^2}$	$-\frac{2}{7^2}$	$-\frac{2}{5^2}$	$-\frac{2}{3^2}$	-1	$+1$	$+\frac{2}{3^2}$	$+\frac{2}{5^2}$	$+\frac{2}{7^2}$	$+\frac{2}{9^2}$	$+\frac{2}{11^2}$	$+\frac{2}{13^2}$	$+\frac{2}{15^2}$	$+\frac{2}{17^2}$	$+\frac{2}{19^2}$	$+\frac{2}{21^2}$	$+\frac{2}{23^2}$	$+\frac{2}{25^2}$	$+\frac{2}{27^2}$	$+\frac{2}{29^2}$	$+\frac{2}{31^2}$	$+\frac{2}{33^2}$	$+\frac{2}{35^2}$	$+\frac{2}{37^2}$
7.eme ... $\frac{2DR^2}{(R+12r)^2} =$	$-\frac{2\delta}{11^2}$	$-\frac{2}{9^2}$	$-\frac{2}{7^2}$	$-\frac{2}{5^2}$	$-\frac{2}{3^2}$	-1	$+1$	$+\frac{2}{3^2}$	$+\frac{2}{5^2}$	$+\frac{2}{7^2}$	$+\frac{2}{9^2}$	$+\frac{2}{11^2}$	$+\frac{2}{13^2}$	$+\frac{2}{15^2}$	$+\frac{2}{17^2}$	$+\frac{2}{19^2}$	$+\frac{2}{21^2}$	$+\frac{2}{23^2}$	$+\frac{2}{25^2}$	$+\frac{2}{27^2}$	$+\frac{2}{29^2}$	$+\frac{2}{31^2}$	$+\frac{2}{33^2}$	$+\frac{2}{35^2}$
8.eme ... $\frac{2DR^2}{(R+14r)^2} =$	$-\frac{2\delta}{13^2}$	$-\frac{2}{11^2}$	$-\frac{2}{9^2}$	$-\frac{2}{7^2}$	$-\frac{2}{5^2}$	$-\frac{2}{3^2}$	-1	$+1$	$+\frac{2}{3^2}$	$+\frac{2}{5^2}$	$+\frac{2}{7^2}$	$+\frac{2}{9^2}$	$+\frac{2}{11^2}$	$+\frac{2}{13^2}$	$+\frac{2}{15^2}$	$+\frac{2}{17^2}$	$+\frac{2}{19^2}$	$+\frac{2}{21^2}$	$+\frac{2}{23^2}$	$+\frac{2}{25^2}$	$+\frac{2}{27^2}$	$+\frac{2}{29^2}$	$+\frac{2}{31^2}$	$+\frac{2}{33^2}$
9.eme ... $\frac{2DR^2}{(R+16r)^2} =$	$-\frac{2\delta}{15^2}$	$-\frac{2}{13^2}$	$-\frac{2}{11^2}$	$-\frac{2}{9^2}$	$-\frac{2}{7^2}$	$-\frac{2}{5^2}$	$-\frac{2}{3^2}$	-1	$+1$	$+\frac{2}{3^2}$	$+\frac{2}{5^2}$	$+\frac{2}{7^2}$	$+\frac{2}{9^2}$	$+\frac{2}{11^2}$	$+\frac{2}{13^2}$	$+\frac{2}{15^2}$	$+\frac{2}{17^2}$	$+\frac{2}{19^2}$	$+\frac{2}{21^2}$	$+\frac{2}{23^2}$	$+\frac{2}{25^2}$	$+\frac{2}{27^2}$	$+\frac{2}{29^2}$	$+\frac{2}{31^2}$
10.eme .. $\frac{2DR^2}{(R+18r)^2} =$	$-\frac{2\delta}{17^2}$	$-\frac{2}{15^2}$	$-\frac{2}{13^2}$	$-\frac{2}{11^2}$	$-\frac{2}{9^2}$	$-\frac{2}{7^2}$	$-\frac{2}{5^2}$	$-\frac{2}{3^2}$	-1	$+1$	$+\frac{2}{3^2}$	$+\frac{2}{5^2}$	$+\frac{2}{7^2}$	$+\frac{2}{9^2}$	$+\frac{2}{11^2}$	$+\frac{2}{13^2}$	$+\frac{2}{15^2}$	$+\frac{2}{17^2}$	$+\frac{2}{19^2}$	$+\frac{2}{21^2}$	$+\frac{2}{23^2}$	$+\frac{2}{25^2}$	$+\frac{2}{27^2}$	$+\frac{2}{29^2}$
11.eme .. $\frac{2DR^2}{(R+20r)^2} =$	$-\frac{2\delta}{19^2}$	$-\frac{2}{17^2}$	$-\frac{2}{15^2}$	$-\frac{2}{13^2}$	$-\frac{2}{11^2}$	$-\frac{2}{9^2}$	$-\frac{2}{7^2}$	$-\frac{2}{5^2}$	$-\frac{2}{3^2}$	-1	$+1$	$+\frac{2}{3^2}$	$+\frac{2}{5^2}$	$+\frac{2}{7^2}$	$+\frac{2}{9^2}$	$+\frac{2}{11^2}$	$+\frac{2}{13^2}$	$+\frac{2}{15^2}$	$+\frac{2}{17^2}$	$+\frac{2}{19^2}$	$+\frac{2}{21^2}$	$+\frac{2}{23^2}$	$+\frac{2}{25^2}$	$+\frac{2}{27^2}$
12.eme .. $\frac{2DR^2}{(R+22r)^2} =$	$-\frac{2\delta}{21^2}$	$-\frac{2}{19^2}$	$-\frac{2}{17^2}$	$-\frac{2}{15^2}$	$-\frac{2}{13^2}$	$-\frac{2}{11^2}$	$-\frac{2}{9^2}$	$-\frac{2}{7^2}$	$-\frac{2}{5^2}$	$-\frac{2}{3^2}$	-1	$+1$	$+\frac{2}{3^2}$	$+\frac{2}{5^2}$	$+\frac{2}{7^2}$	$+\frac{2}{9^2}$	$+\frac{2}{11^2}$	$+\frac{2}{13^2}$	$+\frac{2}{15^2}$	$+\frac{2}{17^2}$	$+\frac{2}{19^2}$	$+\frac{2}{21^2}$	$+\frac{2}{23^2}$	$+\frac{2}{25^2}$
13.eme .. $\frac{2DR^2}{(R+24r)^2} =$	$-\frac{2\delta}{23^2}$	$-\frac{2}{21^2}$	$-\frac{2}{19^2}$	$-\frac{2}{17^2}$	$-\frac{2}{15^2}$	$-\frac{2}{13^2}$	$-\frac{2}{11^2}$	$-\frac{2}{9^2}$	$-\frac{2}{7^2}$	$-\frac{2}{5^2}$	$-\frac{2}{3^2}$	-1	$+1$	$+\frac{2}{3^2}$	$+\frac{2}{5^2}$	$+\frac{2}{7^2}$	$+\frac{2}{9^2}$	$+\frac{2}{11^2}$	$+\frac{2}{13^2}$	$+\frac{2}{15^2}$	$+\frac{2}{17^2}$	$+\frac{2}{19^2}$	$+\frac{2}{21^2}$	$+\frac{2}{23^2}$
14.eme .. $\frac{2DR^2}{(R+26r)^2} =$	$-\frac{2\delta}{25^2}$	$-\frac{2}{23^2}$	$-\frac{2}{21^2}$	$-\frac{2}{19^2}$	$-\frac{2}{17^2}$	$-\frac{2}{15^2}$	$-\frac{2}{13^2}$	$-\frac{2}{11^2}$	$-\frac{2}{9^2}$	$-\frac{2}{7^2}$	$-\frac{2}{5^2}$	$-\frac{2}{3^2}$	-1	$+1$	$+\frac{2}{3^2}$	$+\frac{2}{5^2}$	$+\frac{2}{7^2}$	$+\frac{2}{9^2}$	$+\frac{2}{11^2}$	$+\frac{2}{13^2}$	$+\frac{2}{15^2}$	$+\frac{2}{17^2}$	$+\frac{2}{19^2}$	$+\frac{2}{21^2}$
15.eme .. $\frac{2DR^2}{(R+28r)^2} =$	$-\frac{2\delta}{27^2}$	$-\frac{2}{25^2}$	$-\frac{2}{23^2}$	$-\frac{2}{21^2}$	$-\frac{2}{19^2}$	$-\frac{2}{17^2}$	$-\frac{2}{15^2}$	$-\frac{2}{13^2}$	$-\frac{2}{11^2}$	$-\frac{2}{9^2}$	$-\frac{2}{7^2}$	$-\frac{2}{5^2}$	$-\frac{2}{3^2}$	-1	$+1$	$+\frac{2}{3^2}$	$+\frac{2}{5^2}$	$+\frac{2}{7^2}$	$+\frac{2}{9^2}$	$+\frac{2}{11^2}$	$+\frac{2}{13^2}$	$+\frac{2}{15^2}$	$+\frac{2}{17^2}$	$+\frac{2}{19^2}$
16.eme .. $\frac{2DR^2}{(R+30r)^2} =$	$-\frac{2\delta}{29^2}$	$-\frac{2}{27^2}$	$-\frac{2}{25^2}$	$-\frac{2}{23^2}$	$-\frac{2}{21^2}$	$-\frac{2}{19^2}$	$-\frac{2}{17^2}$	$-\frac{2}{15^2}$	$-\frac{2}{13^2}$	$-\frac{2}{11^2}$	$-\frac{2}{9^2}$	$-\frac{2}{7^2}$	$-\frac{2}{5^2}$	$-\frac{2}{3^2}$	-1	$+1$	$+\frac{2}{3^2}$	$+\frac{2}{5^2}$	$+\frac{2}{7^2}$	$+\frac{2}{9^2}$	$+\frac{2}{11^2}$	$+\frac{2}{13^2}$	$+\frac{2}{15^2}$	$+\frac{2}{17^2}$
17.eme .. $\frac{2DR^2}{(R+32r)^2} =$	$-\frac{2\delta}{31^2}$	$-\frac{2}{29^2}$	$-\frac{2}{27^2}$	$-\frac{2}{25^2}$	$-\frac{2}{23^2}$	$-\frac{2}{21^2}$	$-\frac{2}{19^2}$	$-\frac{2}{17^2}$	$-\frac{2}{15^2}$	$-\frac{2}{13^2}$	$-\frac{2}{11^2}$	$-\frac{2}{9^2}$	$-\frac{2}{7^2}$	$-\frac{2}{5^2}$	$-\frac{2}{3^2}$	-1	$+1$	$+\frac{2}{3^2}$	$+\frac{2}{5^2}$	$+\frac{2}{7^2}$	$+\frac{2}{9^2}$	$+\frac{2}{11^2}$	$+\frac{2}{13^2}$	$+\frac{2}{15^2}$
18.eme .. $\frac{2DR^2}{(R+34r)^2} =$	$-\frac{2\delta}{33^2}$	$-\frac{2}{31^2}$	$-\frac{2}{29^2}$	$-\frac{2}{27^2}$	$-\frac{2}{25^2}$	$-\frac{2}{23^2}$	$-\frac{2}{21^2}$	$-\frac{2}{19^2}$	$-\frac{2}{17^2}$	$-\frac{2}{15^2}$	$-\frac{2}{13^2}$	$-\frac{2}{11^2}$	$-\frac{2}{9^2}$	$-\frac{2}{7^2}$	$-\frac{2}{5^2}$	$-\frac{2}{3^2}$	-1	$+1$	$+\frac{2}{3^2}$	$+\frac{2}{5^2}$	$+\frac{2}{7^2}$	$+\frac{2}{9^2}$	$+\frac{2}{11^2}$	$+\frac{2}{13^2}$
19.e .. $\frac{2DR^2}{(R+36r)^2} =$	$-\frac{2\delta}{35^2}$	$-\frac{2}{33^2}$	$-\frac{2}{31^2}$	$-\frac{2}{29^2}$	$-\frac{2}{27^2}$	$-\frac{2}{25^2}$	$-\frac{2}{23^2}$	$-\frac{2}{21^2}$	$-\frac{2}{19^2}$	$-\frac{2}{17^2}$	$-\frac{2}{15^2}$	$-\frac{2}{13^2}$	$-\frac{2}{11^2}$	$-\frac{2}{9^2}$	$-\frac{2}{7^2}$	$-\frac{2}{5^2}$	$-\frac{2}{3^2}$	-1	$+1$	$+\frac{2}{3^2}$	$+\frac{2}{5^2}$	$+\frac{2}{7^2}$	$+\frac{2}{9^2}$	$+\frac{2}{11^2}$
20.eme .. $\frac{2DR^2}{(R+38r)^2} =$	$-\frac{2\delta}{37^2}$	$-\frac{2}{35^2}$	$-\frac{2}{33^2}$	$-\frac{2}{31^2}$	$-\frac{2}{29^2}$	$-\frac{2}{27^2}$	$-\frac{2}{25^2}$	$-\frac{2}{23^2}$	$-\frac{2}{21^2}$	$-\frac{2}{19^2}$	$-\frac{2}{17^2}$	$-\frac{2}{15^2}$	$-\frac{2}{13^2}$	$-\frac{2}{11^2}$	$-\frac{2}{9^2}$	$-\frac{2}{7^2}$	$-\frac{2}{5^2}$	$-\frac{2}{3^2}$	-1	$+1$	$+\frac{2}{3^2}$	$+\frac{2}{5^2}$	$+\frac{2}{7^2}$	$+\frac{2}{9^2}$
21.eme .. $\frac{2DR^2}{(R+40r)^2} =$	$-\frac{2\delta}{39^2}$	$-\frac{2}{37^2}$	$-\frac{2}{35^2}$	$-\frac{2}{33^2}$	$-\frac{2}{31^2}$	$-\frac{2}{29^2}$	$-\frac{2}{27^2}$	$-\frac{2}{25^2}$	$-\frac{2}{23^2}$	$-\frac{2}{21^2}$	$-\frac{2}{19^2}$	$-\frac{2}{17^2}$	$-\frac{2}{15^2}$	$-\frac{2}{13^2}$	$-\frac{2}{11^2}$	$-\frac{2}{9^2}$	$-\frac{2}{7^2}$	$-\frac{2}{5^2}$	$-\frac{2}{3^2}$	-1	$+1$	$+\frac{2}{3^2}$	$+\frac{2}{5^2}$	$+\frac{2}{7^2}$
22.eme .. $\frac{2DR^2}{(R+42r)^2} =$	$-\frac{2\delta}{41^2}$	$-\frac{2}{39^2}$	$-\frac{2}{37^2}$	$-\frac{2}{35^2}$	$-\frac{2}{33^2}$	$-\frac{2}{31^2}$	$-\frac{2}{29^2}$	$-\frac{2}{27^2}$	$-\frac{2}{25^2}$	$-\frac{2}{23^2}$	$-\frac{2}{21^2}$	$-\frac{2}{19^2}$	$-\frac{2}{17^2}$	$-\frac{2}{15^2}$	$-\frac{2}{13^2}$	$-\frac{2}{11^2}$	$-\frac{2}{9^2}$	$-\frac{2}{7^2}$	$-\frac{2}{5^2}$	$-\frac{2}{3^2}$	-1	$+1$	$+\frac{2}{3^2}$	$+\frac{2}{5^2}$
23.eme .. $\frac{2DR^2}{(R+44r)^2} =$	$-\frac{2\delta}{43^2}$	$-\frac{2}{41^2}$	$-\frac{2}{39^2}$	$-\frac{2}{37^2}$	$-\frac{2}{35^2}$	$-\frac{2}{33^2}$	$-\frac{2}{31^2}$	$-\frac{2}{29^2}$	$-\frac{2}{27^2}$	$-\frac{2}{25^2}$	$-\frac{2}{23^2}$	$-\frac{2}{21^2}$	$-\frac{2}{19^2}$	$-\frac{2}{17^2}$	$-\frac{2}{15^2}$	$-\frac{2}{13^2}$	$-\frac{2}{11^2}$	$-\frac{2}{9^2}$	$-\frac{2}{7^2}$	$-\frac{2}{5^2}$	$-\frac{2}{3^2}$	-1	$+1$	$+\frac{2}{3^2}$
24.eme .. $\frac{2DR^2}{(R+46r)^2} =$	$-\frac{2\delta}{45^2}$	$-\frac{2}{43^2}$	$-\frac{2}{41^2}$	$-\frac{2}{39^2}$	$-\frac{2}{37^2}$	$-\frac{2}{35^2}$	$-\frac{2}{33^2}$	$-\frac{2}{31^2}$	$-\frac{2}{29^2}$	$-\frac{2}{27^2}$	$-\frac{2}{25^2}$	$-\frac{2}{23^2}$	$-\frac{2}{21^2}$	$-\frac{2}{19^2}$	$-\frac{2}{17^2}$	$-\frac{2}{15^2}$	$-\frac{2}{13^2}$	$-\frac{2}{11^2}$	$-\frac{2}{9^2}$	$-\frac{2}{7^2}$	$-\frac{2}{5^2}$	$-\frac{2}{3^2}$	-1	$+1$

SIXIÈME MÉMOIRE

SUR L'ÉLECTRICITÉ.

Par M. COULOMB.

Suite des recherches ſur la diſtribution du fluide électrique entre pluſieurs corps conducteurs : détermination de la denſité électrique dans les différens points de la ſurface de ces corps.

I.

DANS notre *cinquième Mémoire*, dont celui-ci eſt la ſuite, nous avons tâché de déterminer la manière dont le fluide électrique ſe partage entre deux globes de différens diamètres mis en contact, & entre trois globes du même diamètre. Nous avons en même temps déterminé par l'expérience, ainſi que par la théorie, la denſité électrique de chaque point de la ſurface de ces globes lorſqu'ils ſont en contact. Nous allons actuellement chercher,

1.° Comment l'électricité ſe diſtribue entre un nombre quelconque de globes égaux mis en contact de manière que tous les centres ſoient en ligne droite ;

2.° Comment le fluide électrique ſe diſtribue ſur les différentes parties d'un cylindre électriſé ;

3.° Comment il ſe diſtribue entre un gros globe & une file de petits globes en contact avec ce gros globe ;

4.° Dans quel rapport le fluide électrique ſe partage entre un gros globe & des cylindres de différens diamètres & de différentes longueurs, mis ſucceſſivement en contact avec le globe.

I I.

Détermination de la distribution du fluide électrique des six globes égaux mis en contact.

J'AI formé une ligne de six globes de deux pouces de diamètre, qui peuvent se séparer à volonté, un desquels, *C*, *fig. 1.ere*, est soutenu par un petit cylindre de gomme laque, & peut se placer soit dans la balance électrique, soit dans la file des globes. Après avoir, d'après les méthodes indiquées dans le *Volume de 1787, pages 421 & suivantes*, électrisé le petit plan de papier qui termine l'aiguille de la balance, j'électrise les six globes qui sont posés, *fig. 1.ere*, sur des supports idio-électriques : je place ensuite alternativement le globe *C* le premier & le deuxième de la file, & à chaque essai je le présente dans la balance à l'aiguille que j'ai soin de ramener à la même distance du centre du globe *C* : je fais ensuite la même opération en plaçant le globe alternativement le premier & le troisième dans la file ; par ces deux opérations, je détermine les rapports entre les quantités d'électricité que contiennent le premier, le deuxième & le troisième globe dans la file.

PREMIÈRE EXPÉRIENCE.

Le globe C *placé le premier dans la file, comparé avec le même globe placé le deuxième dans la file.*

DANS chaque essai, lorsque le globe *C*, après avoir été tiré de la file, étoit placé dans la balance, l'on ramenoit l'aiguille, par la force de torsion, à 30 degrés du centre du globe *C*.

1.er Essai : le globe *C* placé en 2, ou le deuxième dans la file, & présenté ensuite dans la balance, a

chassé l'aiguille, qui a été ramenée à 30 degrés du centre de ce globe, par une force de torsion, tout compris, de............ 44$^{deg.}$

2.e *Essai:* placé le premier dans la file...... 64.

3.e *Essai:* placé le deuxième............... 40.

4.e *Essai:* placé le premier................ 54.

5.e *Essai:* placé le deuxième............... 34.

DEUXIÈME EXPÉRIENCE.

Le globe C *placé le premier dans la file, comparé avec le même globe placé le troisième dans la file.*

1.er *Essai:* le globe *C* placé le troisième dans la file; le reste comme dans l'expérience qui précède la force de torsion, est de.......... 81$^{deg.}$

2.e *Essai:* placé le premier dans la file..... 111.

3.e *Essai:* placé le troisième............... 61.

4.e *Essai:* placé le premier................ 85,

5.e *Essai:* placé le troisième............... 51.

III.

Résultat des deux Expériences qui précèdent.

Les cinq essais dans chaque expérience, ont été faits à des intervalles de temps à peu-près égaux, pour qu'en prenant une moyenne entre le premier & le troisième essai, par exemple, cette moyenne pût se comparer avec le deuxième essai; la différence entre le résultat donné par l'expérience entre le premier & troisième essai, provenant de la diminution de l'électricité qui est occasionnée dans cet intervalle de temps par le contact de l'air, comme nous l'avons déjà observé dans les Mémoires qui précèdent.

Dans la première expérience, en prenant une valeur moyenne entre le premier & le troisième essai comparé au deuxième, l'on trouvera que la quantité d'électricité que

contient le premier globe, eſt à celle que contient le deuxième globe :: 64 : 42. . . . . :: 1,52 : 1,00.

Une moyenne entre le deuxième & quatrième eſſai, comparé au troiſième, donnera ce rapport :: 1,47 : 1,00.

Une moyenne entre le troiſième & cinquième, comparé au quatrième, donnera ce rapport. . . . :: 1,46 : 1,00.

Ainſi en prenant une valeur moyenne entre ces trois réſultats, l'on trouvera que dans notre file de ſix globes, la quantité d'électricité du premier globe eſt à celle du deuxième comme 1,48 eſt à 1,00.

Un calcul analogue entre le premier & le troiſième globe, donnera, d'après les eſſais de la deuxième expérience, que la quantité d'électricité que contient le premier globe dans la file des ſix globes, eſt à celle que contient le troiſième globe :: 1,56 : 1,00. En ſorte que la maſſe du fluide électrique diminue à peu-près d'un tiers du premier au deuxième globe, & ſeulement d'un quinzième du ſecond au troiſième.

I V.

Application de la théorie à cette expérience.

IL faut ſe reſſouvenir dans tous les articles de ce Mémoire, relatifs à la théorie, 1.° que le fluide électrique agit en raiſon inverſe du carré des diſtances de ſes parties.

2.° Qu'il ſe diſtribue ſur la ſurface des corps, mais qu'il ne pénètre pas au moins d'une manière ſenſible dans l'intérieur des corps. Nous avons prouvé la première propoſition dans notre premier Mémoire, *vol. de 1785;* la deuxième dans le quatrième Mémoire, imprimé en 1786. On peut la confirmer par une nouvelle expérience qui paroît déciſive: voici en quoi elle conſiſte. On iſole un corps conducteur que l'on électriſe; on lui forme enſuite une enveloppe coupée en deux parties, qui laiſſe en ſe réuniſſant un peu de jeu entr'elle & le corps. Que cette enveloppe ait ou non la même figure que le corps, peu importe au ſuccès

de l'expérience. Si l'on électrise le corps placé sur un isoloir, & qu'on le renferme entre ces deux parties de l'enveloppe, soutenues par deux bâtons idio-électriques, en retirant les deux enveloppes, on trouvera, au moyen de nos petits électromètres à suspension de soie, que toute l'électricité du corps a passé aux enveloppes, & que le corps, ou n'en conserve point, ou n'en conserve qu'une partie insensible.

Ces deux propositions étant admises, pour déterminer par approximation la quantité moyenne d'électricité que contient chaque globe dans notre file de six globes, je suppose, pour avoir une première approximation, que la masse électrique de chacun des globes est répandue uniformément sur la surface de ces globes, mais qu'elle est différente pour chaque globe, de manière que l'action électrique de tous les globes sur chaque point de contact soit en équilibre. Dans cette supposition, l'action d'une surface sphérique, dont tous les points ont la même densité D, agissant sur un point de la surface dont la masse électrique seroit μ, seroit représentée par $\Pi D \mu$; Π étant le rapport de la circonférence au rayon. Mais si la même surface sphérique dont le rayon est R, agit sur un point éloigné de la surface de la quantité a, l'action sur ce point sera représentée par $2 \Pi D \mu R^2 : (R + a)^2$: ainsi, en calculant dans notre expérience, *fig. 1*, l'action des six globes sur les points de contact a & a', l'on aura, en nommant $\overset{1}{\delta}$ la densité moyenne du fluide électrique sur le globe 1; $\overset{2}{\delta}$ la densité moyenne sur le globe 2; $\overset{3}{\delta}$ celle sur le globe 3, les deux équations suivantes :

1.ʳᵉ *Equation*, équilibre en a.. $\overset{1}{\delta} = \overset{2}{\delta} + \frac{2\overset{3}{\delta}}{3^2} + \frac{2\delta}{5^2} + \frac{2\overset{2}{\delta}}{7^2} + \frac{2\overset{1}{\delta}}{9^2}$,

2.ᵉ *Equation*, équilibre en a'. $\frac{2}{3^2}\overset{1}{\delta} = -\overset{2}{\delta} + \overset{3}{\delta} + \frac{2\overset{3}{\delta}}{3^2} + \frac{2\overset{2}{\delta}}{5^2} + \frac{2\overset{1}{\delta}}{7^2}$

qui se réduisent à

1.ère Equation..... $0,98 \overset{1}{\delta} = 1,04 \overset{2}{\delta} + 0,29 \overset{3}{\delta}$;

2.e Equation..... $0,18 \overset{1}{\delta} = - 0,92 \overset{2}{\delta} + 1,22 \overset{3}{\delta}$;

d'où l'on tire $\overset{1}{\delta} = 1,33 \overset{2}{\delta}$; $\overset{1}{\delta} = 1,42 \overset{3}{\delta}$.

Nous avons trouvé par l'expérience, $\overset{1}{\delta} = 1,48 \overset{2}{\delta}$ & $\overset{1}{\delta} = 1,56 \overset{3}{\delta}$; ainsi l'expérience donne le rapport de la densité moyenne du fluide électrique du premier globe aux deux autres, d'un dixième à peu-près plus grand que la théorie. Nous avions déjà eu ce résultat dans le Mémoire qui précède, pour trois globes égaux mis en ligne droite.

Il est facile de voir à quoi tient en plus grande partie la différence des résultats entre le calcul que nous venons de donner & l'expérience; dans le calcul qui précède nous avons supposé que la densité électrique est uniformément répandue sur chaque globe; mais dans la réalité cette densité est nulle, ou au moins insensible à tous les points de contact des globes, comme nous l'avons prouvé, *vol. de 1787, pag. 437 & suiv.* Dans le globe *2*, *fig. 1*, ainsi que dans tous les autres, excepté le premier & le dernier de la file, la densité électrique croît depuis le point de contact jusqu'en ^2d, placé vers le sommet de l'équateur, où est son *maximum*. Dans le premier & le dernier globe de la file, cette densité croît depuis le point de contact jusqu'au point *b*, pôle opposé: les lignes ponctuées dans notre figure, donnent à peu-près la forme de la courbe des densités.

Si nous cherchons à présent à déterminer l'équilibre au point *a*, en supposant que toute la masse du fluide électrique du globe 2, est réunie au point ^2d ou à l'équateur, & que celle du globe 1 est une quantité moyenne entre celle réunie au point ^1d & celle réunie au point *b*; la quantité

du fluide électrique répandue sur la surface de chaque globe, étant $2\pi d r^2$; π étant le rapport de la circonférence au rayon, le rayon du globe étant r, & δ la densité moyenne du fluide électrique, ou celle qui auroit lieu si le fluide électrique de chaque globe se répandoit uniformément sur la surface de ce globe, l'on auroit

$\frac{2\pi \overset{2}{\delta}}{2\frac{1}{2}} = 0{,}70\,\pi . \overset{2}{\delta}$ pour l'action du fluide électrique du globe 2 sur le point a, dans la supposition que tout ce fluide seroit concentré à l'équateur; cette action évaluée dans la direction de l'axe a 1. Les autres globes éloignés du point de contact sur lequel l'on calcule l'équilibre d'action, peuvent, sans erreur sensible, être supposés agir comme si la masse de leur fluide électrique étoit au centre de chaque globe.

Quant au globe 1, dont on veut avoir l'action relativement au point a, sa densité moyenne étant $\overset{1}{\delta}$, si la masse de son fluide étoit concentrée au point de l'équateur d, son action seroit égale $0{,}70\,\pi\,\overset{1}{\delta}$; si elle étoit concentrée au point b, elle seroit.......................... $0{,}50\,\pi\,\overset{1}{\delta}$: en la prenant moyenne entre ces deux quantités, elle sera $0{,}60\,\pi\,\overset{1}{\delta}$, L'on peut actuellement former dans cette nouvelle supposition deux équations; la première, qui exprime l'équilibre au point a, la deuxième, qui exprime l'équilibre au point $\overset{1}{a}$.

1.re *Equat.* $0{,}60\,\overset{1}{\delta} = 0{,}70\,\overset{2}{\delta} + 0{,}22\,\overset{3}{\delta} + 0{,}08\,\overset{3}{\delta} + 0{,}04\,\overset{2}{\delta} + 0{,}02\,\overset{1}{\delta}$.

2.e *Equat.* $0{,}22\,\overset{1}{\delta} = -0{,}70\,\delta + 0{,}70\,\overset{2}{\delta} + 0{,}22\,\overset{3}{\delta} + 0{,}08\,\overset{3}{\delta} + 0{,}04\,\overset{2}{\delta}$,

qui réduites donnent

$$\left(\frac{58}{74} + \frac{18}{62}\right)\overset{1}{\delta} = \left(\frac{30}{74} + \frac{92}{62}\right)\overset{3}{\delta},$$

d'où $\overset{3}{\delta} = 1,75\,\overset{1}{\delta}$, l'expérience nous a donné $\overset{3}{\delta} = 1,56\,\overset{1}{\delta}$. Ainsi, dans notre nouvelle supposition, le calcul donne $\overset{3}{\delta}$ d'un huitième à peu-près plus grand que l'expérience : dans notre première supposition du fluide électrique uniformément répandu sur chaque globe, nous trouvons $\overset{3}{\delta} = 1,42\,\overset{1}{\delta}$; mais, ainsi que nous l'avons prouvé dans notre précédent Mémoire, le fluide électrique se distribue sur la surface des globes, suivant une forme moyenne entre celle de nos deux suppositions, la densité étant nulle au point de contact, & la masse du fluide n'étant pas en entier réunie à l'équateur ; ainsi, le rapport donné par l'expérience doit être à peu-près une quantité moyenne entre les résultats du calcul de nos deux suppositions. Nous avons, par la première supposition du fluide uniformément répandu sur la surface de chaque globe $\overset{3}{\delta} = 1,42\,\overset{1}{\delta}$, par la deuxième supposition du fluide concentré à l'équateur $\overset{3}{\delta} = 1,75\,\overset{1}{\delta}$, ce qui donne pour quantité moyenne $\overset{3}{\delta} = 1,58$: l'expérience donne 1,56. La correction indiquée par le calcul de cet article, s'appliquera facilement à toute la théorie de ce Mémoire.

V.

TROISIÈME EXPÉRIENCE.

De la manière dont le fluide électrique se distribue entre douze globes égaux de deux pouces de diamètre, mis en contact sur la même ligne.

LES détails dans lesquels nous sommes entrés en expliquant l'expérience précédente, suffisent, je crois, pour faire

faire entendre les procédés qu'il faut suivre; ainsi pour ne pas grossir inutilement ce Mémoire, nous ne rapporterons dans toutes les expériences analogues, que les résultats. Dans une ligne, formée par douze globes de 2 pouces de diamètre, nous avons trouvé que la quantité de fluide électrique que contient le premier globe, est à celle que contient le deuxième : : 1,50 : 1,00; en comparant le premier globe avec le sixième ou avec celui du milieu, nous avons trouvé que la quantité de fluide électrique que prend le premier globe, est à celle que prend le sixième : : 1,70 : 1,00.

VI.

QUATRIÈME EXPÉRIENCE.

Distribution du fluide électrique entre vingt-quatre globes de 2 pouces de diamètre, mis en contact sur une même ligne.

EN comparant toujours par la même méthode le premier globe avec le deuxième, j'ai trouvé que la quantité d'électricité que contenoit le premier globe, étoit à celle que contenoit le deuxième : : 1,56 : 1,00; en comparant le premier & le douzième, ou celui du milieu, j'ai trouvé que la quantité de l'électricité que contenoit le premier globe de la file, étoit à celle du globe du milieu : : 1,75 : 1,00.

Résultat des deux dernières expériences.

Il résulte de ces deux expériences que, quel que soit le nombre des globes mis en contact sur une ligne droite, la densité moyenne varie considérablement du premier au deuxième globe, mais qu'ensuite elle varie très-lentement du deuxième jusqu'à celui du milieu : dans la quatrième expérience, nous avions une ligne formée de 24 globes. La densité moyenne du premier au deuxième globe, a diminué

dans le rapport de 1,56 à 1,00; mais, du second au douzième, elle n'a varié que dans le rapport de 1,75 à 1,56.

Si nous voulons appliquer ici les méthodes d'approximation qui précèdent, nous prendrons d'abord la ligne formée de douze globes, en nommant $\overset{1}{\delta}$ la densité moyenne du premier globe, $\overset{2}{\delta}$ celle du deuxième, $\overset{3}{\delta}$ celle du troisième, $\overset{4}{\delta}$ celle du quatrième, &c. nous aurons pour la première équation qui exprime l'équilibre au point *a*,

$$\overset{1}{\delta} = \overset{2}{\delta} + \frac{2}{3^2}\overset{3}{\delta} + \frac{2}{5^2}\overset{4}{\delta} + \frac{2}{7^2}\overset{5}{\delta} + \frac{2}{9^2}\overset{6}{\delta}$$

$$+ \frac{2\overset{6}{\delta}}{11^2} + \frac{2\overset{5}{\delta}}{13^2} + \frac{2\overset{4}{\delta}}{15^2} + \frac{2\overset{3}{\delta}}{17^2} + \frac{2\overset{2}{\delta}}{19^2} + \frac{2\delta}{21^2};$$

Mais puisque les densités, depuis le deuxième globe jusqu'à celui du milieu, varient lentement, que d'ailleurs les coéfficiens diminuent suivant une série très-convergente, à mesure que l'on s'éloigne de $\overset{1}{\delta}$; l'on peut, sans grande erreur, supposer $\overset{3}{\delta}$, $\overset{4}{\delta} = \overset{2}{\delta}$; d'où en sommant la série, l'on aura très-approchant $\overset{1}{\delta} = 1{,}41\,\overset{2}{\delta}$;

quantité moindre à peu-près d'un dixième que $\overset{1}{\delta} = 1{,}55\,\overset{2}{\delta}$ que nous a fourni l'expérience, différence produite, ainsi que nous l'avons expliqué, *article III*, par le fluide condensé au dernier globe à l'extrémité de l'axe; au lieu que dans les autres, c'est à l'équateur que le *maximum* de la condensation a lieu.

Pour déterminer à présent la quantité de l'électricité que contient le sixième globe, relativement au premier, je forme, d'après la méthode de l'*article IV*, un tableau

de cinq équations qui expriment l'état d'équilibre à tous les points de contact.

Voici ces cinq équations :

Au point a . . . $-\overset{1}{\delta}+\overset{2}{\delta}+\frac{2}{3^2}\overset{3}{\delta}+\frac{2}{5^2}\overset{4}{\delta}+\frac{2}{7^2}\overset{5}{\delta}+\frac{2}{9^2}\overset{6}{\delta}$
$+\frac{2}{11^2}\overset{6}{\delta}+\frac{2}{13^2}\overset{5}{\delta}+\frac{2}{15^2}\overset{4}{\delta}+\frac{2}{17^2}\overset{3}{\delta}+\frac{2}{19^2}\overset{2}{\delta}+\frac{2}{21^2}\overset{1}{\delta}=0.$

Au point $\overset{1}{a}$ . . . $-\frac{2}{3^2}\overset{1}{\delta}-\overset{2}{\delta}+\overset{3}{\delta}+\frac{2}{3^2}\overset{4}{\delta}+\frac{2}{5^2}\overset{5}{\delta}+\frac{2}{7^2}\overset{6}{\delta}$
$+\frac{2}{9^2}\overset{6}{\delta}+\frac{2}{11^2}\overset{5}{\delta}+\frac{2}{13^2}\overset{4}{\delta}+\frac{2}{15^2}\overset{3}{\delta}+\frac{2}{17^2}\overset{2}{\delta}+\frac{2}{19^2}\overset{1}{\delta}=0,$

Au point $\overset{2}{a}$ . . . $-\frac{2}{5^2}\overset{1}{\delta}-\frac{2}{3^2}\overset{2}{\delta}-\overset{3}{\delta}+\overset{4}{\delta}+\frac{2}{3^2}\overset{5}{\delta}+\frac{2}{5^2}\overset{6}{\delta}$
$+\frac{2}{7^2}\overset{6}{\delta}+\frac{2}{9^2}\overset{5}{\delta}+\frac{2}{11^2}\overset{4}{\delta}+\frac{2}{13^2}\overset{3}{\delta}+\frac{2}{15^2}\overset{2}{\delta}+\frac{2}{17^2}\overset{1}{\delta}=0.$

Au point $\overset{3}{a}$ . . . $-\frac{2}{7^2}\overset{1}{\delta}+\frac{2}{5^2}\overset{2}{\delta}-\frac{2}{3^2}\overset{3}{\delta}-\overset{4}{\delta}+\overset{5}{\delta}+\frac{2}{3^2}\overset{6}{\delta}$
$+\frac{2}{5^2}\overset{6}{\delta}+\frac{2}{7^2}\overset{5}{\delta}+\frac{2}{9^2}\overset{4}{\delta}+\frac{2}{11^2}\overset{3}{\delta}+\frac{2}{13^2}\overset{2}{\delta}+\frac{2}{15^2}\overset{1}{\delta}=0,$

Au point $\overset{4}{a}$ . . . $-\frac{2}{9^2}\overset{1}{\delta}-\frac{2}{7^2}\overset{2}{\delta}-\frac{2}{5^2}\overset{3}{\delta}-\frac{2}{3^2}\overset{4}{\delta}-\overset{5}{\delta}+\overset{6}{\delta}$
$+\frac{2}{3^2}\overset{6}{\delta}+\frac{2}{5^2}\overset{5}{\delta}+\frac{2}{7^2}\overset{4}{\delta}+\frac{2}{9^2}\overset{3}{\delta}+\frac{2}{11^2}\overset{2}{\delta}+\frac{2}{13^2}\overset{1}{\delta}=0.$

Ces cinq équations entre six inconnues étant du premier degré, il est facile par les méthodes ordinaires de les réduire à une seule, qui représentera le rapport de la densité moyenne de deux globes pris à volonté dans notre ligne formée par 12 globes mis en contact; mais, comme nous n'avons pas besoin ici d'une précision beaucoup plus grande que celle fournie par l'expérience, nous remarquerons que les densités des différens globes ne varient pas considérablement, excepté du premier au deuxième globe; ainsi l'on peut prendre les densités intermédiaires comme égales, lorsqu'on ne les introduit dans le calcul qu'en petites

fractions; ainsi, pour avoir le rapport de la densité d'un des globes de la ligne avec le premier, il faut faire en sorte de combiner les équations, de manière que le coéfficient de la densité dont on veut avoir l'évaluation, soit beaucoup plus grand que les autres; mais, si j'ajoute ensemble les cinq équations qui précèdent, j'aurai

$$0 = -1{,}38\,\overset{1}{\delta} - 0{,}33\,\overset{2}{\delta} - 0{,}07\,\overset{3}{\delta} + 0{,}07\,\overset{4}{\delta} + 0{,}33\,\overset{5}{\delta} + 1{,}36\,\overset{6}{\delta}$$
$$+ 0{,}38\,\overset{6}{\delta} + 0{,}16\,\overset{5}{\delta} + 0{,}10\,\overset{4}{\delta} + 0{,}07\,\overset{3}{\delta} + 0{,}05\,\overset{2}{\delta} + 0{,}04\,\overset{1}{\delta}.$$

Dans cette équation, on voit qu'il n'y a que les coéfficiens de $\overset{1}{\delta}$ & $\overset{6}{\delta}$ qui soient considérables : nous savons de plus que la densité varie peu, excepté du premier au deuxième globe; ainsi nous pouvons supposer la densité moyenne électrique, à peu-près la même dans les termes dont les coéfficiens sont des fractions depuis le deuxième jusqu'au sixième globe; il résultera de cette supposition $1{,}34\,\overset{1}{\delta} = 2{,}16\,\overset{6}{\delta}$,

d'où . . . . $\overset{1}{\delta} = 1{,}54\,\overset{6}{\delta}$.

L'expérience a donné $\overset{1}{\delta} = 1{,}70\,\overset{6}{\delta}$; en sorte que le rapport de la quantité du fluide électrique du premier globe se trouve, relativement à celui du globe du milieu, d'un dixième à peu-près plus grand par l'expérience que par le calcul : résultat conforme à tout ce que nous avons trouvé précédemment.

V I I.

Distribution du fluide électrique sur la surface d'un cylindre.

CINQUIÈME EXPÉRIENCE.

ON s'est servi dans cette expérience, pour suspendre l'aiguille de la balance électrique, d'un fil d'argent doré, dont la force de torsion, sous le même angle de torsion,

n'étoit que la vingtième partie de celle du fil de cuivre le plus fin, numéroté 12 dans le commerce, qui a servi dans les quatre expériences qui précèdent.

On a placé, *fig. 2, n.° 3*, un cylindre de 2 pouces de diamètre & 30 pouces de longueur, terminé par deux demi-sphères, sur un support idio-électrique. On a fait toucher ce cylindre électrisé par un petit plan de papier doré, soutenu par un fil de gomme laque que l'on introduisoit ensuite dans la balance suivant les procédés déjà indiqués dans notre cinquième mémoire, *volume de 1787, planche I.re figure 3*. Il a résulté de cette expérience, en touchant alternativement un point pris au milieu de la surface du cylindre & un point pris à l'extrémité, que la densité au milieu du cylindre est à celle à l'extrémité, comme 1,00 : 2,30.

En comparant un point au milieu du cylindre avec un point à 2 pouces de l'extrémité, l'on a trouvé la densité électrique au milieu du cylindre à celle à 2 pouces de l'extrémité, comme 1,00 : 1,25.

En comparant le point du milieu avec un point sur le grand cercle de la demi-sphère qui termine le cylindre ou au point *e*, à 1 pouce de son extrémité, on a trouvé les densités, comme 1,00 : 1,80.

Résultat de cette expérience.

Il résulte de cette expérience, que sur les deux derniers pouces à l'extrémité du cylindre, la densité électrique est beaucoup plus considérable que vers le milieu du cylindre; mais qu'elle varie peu depuis le milieu du cylindre jusqu'à deux pouces de son extrémité.

VIII.

Théorie de la distribution du fluide électrique sur la surface d'un cylindre isolé.

LORSQU'UN corps est chargé de fluide électrique, &

que ce fluide est en équilibre, il faut qu'en divisant le corps en deux parties, & calculant l'action de ces deux parties sur un point quelconque, cette action étant évaluée dans une même direction, il y ait équilibre. Ainsi il suffit, pour avoir les conditions d'équilibre du fluide électrique sur la surface d'un cylindre, de calculer les conditions d'équilibre relativement à l'axe de ce cylindre.

PREMIER EXEMPLE.

Cylindre de deux pouces de diamètre & six pouces de longueur.

LE cylindre, *fig. 2, n.° 1*, a 2 pouces de diamètre & 6 pouces de longueur : on le divise aux points 1 & 2 par des plans perpendiculaires à l'axe, en trois parties égales ; il est terminé par une demi-sphère aux deux extrémités. On suppose que la densité moyenne sur la surface de la partie *d a e* est $\overset{1}{\delta}$; que celle sur la partie *d e g f* est $\overset{2}{\delta}$: celle de la partie *f g b* sera la même que celle de *d a e*.

Mais l'action de la demi-sphère *k a L* sur le point 1, dans la direction *a* 1, est $\pi\,\overset{1}{\delta}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{(2)}}\right)$: le rayon du cylindre étant l'unité, & π le rapport de la circonférence au rayon ; la portion du cylindre *d k L e*, dont la longueur est égale au rayon, a pour action sur le point 1 dans la direction *a* 1, la quantité $\pi\,\overset{1}{\delta}\left(1 - \frac{1}{(\sqrt{2})}\right)$: l'action de la portion *d e g f*, qui a 2 pouces de longueur sur le même point 1 dans la direction opposée, est égale à $\pi\,\overset{2}{\delta}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{(5)}}\right) = 0{,}55\,\pi\,\overset{2}{\delta}$; l'action de la portion *f b g*, sur le même point 1, dans la même direction, peut sans erreur sensible se calculer comme si elle étoit réunie au milieu de *2 b* ou à 3 pouces du point 1 ; ainsi

ſon action ſur le point 1 eſt très-approchant $0,22\,\pi\,\delta$, d'où réſulte pour exprimer l'équilibre au point 1 de toutes les actions évaluées ſuivant la direction de l'axe, l'équation $0,59\,\overset{1}{\delta} = 0,55\,\overset{2}{\delta} + 0,22\,\delta$,

d'où réſulte $\overset{1}{\delta} = 1,49\,\overset{2}{\delta}$.

DEUXIÈME EXEMPLE.

Cylindre de deux pouces de diamètre & de douze pouces de longueur.

SI le cylindre, *fig. 2, n.° 2,* avoit 12 pouces de longueur & qu'il fût terminé en demi-ſphère à chaque extrémité, pour avoir une valeur approchée de la denſité moyenne de ſes différentes parties, on le diviſeroit en 6 parties égales de 2 pouces chacune de longueur, & on chercheroit les conditions d'équilibre dans la direction de l'axe pour le point 1 & pour le point 2. Soit $\overset{1}{\delta}$ la denſité moyenne ſur la partie de la ſurface qui répond à *a* 1; $\overset{2}{\delta}$ la denſité moyenne ſur la ſurface qui répond à 1 2; $\overset{3}{\delta}$ ſur la ſurface qui répond à 2 3; l'on aura, d'après ce qui eſt expliqué dans l'article qui précède, les deux équations ſuivantes.

Pour l'équilibre au point 1:

1.re éq.. $0,59\,\overset{1}{\delta} = 0,55\,\overset{2}{\delta} + 0,22\,\overset{3}{\delta} + 0,08\,\overset{3}{\delta} + 0,04\,\overset{2}{\delta} + 0,02\,\overset{1}{\delta}$.

Pour l'équilibre au point 2.

2.e éq.. $0,22\,\overset{1}{\delta} = -\,0,55\,\overset{2}{\delta} + 0,55\,\overset{3}{\delta} + 0,22\,\overset{3}{\delta} + 0,08\,\overset{2}{\delta} + 0,04\,\overset{1}{\delta}$.

Ces deux équations ſe réduiſent à

$$1.^{re} \ldots \ 0{,}57 \overset{1}{\delta} = 0{,}59 \overset{2}{\delta} + 0{,}30 \overset{3}{\delta},$$

$$2.^{e} \ldots \ 0{,}18 \overset{1}{\delta} = - 0{,}47 \overset{2}{\delta} + 0{,}77 \overset{3}{\delta},$$

d'où résulte $\overset{1}{\delta} = 1{,}60 \overset{3}{\delta}$ & $\overset{1}{\delta} = 1{,}55 \overset{2}{\delta}$;

rapports un peu plus grands, mais qui ſe rapprochent cependant beaucoup de ceux que nous avons trouvés *art. II* & *III*, pour ſix globes égaux mis en contact ſur une ligne droite. L'on ſent en effet, d'après les obſervations que nous avons faites *art. IV*, dans la théorie de la diſtribution du fluide électrique ſur ſix globes en contact & en ligne droite, que la denſité étant preſque nulle dans les points de contact des globes & dans les parties qui avoiſinent, la diſtribution moyenne du fluide électrique ſur chaque globe doit être à peu-près la même que ſur un cylindre continu qui auroit 12 pouces de longueur, & qui ſeroit terminé par deux demi-ſphères.

I X.

Seconde méthode d'approximation pour déterminer par la théorie, la diſtribution du fluide électrique le long de la ſurface d'un cylindre terminé par deux demi-ſphères.

D'APRÈS les deux exemples qui précèdent, & d'après la théorie que nous avons donnée de la diſtribution du fluide électrique ſur une ligne formée de douze globes de 2 pouces en contact, il eſt facile, en diviſant un cylindre en un nombre de parties égales chacune à ſon diamètre, de déterminer la denſité moyenne de chacune de ces parties; mais lorſque le cylindre a une grande longueur, la méthode ſuivante eſt ſuffiſante, & ſimplifie beaucoup le calcul.

Je

Je prends pour exemple un cylindre de 30 pouces de longueur & 2 pouces de diamètre, *fig. 2*, *n.° 3*. Je diviſerai pour avoir une première approximation, ce cylindre en trois parties inégales; la première formée de la demi-ſphère $e\,b\,f$, dont la denſité eſt $\overset{1}{\delta}$; la deuxième, de la portion cylindrique $e\,e'\,f\,f'$, ayant 2 pouces de longueur, dont la denſité eſt $\overset{2}{\delta}$; la troiſième depuis d' juſqu'en a, extrémité de l'axe du cylindre dont la denſité eſt $\overset{3}{\delta}$. Il faut à préſent calculer l'action de ces trois parties ſur les points d & d' ſuivant la direction de l'axe. L'on en tirera les deux équations approchées.

Première équation pour l'équilibre au point d :

$$\frac{\overset{1}{\delta}}{2} = \overset{2}{\delta}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{(5)}}\right) + \overset{3}{\delta}\left(\frac{1}{\sqrt{(5)}} - \frac{1}{29}\right).$$

Deuxième équation pour l'équilibre au point d' :

$$\frac{\overset{1}{\delta}}{(2\frac{1}{2})^2} = -\overset{2}{\delta}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{(5)}}\right) + \overset{3}{\delta}\left(1 - \frac{1}{27}\right).$$

Le calcul de ces deux équations eſt fondé ſur ce que l'action de la ſurface demi-ſphérique $e\,b\,f$, ſur le point d qui eſt à ſon centre, eſt égal à $\frac{\pi \overset{1}{\delta}}{2}$; & ſur ce que l'action d'une portion de ſurface cylindrique, dont la denſité D eſt uniforme, agiſſant dans la direction de l'axe, eſt égale à $\pi D r\left(\frac{1}{(rr + aa)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(rr + xx)^{\frac{1}{2}}}\right)$ dans laquelle a repréſente la diſtance du point où le cylindre commence, au point ſur lequel il agit ; x repréſente la diſtance du point où le cylindre finit, au point ſur lequel il exerce ſon action ; r eſt le rayon du cylindre ; π le rapport de la circonférence au rayon : en appliquant cette formule

à notre exemple, l'on en tire les deux équations qui précèdent, d'où résulte $\overset{1}{\delta} = 2{,}09\,\overset{3}{\delta}$, & $\overset{2}{\delta} = 1{,}14\,\overset{3}{\delta}$.

Ainſi, par ce calcul approché, l'on trouve que la denſité moyenne du fluide électrique ſur la ſurface de la demi-ſphère qui termine le cylindre, eſt double de la denſité moyenne ſur la ſurface du cylindre. Si nous comparons ce réſultat avec la dernière expérience, *art. VII,* l'on a trouvé par cette expérience, que la denſité à l'extrémité de l'axe du cylindre ou au pôle de la demi-ſphère qui le termine, eſt à celle au milieu du cylindre : : 2,30 : 1,00; nous avons également trouvé, *même article,* que la denſité ſur le grand cercle de cette demi-ſphère eſt à celle au milieu du cylindre : : 1,80 : 1,00. Ainſi, en prenant une moyenne entre ces deux valeurs, dont l'une repréſente la plus grande denſité de la demi-ſphère, & l'autre la plus petite, cette denſité décroiſſant depuis le pôle de la demi-ſphère juſqu'à l'équateur, l'on aura le rapport de la denſité moyenne de la demi-ſphère à la denſité moyenne ſur le cylindre, comme $\frac{2{,}30 + 1{,}80}{2} : 1{,}00 :: 2{,}05 : 1{,}00$, preſque exactement la même quantité qui nous a été fournie par la théorie; ce qui doit effectivement avoir lieu, puiſque la denſité varie très-peu depuis le milieu du cylindre juſqu'à 2 ou 3 pouces de ſon extrémité. Nous donnerons dans la ſuite de ce Mémoire des méthodes d'approximations, pour déterminer d'une manière ſuffiſamment exacte dans la pratique, les loix de la variation de la denſité électrique le long de la ſurface d'un cylindre.

X.

De la manière dont le fluide électrique ſe diſtribue entre un certain nombre de globes égaux mis en contact ſur une même ligne terminée par un globe d'un plus grand diamètre.

LES expériences de cet article s'exécutent comme celles

qui précèdent; l'on met sur des isoloirs idio-électriques la file des petits globes de 2 pouces de diamètre, ainsi que le globe de 8 pouces. Un de ces petits globes se place à différens endroits de la ligne, & alternativement dans la balance.

X I.

SIXIÈME EXPÉRIENCE.

Distribution du fluide électrique entre trois globes en contact, l'un ayant 8 pouces de diamètre, & les deux autres 2 pouces de diamètre.

EN suivant *fig. 3,* dans cette expérience les procédés des articles qui précèdent, j'ai trouvé qu'en ne plaçant que deux globes, 1 & 2, de 2, pouces de diamètre, dont les centres étoient placés en ligne avec celui du globe *C* de 8 pouces de diamètre, la quantité d'électricité dont se chargeoit le globe 2, le plus éloigné du gros globe, étoit à celle du globe 1 en contact avec le globe *C* :: 2,54 : 1,00.

X I I.

Théorie de cette Expérience.

SI l'on fait le calcul de cette expérience, en supposant, comme dans les articles qui précèdent, que la masse du fluide électrique de chaque globe est répandue uniformément sur la surface de ce globe; si l'on représente par *D* la densité moyenne du fluide électrique sur la surface du gros globe *C*, par *R* le rayon de ce globe; si $\overset{1}{\delta}$ représente la densité du fluide électrique de la surface du petit globe 1, en contact avec le gros globe; & si $\overset{2}{\delta}$ représente la densité électrique de la surface du globe 2, dont le rayon est r, on aura les deux équations suivantes:

Dans le contact au point a;

$$1.^{re}\ \text{équation},\ D = \overset{1}{\delta} + 0,22\,\overset{2}{\delta}.$$

Dans le contact au point a';

$$2.^e\ \text{équation},\ \frac{2DR^2}{(R+2r)^2} = -\overset{1}{\delta} + \overset{2}{\delta}.$$

Et comme dans notre expérience le globe C a 8 pouces de rayon, & les deux autres seulement 2 pouces, l'on aura, d'après ces deux équations,

$$\overset{2}{\delta} = 1,55\,D,\ \overset{1}{\delta} = 0,67\,D,\ \&\ \overset{2}{\delta} = 2,35\,\overset{1}{\delta}.$$

Nous venons de trouver par l'expérience $\overset{2}{\delta} = 2,54\,\overset{1}{\delta}$, quantité un peu plus grande que celle trouvée par la théorie; ce qui doit effectivement avoir lieu, ainsi que nous l'avons dit plus haut, en vertu de la condensation du fluide électrique vers le point a', extrémité de l'axe du petit globe qui termine la file.

XIII.

Septième Expérience.

Un globe de 8 pouces, & quatre globes de 2 pouces en contact.

L'on a mis, *fig. 3*, quatre globes de 2 pouces de diamètre 1, 2, 3, 4, en contact avec le globe C, de 8 pouces de diamètre, & l'on a cherché le rapport des quantités d'électricité que prenoit un globe de 2 pouces placé successivement en 1 & en 4. Par un résultat moyen entre six observations alternatives, l'on a trouvé qu'en plaçant 4 petits globes de 2 pouces à la file en contact avec le globe C, la quantité du fluide électrique que prenoit un petit globe de 2 pouces placé à l'extrémité de la file en 4, étoit à celle du globe 1, immédiatement en contact avec le globe de 8 pouces C, comme 3,40 : 1,00.

XIV.

Résultat & Théorie de la septième Expérience.

POUR calculer par la théorie la septième expérience, où nous avons mis en contact quatre globes de 2 pouces avec un globe de 8 pouces, l'on formera, d'après les méthodes que nous avons déjà expliquées, quatre équations qui exprimeront l'état d'équilibre aux points a, $\overset{1}{a}$, $\overset{2}{a}$, $\overset{3}{a}$. Soit, comme à l'*article précédent*, D la densité moyenne du fluide électrique sur la surface du gros globe C', dont le rayon est R; $\overset{1}{\delta}$ la densité moyenne sur la surface du globe 1; $\overset{2}{\delta}$ celle sur le globe 2; $\overset{3}{\delta}$ celle sur le globe 3; $\overset{4}{\delta}$ celle sur le globe 4, comme dans notre expérience $R = 4r$: nous aurons les quatre équations.

Première équation. L'équilibre au point a donne

$$D = \overset{1}{\delta} + 0{,}22\,\overset{2}{\delta} + 0{,}08\,\overset{3}{\delta} + 0{,}04\,\overset{4}{\delta}.$$

Deuxième équation. L'équilibre au point a',

$$0{,}89\,D = -\overset{1}{\delta} + \overset{2}{\delta} + 0{,}22\,\overset{3}{\delta} + 0{,}08\,\overset{4}{\delta}.$$

Troisième équation. L'quilibre au point a'',

$$0{,}50\,D = -0{,}22\,\overset{1}{\delta} - \overset{2}{\delta} + \overset{3}{\delta} + 0{,}22\,\overset{4}{\delta}.$$

Quatrième équation. L'équilibre au point a''',

$$0{,}32\,D = -0{,}08\,\overset{1}{\delta} - 0{,}22\,\overset{2}{\delta} - \overset{3}{\delta} + \overset{4}{\delta}.$$

Pour résoudre ces quatre équations, ajoutons la première à la quatrième, & la deuxième à la troisième, nous aurons;

1.ere & 4.eme $1{,}32\,D = 0{,}92\,\overset{1}{\delta} - 0{,}92\,\overset{3}{\delta} + 1{,}04\,\overset{4}{\delta}.$

2.eme & 3.eme $1{,}39\,D = -1{,}22\,\overset{1}{\delta} + 1{,}22\,\overset{3}{\delta} + 0{,}30\,\overset{4}{\delta}.$

Il eſt clair que dans cette opération, le coéfficient de $\overset{2}{\delta}$ diſparoît dans les deux réſultats, & que dans chaque équation, $\overset{1}{\delta}$ & $\overset{3}{\delta}$ ont le même coéfficient; ainſi, diviſant le premier réſultat par 0,92, le deuxième par 1,22, ajoutant l'un à l'autre, nous aurons

$$\left(\frac{1,32}{0,92} + \frac{1,39}{1,22}\right) D = \left(\frac{1,04}{0,92} + \frac{0,30}{1,22}\, \overset{4}{\delta}\right);$$

d'où l'on retirera $\overset{4}{\delta} = 1,88\, D$.

Si l'on ſubſtitue cette valeur de $\overset{4}{\delta}$ dans les trois premières équations, & que l'on continue l'opération pour déterminer les valeurs de $\overset{3}{\delta}$, $\overset{2}{\delta}$, $\overset{1}{\delta}$, l'on trouvera

$$\overset{1}{\delta} = 0,60\, D;\ \overset{2}{\delta} = 1,06 D;\ \overset{3}{\delta} = 1,28\, D;\ \overset{4}{\delta}, = 1,88\, D;$$

d'où réſulte $\frac{\overset{4}{\delta}}{\overset{1}{\delta}} = \frac{1,88}{0,60} = 3,13$: mais nous avons trouvé par l'expérience $\overset{4}{\delta} = 3,40\, \overset{1}{\delta}$; ainſi le rapport donné par notre théorie eſt, comme l'on voit, plus petit à peu-près d'un dixième de celui que fournit l'expérience; ce qui eſt conforme à tout ce que nous avons trouvé précédemment, & aux réflexions d'après leſquelles nous avons vu qu'il falloit corriger notre théorie.

REMARQUE.

Si nous ajoutons enſemble les denſités des quatre petits globes, & que nous prenions le quart de cette ſomme, nous aurons la denſité moyenne des quatre petits globes, en ſuppoſant que la ſomme des denſités ſoit diſtribuée uniformément ſur les quatre globes. Cette denſité moyenne ſeroit égale à $\frac{0,60\, D + 1,06\, D + 1,28\, D + 1,88\, D}{4} = 1,205\, D$.

XV.

HUITIÈME EXPÉRIENCE.

POUR confirmer la théorie qui précède, j'ai tâché de déterminer d'une manière directe par l'expérience, le rapport entre la densité du gros globe *C* de 8 pouces de diamètre, & celle du petit globe 4 qui termine la ligne dans la supposition précédente de cinq globes en contact. Voici le procédé que j'ai suivi dans cette comparaison.

Je déterminois d'abord comme dans l'expérience précédente, la densité du globe 4 placé à l'extrémité de la file; je séparois ensuite le globe *C* de la file des quatre petits globes, sans en détruire l'électricité; & je faisois toucher le gros globe par le globe 4 que je présentois ensuite dans la balance électrique, pour déterminer d'une manière directe la quantité d'électricité que ce globe 4 prenoit par un contact immédiat avec le gros globe. D'après ce procédé, j'ai trouvé que le globe 4 placé à l'extrémité de la file des petits globes, prenoit une quantité d'électricité qui étoit à celle qu'il prenoit lorsqu'on le mettoit seul en contact immédiat avec le globle *C* isolé, :: 1,60 : 1,00. Nous trouvons ce rapport par la théorie :: 1,88 : 1,00; mais la théorie, comme nous avons vu dans la supposition de la densité uniforme sur la surface de chaque globe, le donne nécessairement trop petit, & d'après les réflexions & les expériences qui précèdent, la théorie corrigée auroit donné très-approchant ce rapport comme :: 2,00 : 1,00. Pour évaluer le résultat de l'expérience, il faut à présent se ressouvenir, ainsi que nous l'avons vu dans le Mémoire qui précède, qu'un globe de 2 pouces mis en contact avec un globe de 8 pouces, prend une densité moyenne, plus grande que celle du globe de 8 pouces, dans le rapport de 1,30 à 1,00. Ainsi, pour avoir le véritable rapport entre la densité du globe 4 placé le dernier dans la file, & celle du globe *C'*, il faut multiplier

1,60 *D*, qui repréſente la denſité qu'a priſe le globe 4, en touchant le globe *C'* par 1,30, & l'on trouvera par expérience, entre la denſité moyenne du petit globe 4 placé le dernier dans la file, & entre la denſité moyenne de la ſurface du globe de 8 pouces, le rapport comme 2,08 : 1,00, preſque exactement le même que celui qui vient d'être donné par la théorie corrigée.

XVI.

NEUVIÈME EXPÉRIENCE.

Un globe de 8 pouces de diamètre, mis en contact avec une ligne de 24 petits globes de 2 pouces chacun de diamètre, formant une longueur de 48 pouces.

DANS cette expérience, l'on compare les différens globes qui forment la ligne au vingt-quatrième, c'eſt-à-dire, à celui qui termine la ligne.

Vingt-quatrième comparé au vingt-troiſième.

En comparant le dernier à l'avant-dernier, c'eſt-à-dire, le vingt-quatrième globe de 2 pouces au vingt-troiſième, l'on a trouvé par une moyenne entre ſix eſſais, que la quantité de l'électricité, ou la denſité moyenne du fluide électrique ſur la ſurface du vingt-quatrième globe, étoit à celle du vingt-troiſième, comme . . . . 1,49 : 1,00.

Vingt-quatrième comparé au douzième.

En comparant le vingt-quatrième globe au douzième ou à celui placé au milieu de la ligne, l'on a trouvé la denſité moyenne du vingt-quatrième à celle du douzième globe, comme . . . . 1,70 : 1,00.

Vingt-quatrième comparé au deuxième.

En comparant le vingt-quatrième avec le deuxième, l'on

l'on a trouvé que la quantité d'électricité moyenne du vingt-quatrième globe étoit à celle du deuxième, comme 2,10:10.

Vingt-quatrième comparé au premier.

En comparant le vingt-quatrième globe à celui immédiatement en contact avec le globe de 8 pouces, l'on a trouvé la quantité moyenne d'électricité du vingt-quatrième globe à celle du premier, comme . . . . 3,72 : 1,00.

Le vingt-quatrième globe comparé au globe de 8 pouces.

Enfin, en comparant par la méthode corrigée, expliquée dans l'article qui précède, la densité moyenne de l'électricité du vingt-quatrième globe de 2 pouces avec celle du globe de 8 pouces, l'on a trouvé ce rapport, comme. . . . . 2,16 : 1,00, qui ne diffère, comme l'on voit, que très-peu de celui que nous avions trouvé à l'article qui précède, pour le quatrième globe qui terminoit une ligne formée de 4 globes de 2 pouces en contact avec un globe de 8 pouces.

XVII.

Application du calcul aux expériences qui précèdent.

J'AI formé un tableau de 24 équations qui représentent, d'après la méthode des articles qui précèdent, l'état d'équilibre à tous les points de contact : ce tableau se trouvera à la fin de ce Mémoire. La réduction des 24 équations à deux inconnues, ne demande que de la patience, & n'a aucune difficulté ; mais comme la longueur du calcul pourroit fatiguer la plupart des physiciens, il est facile d'imaginer différentes méthodes d'approximation pour l'abréger ; en voici quelques-unes.

Si l'on prend dans notre tableau la vingt-quatrième équation, l'on remarquera, d'après l'expérience & d'après les observations théoriques qui précèdent, que la différence de la densité moyenne électrique entre le vingt-troisième

& le vingt-quatrième globe, est très-considérable, mais que la variation de densité des globes décroît ensuite très-lentement du vingt-troisième au vingt-deuxième globe, & consécutivement du vingt-deuxième au vingt-unième; l'on remarquera de plus que dans cette vingt-quatrième équation, les coéfficiens décroissent très-rapidement. Ainsi l'on peut sans grande erreur supposer dans cette vingt-quatrième équation, que la densité moyenne de tous les petits globes, depuis le vingt-troisième jusqu'au premier, est égale, & de-là résultera

$$\overset{24}{\delta} = \overset{23}{\delta}\left(1 + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{5^2} + \frac{2}{7^2} + \&c. + \frac{2}{45^2}\right) + 0{,}013\ D.$$

Comme D est plus petit que $\overset{23}{\delta}$, on peut négliger $0{,}013\ D$; & l'on aura *

* Pour avoir d'une manière approchée la valeur de cette série très-convergente, l'on peut se servir d'une méthode connue, très-simple, suffisante dans la pratique.

L'on voit que les termes consécutifs ayant le même numérateur, les dénominateurs suivent la progression du carré des nombres impairs; ainsi, si l'on prend un des termes de la progression à la distance m d'un autre terme, tel, par exemple, que $\frac{1}{7^2}$, cette somme intégrée comme formant une ligne courbe ordinaire, donneroit pour sa différentielle

$$\frac{2\,dm}{(7+2m)^2},$$ & pour l'intégrale $k - \frac{1}{7+2m}$; ou $k = \frac{1}{7}$, parce que cette quantité doit s'évanouir quand $m = 0$. Ainsi, si les termes consécutifs de la série différoient peu l'un de l'autre, cette intégrale représenteroit assez exactement la somme de la série. Mais il faut remarquer, pour corriger cette valeur, que, si, *fig. 4*, $\overset{1}{c}$, $\overset{2}{c}$, &c. $\overset{m}{c}$, représente la courbe que nous venons d'intégrer, dont la base 1 m est divisée en parties égales à l'unité; & si l'on construit sur les divisions de cette base, chaque terme de la série, ces termes seront représentés par les parallélogrames 12 $\overset{1}{c}\,\overset{1}{b}$, 23 $\overset{2}{c}\,\overset{2}{b}$, &c.; ainsi chaque terme de la série différera du terme correspondant dans la différentielle de la surface de la courbe d'un petit triangle $\overset{1}{c}\,\overset{1}{b}\,\overset{2}{c}$; & si chaque élément $\overset{1}{c}\,\overset{2}{c}$, $\overset{2}{c}\,\overset{3}{c}$, &c. peut être pris pour une ligne droite, il est facile de voir que la somme de la série diffère de l'intégrale de la courbe, d'une quantité égale à la somme de tous les petits triangles $\overset{1}{c}\,\overset{1}{b}\,\overset{2}{c}$, $\overset{2}{c}\,\overset{2}{b}\,\overset{3}{c}$, &c. plus au dernier terme de la série, représenté dans la figure par le parallélogramme rectangle $m\,(m+1)\,\overset{m}{c}\,\overset{m}{b}$. Mais la somme de ces petits triangles, plus la moitié du dernier terme ou du petit parallélogramme $\overset{m}{c}\,\overset{m}{b}\,m\,(m+1)$,

$\overset{24}{\delta} = \overset{23}{\delta} \left(1 + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{5^2} + \&c. + \frac{2}{45^2}\right) = 1{,}44\,\overset{23}{\delta}$, l'expérience nous a donné à l'article qui précède,

$\overset{24}{\delta} = 1{,}49\,\overset{23}{\delta}$, qui diffère, comme l'on voit, très-peu du résultat que fournit la théorie; mais il faut remarquer qu'ici les erreurs de ſuppoſition ſur leſquelles nous fondons nos calculs, ſe compenſent mutuellement; l'on fait la denſité moyenne du vingt-quatrième globe plus petite qu'elle n'eſt réellement, comme nous l'avons vu *art. IV;* mais l'on fait auſſi la denſité du vingt-troiſième globe trop petite, puiſqu'on ſuppoſe la même denſité depuis le vingt-troiſième juſqu'au premier globe, au lieu qu'elle va toujours en décroiſſant.

Si nous voulons avoir d'une manière approchée les valeurs des denſités $\overset{1}{\delta}\ \overset{2}{\delta}\ \overset{3}{\delta}$ relativement à D, nous ſuppoſerons que dans les quatre premières équations, les denſités ſont égales depuis $\overset{4}{\delta}$ juſqu'à $\overset{24}{\delta}$, & pour lors les quatre premières équations du tableau ſe réduiront, *fig. 3*, à

pour le point de contact a... $D = \overset{1}{\delta} + 0{,}22\,\overset{2}{\delta} + 0{,}08\,\overset{3}{\delta} + 0{,}14\,\overset{4}{\delta}$,

pour le point de cont. $\overset{1}{a}$. $0{,}89\,D = -\overset{1}{\delta} + .\,\overset{2}{\delta} + 0{,}22\,\overset{3}{\delta} + 0{,}22\,\overset{4}{\delta}$,

pour le point de cont. $\overset{2}{a}$. $0{,}50\,D = -0{,}22\,\overset{1}{\delta} - \overset{2}{\delta} + \overset{3}{\delta} \ldots + 0{,}44\,\overset{4}{\delta}$,

pour le point de cont. $\overset{3}{a}$. $0{,}32\,D = -0{,}08\,\overset{1}{\delta} - 0{,}22\,\overset{2}{\delta} - \overset{3}{\delta} + 1{,}44\,\overset{4}{\delta}$.

---

eſt égale à la moitié du premier terme ou du parallélogramme rectangle $\overset{1}{c}\ \overset{1}{b}$ 12; ainſi la ſomme des termes qui forme la ſérie, eſt égale à l'intégrale de la courbe, plus à la moitié du premier terme, plus à la moitié du dernier; ainſi dans notre exemple: $1 + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{5^2} + \frac{2}{7^2} + \&c. + \frac{2}{45^2} = 1 + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{5^2} + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{45}\right) + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{45^2} = 1{,}44.$

Faiſons pour ces quatre équations les mêmes opérations que nous avons faites *art. XV*, & nous aurons

$$\overset{1}{\delta} = 0,55\, D,\ \overset{2}{\delta} = 0,92\, D;\ \overset{3}{\delta} = 1,04\, D;\ \overset{4}{\delta} = 1,14\, D.$$

Les valeurs $\overset{2}{\delta}$, $\overset{3}{\delta}$ & $\overset{4}{\delta}$ qui diffèrent peu l'une de l'autre, annoncent que, ſans une grande erreur, l'on a pu prendre depuis $\overset{4}{\delta}$ juſqu'à $\overset{24}{\delta}$ les denſités égales, puiſque les coéfficiens décroiſſent, ſuivant une ſérie très-convergente; il eſt clair cependant que $\overset{4}{\delta}$, trouvé par cette opération, eſt un peu trop grand, puiſque les denſités vont en décroiſſant depuis $\overset{4}{\delta}$ juſqu'à $\overset{24}{\delta}$, & que dans notre ſuppoſition elles ſont égales.

Les denſités $\overset{1}{\delta}$, $\overset{2}{\delta}$, $\overset{3}{\delta}$, $\overset{4}{\delta}$, étant déterminées relativement à D, d'après les équations qui précèdent, ſi nous ſubſtituons leurs valeurs dans les cinquième, ſixième, ſeptième & huitième équations de notre tableau, & que nous ſuppoſions dans ces quatre équations toutes les autres denſités égales, depuis $\overset{8}{\delta}$ juſqu'à $\overset{24}{\delta}$, nous pourrons, en ſuivant le même procédé, déterminer, au moyen de ces quatre nouvelles équations, les denſités approchées de $\overset{5}{\delta}$, $\overset{6}{\delta}$, $\overset{7}{\delta}$, $\overset{8}{\delta}$; nous parviendrons enſuite, par la même méthode, à déterminer par approximation les valeurs de $\overset{9}{\delta}$, $\overset{10}{\delta}$, $\overset{11}{\delta}$, $\overset{12}{\delta}$, &c. Si d'après ces valeurs ainſi déterminées, nous voulions avoir celle de $\overset{1}{\delta}$, $\overset{2}{\delta}$, $\overset{3}{\delta}$, $\overset{4}{\delta}$, d'une manière plus approchée que nous ne les avons eues par la première opération, nous ſubſtituerions dans les quatre premières équations, les valeurs que nous aurions trouvées pour $\overset{5}{\delta}$, $\overset{6}{\delta}$, $\overset{7}{\delta}$, &c. & les quatre premières équations combinées enſemble,

nous donneroient pour lors d'une manière très-approchée les valeurs de $\overset{1}{\delta}$, $\overset{2}{\delta}$, $\overset{3}{\delta}$, &c., en ayant ſoin d'y introduire les corrections indiquées au commencement de ce Mémoire.

XVIII.

De la manière dont le fluide électrique ſe diſtribue entre un globe & des cylindres de différentes longueurs, mais de même diamètre.

DIXIÈME EXPÉRIENCE.

L'ON a électriſé un globe de 8 pouces de diamètre, l'on y a fait toucher une balle de 9 lignes de diamètre, iſolée & ſoutenue par un fil de gomme laque que l'on a introduit à l'ordinaire dans la balance; l'aiguille a été chaſſée à 28 degrés, avec une force de torſion, tout compris, de 154 degrés.

L'on a fait tout de ſuite toucher ce globe de 8 pouces par un cylindre de 2 pouces de diamètre & de 30 pouces de longueur, & en retirant le cylindre, l'on a fait toucher le globe par la petite balle de 9 lignes de diamètre que l'on a introduite de nouveau dans la balance; l'aiguille a été chaſſée à la même diſtance que la première fois avec une force, tout compris, de 68 degrés.

XIX.

Réſultat de cette expérience.

LE globe de 8 pouces avant le contact du cylindre, a une quantité de l'électricité que nous trouvons repréſentée par 154 degrés; mais il faut remarquer que dans l'intervalle des obſervations, la quantité d'électricité diminuoit d'un quarantième par le contact de l'air; ainſi pour comparer la première obſervation à la deuxième, il faut réduire à 150 degrés la quantité d'électricité de la pre-

mière observation. Mais nous trouvons que par le contact du cylindre, ces 150 degrés se réduisent à 68 degrés; ainsi, par le contact, le cylindre a pris 82 degrés de la masse électrique du globe, & ne lui en a laissé que 68 degrés, en sorte que la quantité du fluide électrique du cylindre à celle du globe, est après ce partage, : : 82 : 68, : : 1,21 : 1,00.

Pour avoir actuellement le rapport des densités moyennes du fluide électrique répandu sur la surface du cylindre à la densité du fluide électrique sur la surface du globe, l'on remarquera que le globe ayant 8 pouces de diamètre, & le cylindre 2 pouces de diamètre & 30 pouces de longueur, la surface du cylindre est à celle du globe, : : 60 : 64; ainsi les densités moyennes du fluide électrique répandu uniquement sur la surface des corps, étant égales à la quantité de ce fluide divisée par la surface, la densité moyenne de ce fluide sur la surface du cylindre, sera à celle sur la surface du globe, : : $\frac{1,21}{60}$: $\frac{1,00}{64}$, : : 1,29 : 1,00.

Par une moyenne prise entre beaucoup d'autres expériences, l'on peut évaluer ce rapport, : : 1,30 : 1,00.

XX.

ONZIÈME EXPÉRIENCE.

L'ON a déterminé par la même méthode, la quantité d'électricité, que prenoit un cylindre qui n'avoit que la moitié ou même le tiers de la longueur du premier; & l'on a trouvé, en suivant les procédés de l'expérience précédente, que la densité moyenne d'un cylindre de 15 pouces & même de dix pouces de longueur, étoit à la densité moyenne du même fluide sur le globe de 8 pouces, à peu-près dans le même rapport que nous venons de trouver pour le globe de 8 pouces lorsqu'il partage son fluide électrique avec un cylindre de 30 pouces de longueur.

Il faut ſeulement remarquer que, lorſque le globe eſt très-gros relativement au cylindre, & que ce cylindre a très-peu de longueur, pour lors la denſité moyenne du petit cylindre, relativement à celle du globe, ſera beaucoup moins grande que lorſque le cylindre aura beaucoup de longueur; ainſi, par exemple, lorſque j'ai mis en contact avec un globe de 8 pouces, un petit cylindre de 5 à 6 lignes de longueur & de 2 lignes de diamètre, la denſité moyenne du fluide électrique ſur la ſurface de ce cylindre, étoit à celle du globe à peu-près dans le rapport de 2 à 1; mais ſi je mettois en contact avec ce même globe, un cylindre de 2 lignes de diamètre & de plus de 6 pouces de longueur, la denſité moyenne du cylindre étoit à celle du globe de 8 pouces, à peu-près : : 8 : 1. L'on verra dans la ſuite que la théorie s'accorde avec ce réſultat.

XXI.

Remarque.

Il eſt facile de ſentir que la théorie doit donner à peu-près les réſultats qui nous ont été fournis par les expériences qui précèdent; car, ſi l'on ſuppoſe que l'on mette ſucceſſivement notre globe de 8 pouces en contact avec un cylindre de 30 pouces, & enſuite avec un cylindre de 15 pouces, en électriſant ce globe à chaque fois, de manière qu'après le contact avec les deux cylindres, il conſerve dans les deux cas la même quantité d'électricité, il faudra, puiſqu'il y a équilibre, que la quantité d'électricité & la diſtribution ſur le cylindre de 15 pouces, ſoient telles, que ſon action ſur le point de contact avec le globe, ſoit la même que celle du cylindre de 30 pouces; mais comme l'action eſt en raiſon inverſe du carré des diſtances dans le cylindre de 30 pouces, toutes les parties placées au-delà de 15 pouces ſe trouvent à une diſtance aſſez conſidérable du point de contact, pour que leur action ne ſoit qu'une quantité très-petite, relativement à l'action

des 15 premiers pouces qui avoisinent le contact. Ainsi pour conserver l'équilibre dans les deux suppositions, la quantité du fluide électrique du gros globe étant supposée la même, il faut que le fluide sur les premiers 15 pouces produise, dans les deux cas, à peu-près la même action; ainsi, il faut que le fluide électrique y soit à peu-près en égale quantité, & distribué à peu-près de même. Par conséquent, le rapport de la densité moyenne entre le globe & les cylindres, doit être à peu-près le même dans les deux cas.

XXII.

De la manière dont le fluide électrique se partage entre un globe électrisé & des cylindres de différens diamètres, mais de même longueur.

COMME les expériences destinées à cet article s'exécutent exactement par les mêmes méthodes que celles qui précédent, je ne rapporterai ici que les résultats.

Le globe de 8 pouces de diamètre placé sur des supports idio-électriques, étant électrisé, l'on a fait toucher ce globe par trois différens cylindres de trente pouces de longueur.

Le premier cylindre a 2 pouces de diamètre; le deuxième cylindre a 1 pouce de diamètre; le troisième cylindre a seulement 2 lignes de diamètre.

L'on détermine d'abord la quantité d'électricité du globe avant qu'il ait été touché par un cylindre; l'on détermine ensuite sa quantité d'électricité après qu'il a été touché par ce cylindre; la différence de ces deux quantités d'électricité, donne celle que prend le cylindre dans le contact, qui, comparée avec celle qui reste au globe, donne le rapport entre la quantité d'électricité du globe & la quantité d'électricité moyenne du cylindre après le contact : mais comme le fluide électrique est répandu, comme nous l'avons prouvé, seulement sur la surface des corps, l'on aura la densité de ce fluide, en divisant sa quantité par la surface du corps.

En

En suivant cette méthode de réduction, il a résulté de beaucoup d'expériences, que la densité moyenne sur la surface d'un globe de 8 pouces étant représentée par le nombre . . . . 1,00.

Celle d'un cylindre de deux pouces de diamètre & 30 pouces de longueur seroit représentée par 1,30.

Celle d'un cylindre d'un pouce de diamètre par . . . 2,00.

Celle d'un cylindre de 2 lignes de diamètre par . . . 9,00.

Dans ces résultats, le cylindre de 2 lignes de diamètre n'ayant que la douzième partie du diamètre du premier, la densité moyenne du fluide électrique qui couvre la surface est 7 à 8 fois plus considérable que celle du cylindre de deux pouces de diamètre; d'où il résulte que cette augmentation de densité ne suit pas exactement le rapport des diamètres des cylindres, mais un rapport plus petit. Dans la pratique, il m'a paru que l'on auroit d'une manière suffisamment exacte les densités de différens cylindres, mis en contact avec un globe dont la densité électrique seroit une quantité constante, en les supposant entr'elles en raison inverse de la puissance $\frac{4}{5}$ du diamètre des cylindres; puissance qui varie & paroît s'approcher de l'unité, lorsque l'on compare entr'eux des cylindres dont le diamètre est très petit relativement à celui du globe, & qui est plus petite que l'unité, à mesure que les diamètres du cylindre augmentent relativement à celui du globe. Nous venons en effet de trouver que la densité électrique d'un globe dont le diamètre est 4 fois plus considérable que celui d'un cylindre, étant représentée par D, la densité moyenne du cylindre est égale à 1,30 D; mais l'on trouve par des expériences analogues à celles dont nous venons de rapporter le résultat, que lorsque le diamètre du globe est seulement deux fois plus grand que celui du cylindre, la densité moyenne du cylindre sera égale à 0,85 D: si enfin le diamètre du globe est égal à celui du cylindre, nous trouverons la densité électrique moyenne du cylindre égale à 0,60 D.

XXIII.

I.re REMARQUE.

LE raiſonnement, indépendamment de tout calcul, annonce le réſultat qui précède ; c'eſt-à-dire que, d'après le raiſonnement, l'on aperçoit que la denſité moyenne de deux cylindres de différens diamètres, ne doit pas ſuivre exactement l'inverſe des diamètres, mais un rapport un peu plus petit.

Prenons deux cylindres égaux en longueur, dont les diamètres ſoient comme 2 : 1, & mettons-les ſucceſſivement en contact avec un globe électriſé; ſuppoſons que la quantité d'électricité primitive de ce globe ait été telle qu'après le contact il ait conſervé dans les deux cas la même quantité d'électricité : ſi l'on diviſe les cylindres en un grand nombre de parties égales en longueur, pour qu'il y ait équilibre aux points de contact du globe & des cylindres, il faut, puiſque l'action du globe eſt la même dans les deux cas, que chaque partie correſpondante, & de la même longueur dans les deux cylindres, ait la même force electrique pour faire équilibre à celle du globe. Mais il faut remarquer que les deux cylindres étant en contact avec le globe par l'extrémité de leurs axes, le fluide électrique répandu ſur la ſurface des deux cylindres agira, dans les parties qui avoiſinent le globe, plus directement ſur le point de l'axe en contact avec le globe dans un cylindre d'un petit diamètre, que dans un cylindre d'un grand diamètre; ainſi il ne faudra pas pour l'équilibre, préciſément la même quantité de fluide électrique ſur la ſurface d'un cylindre d'un petit diamètre, que ſur la ſurface d'un cylindre d'un plus grand diamètre; ainſi la denſité ſur la ſurface du globe étant ſuppoſée la même après le contact des deux cylindres, la denſité moyenne du fluide électrique ſur la ſurface du petit cylindre, ne ſera pas à celle d'un plus grand cylindre tout-à-fait en raiſon inverſe du diamètre des cylindres, &

la variation de ce rapport sera d'autant plus grande, que le diamètre de cylindre sera plus grand relativement à celui du globe.

XXIV.

Deuxième remarque.

Il se présente ici une observation très-intéressante, c'est celle de l'action des pointes, ou des cylindres d'un très-petit diamètre appliqués par leur extrémité à un corps électrisé. L'expérience apprend qu'un corps ainsi armé d'une pointe, perd rapidement la plus grande partie de son électricité. Les résultats qui précèdent rendent raison de ce phénomène.

Nous trouvons en effet par l'expérience, qu'un cylindre de deux lignes de diamètre & de 30 pouces de longueur, mis en contact avec un globe de 8 pouces, s'enveloppe d'un fluide électrique dont la densité moyenne est 9 fois plus considérable que celle du globe. Mais nous avons vu plus haut, *art. VII, quatrième expérience*, que lorsqu'un cylindre est électrisé & terminé par une demi-sphère du même diamètre que le cylindre, la densité du fluide électrique à l'extrémité de l'axe du cylindre étoit à celle sur le milieu du cylindre, : : 2,30 : 1,00. Ce rapport doit même être plus grand, ainsi que le raisonnement & l'expérience l'indiquent, lorsque ce cylindre a beaucoup de longueur & qu'une de ses extrémités est en contact avec un gros globe; ainsi en supposant le cylindre de 2 lignes de diamètre, arrondi à son extrémité en demi-sphère, la densité électrique à l'extrémité de l'axe de ce cylindre, seroit à celle sur la surface du globe, de 8 pouces, comme neuf fois 2,30 est à 1,00, comme 20,7 est à 1,0 : mais comme l'air est un corps d'une idio électricité imparfaite dont toutes les parties mobiles ne résistent à la communication & à la pénétration du fluide électrique, qu'autant qu'elle n'est portée qu'à un très-petit degré de densité, il en résulte

qu'en faiſant toucher l'extrémité de notre cylindre de 2 lignes de diamètre, au globe de 8 pouces chargé d'électricité, le fluide électrique doit s'échapper par l'extrémité du cylindre avec d'autant plus de rapidité, que la denſité électrique ſera plus forte; & cette denſité électrique étant encore très-grande à l'extrémité du cylindre, dans le temps qu'elle ſera preſque inſenſible ſur la ſurface du globe, le globe doit ſe dépouiller très-promptement de preſque toute ſon électricité. Ceci ne contrarie en rien la loi que nous avons trouvée dans notre troiſième Mémoire, qui nous a donné le décroiſſement ſucceſſif de la denſité des petits globes proportionnel à la denſité, parce que, ainſi que nous l'avons dit pour lors, cette loi n'a lieu que lorſque la denſité électrique eſt peu conſidérable.

X X V.

De la manière dont le fluide électrique ſe partage entre des globes de différens diamètres, & un même cylindre.

En ſuivant dans les expériences & dans leur réduction les mêmes méthodes que dans les articles qui précèdent, l'on trouvera que, lorſque les globes ſont d'un diamètre beaucoup plus grand que celui du cylindre, comme par exemple huit fois & au-delà, les denſités électriques des différens globes en contact avec le cylindre étant ſuppoſées égales à une même quantité D, les denſités du fluide électrique qui enveloppera le cylindre ſeront entr'elles comme le diamètre des globes; en ſorte, par exemple, que ſi l'on prend notre globe de 8 pouces en contact avec un cylindre d'un pouce, nous avons vu à l'*article XXII*, que la denſité du globe étant D, celle du cylindre étoit à peu-près $2 D$: mais ſi au lieu d'un globe de 8 pouces l'on mettoit en contact avec le même cylindre un globe dont le diamètre ſeroit de 24 pouces, & dont la denſité du fluide électrique répandu ſur la ſurface de ce globe, ſeroit, comme dans le premier cas, égale à D, la denſité électrique moyenne du fluide

électrique qui envelopperoit le cylindre, seroit à peu-près égale à $6\,D$.

XXVI.

Résultat des Expériences qui précèdent.

Si d'après les expériences qui précèdent, l'on veut avoir le rapport entre la densité électrique du fluide répandu sur la surface d'un globe & celle d'un cylindre d'un diamètre quelconque en contact par son extrémité avec ce globe, il suffira d'observer que puisque pour un même globe & différens cylindres, d'après l'*article XXII*, les densités électriques des différens cylindres seront entr'elles en raison inverse de la puissance $\frac{4}{5}$ des diamètres du cylindre; puissance qui se rapproche beaucoup de l'unité, lorsque le globe a un diamètre beaucoup plus grand que celui du cylindre, pour différens globes & le même cylindre, si le diamètre des globes est beaucoup plus grand que celui du cylindre, la densité du cylindre suivra le rapport du diamètre des globes: en supposant D la densité du globe, R son rayon, δ la densité moyenne du cylindre, r son rayon, l'on aura généralement $\delta = \frac{m\,D\,R}{r^{\frac{4}{5}}}$, ou $\frac{m\,D\,R}{r}$ lorsque R est beaucoup plus grand que r. Dans cette équation, m est un coéfficient constant, que l'on déterminera facilement par l'expérience.

Si en effet l'on observe que lorsque nous avons mis, *article XXXIII*, un globe de 4 pouces de rayon en contact avec un cylindre de 30 pouces de longueur & de 2 lignes de diamètre, nous avons eu pour la densité moyenne du fluide électrique qui enveloppe le cylindre $\delta = 9\,D$; on verra que dans cet exemple notre équation $\delta = \frac{m\,D\,R}{r}$, en substituant à la place de $\frac{R}{r}$ le nombre 48, donnera $\delta = 48\,m\,D = 9\,D$; d'où résulte $m = \frac{9}{48}$.

XXVII.

Application de ce résultat au cerf-volant électrique.

LORSQUE par un temps orageux l'on élève un cerf-volant, dont la corde est conductrice ou tressée avec un fil de métal, l'on sait qu'au moment du passage d'un nuage chargé de fluide électrique dans la région où se trouve le cerf-volant, si l'extrémité inférieure de la corde est isolée, ou attachée à un corps idio-électrique, la corde du cerf-volant lance des étincelles électriques de tout côté, & ces étincelles se portent avec la plus grande violence & le plus grand danger sur tous les corps conducteurs qui avoisinent cette corde : il est facile de voir que ce phénomène résulte nécessairement des expériences qui précèdent & de la formule que l'on en a tirée.

Supposons, pour servir d'exemple, que le nuage chargé de fluide électrique a la forme d'un globe de mille pieds de rayon ; que la corde du cerf-volant a une ligne de rayon ; que δ est la densité moyenne sur la surface de la corde : l'équation $\delta = \frac{m D R}{r}$ donnera ici $\delta = \frac{9}{48}\ 1000.\ 12^2 D = 27000\ D$. Mais nous avons vu, *art. VII, 4.e expérience*, que la densité électrique, à l'extrémité d'un cylindre électrisé, terminé en demi-sphère, étoit à la densité moyenne du cylindre, :: 2,30 : 1,00. Ainsi la densité électrique à l'extrémité de la corde, seroit égale à 62000 D, ou soixante-deux mille fois plus grande que la densité électrique du fluide qui est supposé envelopper le nuage. Il doit donc nécessairement arriver, comme il arrive effectivement, que le fluide électrique condensé à ce degré de densité le long de la corde du cerf-volant, étincelle de tout côté, sur-tout vers l'extrémité de cette corde ou vers son attache inférieure, & se porte avec violence à des distances souvent de plusieurs pieds sur tous les corps conducteurs qui avoisinent.

XXVIII.

Détermination théorique de la densité des différens points & de la densité moyenne d'un cylindre mis en contact par son extrémité avec un globe d'un plus grand diamètre que ce cylindre.

Cylindres de différens diamètres & de même longueur.

Le moyen d'approximation le plus simple pour déterminer le rapport entre la densité électrique de la surface du globe & celle du cylindre, lorsque le cylindre a beaucoup de longueur, est de diviser toute la longueur du cylindre en parties égales à son diamètre, & de regarder chaque partie comme un petit globe du même diamètre, de chercher, comme l'on a fait plus haut, *article XVII*, les conditions d'équilibre dans tous les points de contact. Voici deux autres méthodes d'approximation.

XXIX.

Première Méthode.

Premier Exemple.

Cylindre de 30 pouces de longueur, 2 pouces de diamètre, en contact par son extrémité avec un globe de 8 pouces de diamètre.

Si je veux déterminer la densité moyenne ou la densité du fluide électrique sur le milieu d'un cylindre de 2 pouces de diamètre & de 30 pouces de longueur, en contact par son extrémité avec un globe de 8 pouces de diamètre, je supposerai ce cylindre terminé par deux demi-sphères, & divisé en quinze parties égales au diamètre du cylindre; je calculerai l'action à chaque division, comme si la ligne étoit formée de quinze petits globes de 2 pouces de diamètre

chacun. D'après cette ſuppoſition, les quinze premières équations de notre tableau nous donneroient la denſité de chaque petit globe qui forme la ligne : mais ſi l'on veut avoir la denſité moyenne électrique approchée, il faut déterminer cette denſité vers le milieu du cylindre ou vers le huitième globe. Pour ſimplifier le calcul, il faut obſerver que, d'après notre tableau, ſi l'on ajoute enſemble les huit premières équations, le coéfficient de $\overset{8}{\delta}$ ſera plus grand que le coéfficient des termes qui en ſont éloignés ; que d'ailleurs la variation de la denſité d'un globe à l'autre vers le milieu de la ligne eſt peu conſidérable. Si d'après ces réflexions, l'on réunit enſemble les huit premières équations, l'on aura pour tous les termes qui ſuivent $\overset{7}{\delta}$, les ſéries ſuivantes :

$$\overset{8}{\delta}\left(1+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{5^2}+\frac{2}{7^2}+\&c.+\frac{2}{15^2}\right)=\overset{8}{\delta}\left(1{,}30+\frac{1}{7}-\frac{1}{15}+\frac{2}{7^2}+\frac{1}{15^2}\right)$$

$$\overset{9}{\delta}\left(\ldots\frac{2}{3^2}+\frac{2}{5^2}+\frac{2}{7^2}+\&c.+\frac{2}{17^2}\right)=\overset{9}{\delta}\left(0{,}30+\frac{1}{7}-\frac{1}{17}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{17^2}\right)$$

$$\overset{10}{\delta}\left(\ldots\ldots\frac{2}{5^2}+\frac{2}{7}+\&c.+\frac{2}{19^2}\right)=\overset{10}{\delta}\left(0{,}08+\frac{1}{7}-\frac{1}{19}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{19^2}\right)$$

$$\overset{11}{\delta}\left(\ldots\ldots\ldots\frac{2}{7^2}+\&c.+\frac{2}{(21)^2}\right)=\overset{11}{\delta}\left(+\frac{1}{7}-\frac{1}{21}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{21^2}\right)$$

$$\overset{12}{\delta}\left(\ldots\ldots\ldots\frac{2}{9^2}+\&c.+\frac{2}{23^2}\right)=\overset{12}{\delta}\left(\ldots\frac{1}{9}-\frac{1}{23}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{23^2}\right)$$

$$\overset{13}{\delta}\left(\ldots\ldots\ldots\frac{2}{11^2}+\&c.+\frac{2}{25^2}\right)=\overset{13}{\delta}\left(\ldots\frac{1}{11}-\frac{1}{25}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{25^2}\right)$$

$$\overset{14}{\delta}\left(\ldots\ldots\ldots\frac{2}{13^2}+\&c.+\frac{2}{27^2}\right)=\overset{14}{\delta}\left(\ldots\frac{1}{13}-\frac{1}{27}+\frac{1}{13^2}+\frac{1}{27^2}\right)$$

$$\overset{15}{\delta}\left(\ldots\ldots\ldots\frac{2}{15^2}+\&c.+\frac{2}{29^2}\right)=\overset{15}{\delta}\left(\ldots\frac{1}{15}-\frac{1}{29}+\frac{1}{15^2}+\frac{1}{29^2}\right).$$

Tous les premiers termes de cette équation repréſentent la ſomme des coéfficiens des huit premières équations du tableau ; le ſecond terme à droite repréſente chaque ſérie qui

qui forme ces coéfficiens, sommée d'après la méthode que nous avons expliquée dans la note du quinzième article.

Actuellement la variation de la densité des petits globes qui avoisinent le globe $\overset{8}{\delta}$ étant peu considérable, & les coéfficiens diminuant rapidement à mesure que l'on s'éloigne de $\overset{8}{\delta}$, l'on peut, par approximation, prendre toutes les densités égales depuis $\overset{8}{\delta}$ jusqu'à $\overset{15}{\delta}$, ce qui donnera pour la somme de nos séries l'equation définitive,

$$\overset{8}{\delta}\left(1{,}68 + \frac{3}{7} + \int\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \&c. + \frac{1}{15}\right) - \int\left(\frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \&c. + \frac{1}{29}\right) + \frac{3}{7^2} + \int\left(\frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \&c.\ \frac{1}{29^2}\right) + \frac{1}{15^2}.\right.$$

L'on sommera les séries par approximation, soit en prenant des valeurs moyennes, que l'on multipliera par le nombre des termes, soit en suivant, comme nous allons le faire, la méthode que nous avons donnée, *note de l'article XV*, qui donnera

$$\int\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \&c. + \frac{1}{15}\right) = \frac{1}{2\mu}\log.\left(\frac{15}{7}\right) + \frac{1}{14} + \frac{1}{30}.$$

où μ est le module du système logarithmique : par la même méthode $\left(\frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \&c. + \frac{1}{29}\right) = \frac{1}{2\mu}\log.\frac{29}{15} + \frac{1}{30} + \frac{1}{58}$; l'on aura de plus

$$\int\left(\frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \&c. + \frac{1}{29^2}\right) = \frac{1}{7} - \frac{1}{29} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{29^2};$$

ainsi en réunissant toutes ces valeurs, & faisant μ égal à 0,434, module du système logarithmique des tables ordinaires, la somme de tous les coéfficiens des huit premières équations de notre tableau, depuis $\overset{8}{\delta}$ jusqu'à $\overset{15}{\delta}$, donnera $2{,}40\,\overset{8}{\delta}$.

Pour compléter l'équation, il faut ajouter ensemble tous les termes qui, dans les huit premières équations précèdent $\overset{8}{\delta}$, depuis $\overset{7}{\delta}$ jusqu'à $\overset{1}{\delta}$. L'on remarquera, en examinant le tableau, que si toutes les densités étoient égales depuis $\overset{7}{\delta}$ jusqu'à $\overset{1}{\delta}$, tous ces termes se détruiroient mutuellement, le coéfficient positif de $\overset{7}{\delta}$ étant égal au coéfficient négatif de $\overset{1}{\delta}$, & ainsi alternativement: l'on remarquera de plus, qu'excepté ces coéfficiens de $\overset{7}{\delta}$ & de $\overset{1}{\delta}$, les autres sont très-petits; que d'ailleurs la variation de la densité d'un globe à l'autre, ne croît rapidement que du premier globe dont la densité est $\overset{1}{\delta}$, au second globe dont la densité est $\overset{2}{\delta}$. Ainsi l'on peut, sans une grande erreur, supposer que tous les termes entre $\overset{7}{\delta}$ & $\overset{1}{\delta}$ se détruisent mutuellement, & la valeur très-approchée de la somme de tous les termes qui précèdent $\overset{8}{\delta}$ dans les huit premières équations, sera représentée par

$$(\overset{7}{\delta} - \overset{1}{\delta})\left(\frac{2}{3^2} + \frac{2}{5^2} + \&c. + \frac{2}{13^2}\right) = 0{,}40\,(\overset{7}{\delta} - \overset{1}{\delta});$$

mais, d'après les observations qui précèdent, $\overset{7}{\delta}$ peut être pris pour $\overset{8}{\delta}$. Nous avons trouvé, *article XIV*, par approximation, $\overset{1}{\delta} = 0{,}52\,D$.

Ainsi, en prenant la somme des huit premières équations de notre tableau, nous aurons d'une manière approchée l'équation,

$$D\left(1 + \frac{2R^2}{(R+2r)^2} + \frac{2R^2}{(R+4r)^2} + \&c. + \frac{2R^2}{(R+14r)^2}\right) + 0{,}21\,D = 2{,}80\,\delta_8.$$

Comme dans nos expériences & dans la ſuppoſition de cet exemple, $R = 4\,r$, il ne ſera pas très-long de calculer exactement la ſomme du premier terme; mais ſi on la détermine par la méthode d'approximation de l'*article XIV*, ce qui eſt très-ſuffiſant, l'on aura dans notre exemple,

$$D\left(1 + \frac{16}{6} - \frac{16}{18} + \frac{16}{6^2} + \frac{16}{18^2}\right) + 0{,}21\,D = 3{,}48\,D = 2{,}80\,\delta_8;$$

d'où réſulte finalement $\delta_8 = 1{,}24\,D$, quantité que nous avons trouvée, par les expériences, égale à $1{,}30\,D$; ainſi la théorie & l'expérience ne diffèrent entre elles que par des quantités trop petites, pour que les opérations approchées qui précèdent puiſſent les évaluer.

XXX.

Deuxième Exemple.

Cylindre de trente pouces de longueur, deux lignes de diamètre, en contact par ſon extrémité avec un globe de huit pouces.

Si je veux comparer actuellement un cylindre de 30 pouces de longueur & de 2 lignes de diamètre, avec un globe de 8 pouces, à la place du cylindre je peux ſuppoſer une ligne formée de 180 petits globes de 2 lignes de diamètre, en contact par ſon extrémité avec ce globe. Ainſi, en ſuivant, d'après cette ſuppoſition, la méthode de l'exemple qui précède, je formerai une table de 180 équations analogue à celle de cet exemple; & en prenant la ſomme des 91 premières équations, j'aurai pour tous

les termes qui ſuivent $\overset{91}{\delta}$, la quantité

$$\overset{91}{\delta}\left(1,68+\frac{3}{7}+\frac{3}{7^2}+\frac{1}{181}+\int\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\&c.+\frac{1}{181}\right)\right.$$

$$\left.-\int\left(\frac{1}{101}+\frac{1}{183}+\&c.+\frac{1}{359}\right)+\int\left(\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\&c.+\frac{1}{359^2}\right)\right):$$

en prenant les ſommes des ſéries, d'après la méthode expliquée à la note de *l'article XVII,* cette quantité ſe réduira à $3,70\ \overset{91}{\delta}$.

Si l'on calcule actuellement la ſomme des termes qui précèdent $\overset{91}{\delta}$, dans le même membre d'équation, on la trouvera égale à $0,46\left(\overset{90}{\delta}-\overset{1}{\delta}\right)$, en ſe conformant aux obſervations de l'article qui précède : mais $\overset{90}{\delta}$ peut être pris égal à $\overset{91}{\delta}$, & $\overset{3}{\delta}$ peut être ſans erreur ſenſible pour notre opération, calculé d'après les deux premières équations qui formeront le tableau : en ſuppoſant les denſités égales depuis $\overset{2}{\delta}$ juſqu'à $\overset{180}{\delta}$, ces deux premières équations ſeroient,

1.re équat. $D=\overset{1}{\delta}+\left(\frac{2}{3^2}+\frac{2}{5^2}+\&c.+\frac{2}{359^2}\right)\overset{2}{\delta}=\overset{1}{\delta}+0,46\ \overset{2}{\delta}.$

2.e éq. $1,84D=-\overset{1}{\delta}+\left(1+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{5^2}+\&c.+\frac{2}{357^2}\right)\overset{2}{\delta}=-\overset{1}{\delta}+1,46\overset{2}{\delta},$

d'où réſulte $\overset{2}{\delta}=48,D$ & $\overset{1}{\delta}=0,32\ D$. Ainſi $0,46\overset{1}{\delta}=0,15\ D$; ainſi, le ſecond membre de la ſomme des 91 premières équations, ſeroit égal à $(3,70+0,46)\ \overset{91}{\delta}-0,15\ D$.

Reſte à calculer la ſomme du premier membre formé de l'addition des 91 premiers termes qui expriment l'action du gros globe; cette ſomme, d'après ce que nous avons dit à l'article qui précède, ſera repréſentée par la formule,

$$D\left(1 + (48)^2\left(\frac{2}{(48+2)^2} + \frac{2}{(48+4)^2} + \&c. + \frac{2}{228^2}\right)\right),$$

quantité égale d'après la méthode d'approximation de la note de l'*article XIV* à

$$D\left(1 + (48)^2\left(\frac{1}{50} - \frac{1}{228} + \frac{1}{50^2} + \frac{1}{228^2}\right)\right) = 38{,}18\ D.$$

Ainsi en comparant ce terme avec le deuxième membre, nous aurons $(38{,}18 + 0{,}15)\ D = 4{,}16\ \overset{91}{\delta}$, d'où résulte finalement $\overset{91}{\delta} = 9{,}21\ D$.

Nous avons trouvé, *article XXIV*, qu'en mettant un globe de 8 pouces de diamètre en contact avec un cylindre de 2 lignes de diamètre & de 30 pouces de longueur, si la densité du globe, après le contact, étoit D, la densité moyenne du cylindre étoit, d'après l'expérience, égale à 9,00 D. Ainsi, l'expérience dans cet exemple s'accorde avec la théorie aussi-bien que l'on peut l'attendre dans des recherches de ce genre : nous avons trouvé le même accord dans l'exemple qui précède entre la théorie & l'expérience, quoique le cylindre soit douze fois plus gros que dans l'expérience actuelle ; ainsi la vérité des deux résultats se confirme l'un par l'autre.

XXXI.

Cylindres de différentes longueurs en contact avec le même globe.

Nous avons trouvé à l'*article XXIX*, que par la théorie l'on avoit la densité moyenne d'une ligne de 30 pouces de longueur, formés avec quinze petits globes de 2 pouces de diamètre en contact avec un globe de 8 pouces, égale à 1,24 D, où D exprime la densité de la surface du globe après le contact; mais nous avions trouvé, *remarque* de l'*article XIV*, qu'en mettant seulement quatre globes de 2 pouces de diamètre en contact avec le même globe de

8 pouces de diamètre, la densité de la surface du globe étant D, la densité moyenne pour la ligne des quatre globes, étoit par la théorie, égale à 1,21 D; ainsi la théorie nous apprend, que quelle que soit la longueur d'un cylindre ou d'une ligne formée par des petits globes du même diamètre que ce cylindre, la densité moyenne est à peu-près égale; résultat conforme à celui donné par la dixième & la onzième expérience.

XXXII.

Remarque.

Il faut seulement remarquer, que lorsque les cylindres ont très-peu de longueur, & sont d'un très-petit diamètre relativement à celui du gros globe, pour lors le petit cylindre prend une densité moyenne beaucoup plus petite que celle que prendroit un cylindre du même diamètre, mais d'une plus grande longueur. Pour se convaincre de cette vérité, calculons la densité de deux petits globes de 2 lignes seulement de diamètre chacun, formant une longueur de 4 lignes en contact par son extrémité avec un globe de 8 pouces de diamètre, cette supposition fourniroit les deux équations:

1.re équation. $D = \overset{1}{\delta} + 0,22\,\overset{2}{\delta}$.

2.me équation. $1,84\,D = -\overset{1}{\delta} + \overset{2}{\delta}$.

Il résulte de ces deux équations, $\overset{1}{\delta} = 0,48\,D$, & $\overset{2}{\delta} = 2,36\,D$; ainsi la densité moyenne du système de 4 lignes de longueur, formée par les deux petits globes de 2 lignes chacun de diamètre, seroit égale à $\frac{(0,48 + 2,36)\,D}{2} = 1,42\,D$, quantité que nous avons trouvée à l'article XXX, égale à 9,21 D pour une ligne du même diamètre, mais de 30 pouces de longueur.

XXXIII.

Remarque.

CETTE théorie confirmée par l'expérience, d'après les méthodes que nous avons expliquees plus haut, rend raison d'un résultat électrique connu depuis long-temps. L'on sait que, lorsqu'un globe électrisé est armé d'une aiguille ou d'une pointe, il perd rapidement son électricité, mais beaucoup moins promptement lorsque cette aiguille est très-courte. Voici l'explication de ce phénomène; la force coërcitive que l'air oppose à l'écoulement du fluide électrique étant limitée, plus la densité de ce fluide sera grande, plus le fluide s'écoulera rapidement. Ainsi, dans notre exemple, lorsque l'aiguille a 30 pouces de longueur & 2 lignes de diamètre, sa densité moyenne est égale à 9,21 D; mais elle est seulement égale à 1,42 D, lorsque le cylindre a 4 lignes de longeur; ainsi le fluide électrique doit s'échapper avec beaucoup plus de rapidité par la première aiguille que par la deuxième.

XXXIV.

Deuxième méthode d'approximation pour déterminer la variation de la densité électrique le long de la surface d'un cylindre en contact par son extrémité avec un globe.

IL est facile, d'après les observations qui précèdent, de trouver différens moyens d'approcher aussi près que l'on voudra, par le calcul, de la variation de la densité électrique le long de la surface d'un cylindre. Pour fixer l'imagination sur un exemple, prenons notre cylindre, *figure 7*, de deux pouces de diamètre & 30 pouces de longueur, & supposons-le comme dans cette figure, en contact par son extrémité avec un globe de 8 pouces. D'après tout ce que nous avons dit dans ce Mémoire & dans celui qui

précède, il est facile de voir que la densité du fluide électrique est nulle dans le cercle de contact $a'\,a$ du cylindre & du globe ; que pour le globe, la densité électrique croît depuis le point a jusqu'au pôle opposé f' où est son *maximum ;* que l'accroissement de cette densité rapide sur les 25 à 30 premiers degrés, en partant du point a, se ralentit ensuite considérablement, en sorte que l'accroissement de la densité électrique est presqu'insensible depuis le point μ de l'équateur jusqu'au pôle f' : dans la surface cylindrique, la densité est nulle ou au moins insensible au point a; elle croît ensuite rapidement sur les deux ou trois premiers pouces, moins rapidement ensuite à mesure que l'on s'approche du milieu du cylindre, où se trouve à peu-près le *maximum* de cet accroissement; la variation de l'accroissement de la densité augmente ensuite assez lentement jusqu'à deux ou trois pouces de l'extrémité, mais très-rapidement sur ces deux derniers pouces. La distance, *figure 7*, de la ligne ponctuée au globe & au cylindre, indique à peu-près le lieu géométrique de la densité électrique : en prenant le cercle $f\,k\,f'$, & la ligne $\overset{5}{a}\,a$ pour axe, les ordonnées $k\,i$, $n\,g$, $f'\,\varphi$; $\overset{1}{a}\,\overset{1}{m}$, $\overset{2}{a}\,\overset{2}{m}$, $\overset{3}{a}\,\overset{3}{m}$, &c. représenteront les densités.

Si l'on divise actuellement le cylindre, *figure 7*, en un nombre quelconque de parties égales ou inégales, telles que $f\,1$; $1\,2$, $2\,M$, &c. en observant de faire très-courtes les parties où la variation de la densité doit être considérable, il sera facile de former à la place de la courbe $a\,\overset{1}{m}\,\overset{2}{m}\,\overset{3}{m}\,\overset{4}{m}\,\overset{5}{m}$ un polygone, en joignant les points a, $\overset{1}{m}$, $\overset{2}{m}$, $\overset{3}{m}$ &c. par des lignes droites. Dans ce polygone les densités croîtront d'un point à un autre, suivant une ligne droite, & le polygone aura autant de côtés que le cylindre de divisions; ainsi cherchant à chaque division l'état d'équi-

libre

libre ſur l'axe entre l'action de toutes les portions du cylindre, & l'action du globe qui le termine, nous aurons autant d'équations que le polygone a de côtés. Il ſera par conſéquent poſſible, & même facile, ainſi qu'on va le voir, de déterminer, relativement à l'axe, l'inclinaiſon de chaque côté du polygone, & par conſéquent d'avoir la variation approchée de la denſité.

XXXV.

Voici les principes du calcul pour chaque partie du cylindre : une portion *(figure 6)* BP d'une ſurface cylindrique agiſſant ſur un point b de ſon axe, ſuivant l'inverſe du carré des diſtances, la denſité au point Q étant $Qd = \delta$, & croiſſant enſuite ſuivant la ligne dM, l'on demande l'action de cette ſurface ſur le point b.

Soit $bB = a$; $bp = x$; $Bp = x - a$, $\frac{\varphi m}{Bp} = n$; que le rayon du globe ſoit R, celui du cylindre r, le rapport de la circonférence au rayon égal π; l'on aura pour l'action de la zone de ſuperficie élémentaire qui répond à pp', cette action évaluée dans la direction de l'axe, la quantité

$$[\delta + n(x - a)] \frac{\pi . r x . dx}{(rr + xx)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(\delta - na) \pi r dx x}{(rr + xx)^{\frac{3}{2}}}$$

$$+ \frac{\pi r x^2 dx}{(rr + xx)^{\frac{3}{2}}} = (\delta - na) \frac{\pi r . x dx}{(rr + xx)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\pi r x^2 dx}{(rr + xx)^{\frac{3}{2}}}$$

$$- \frac{\pi r dx}{(rr + xx)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\pi r dx}{(rr + xx)^{\frac{1}{2}}},$$ dont l'intégrale

priſe de manière qu'elle s'évanouiſſe, quand $x = a$ donnera, μ étant le module logarithmique;

$$\pi r \delta \left[\frac{1}{(rr + aa)^{\frac{1}{2}}} \quad \frac{-1}{(rr + xx)^{\frac{1}{2}}}\right] + \pi r n \left[\frac{a - x}{(rr + x^2)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$$+ \frac{n \pi r}{\mu} \log. \frac{x + (rr + xx)^{\frac{1}{2}}}{a + (rr + aa)^{\frac{1}{2}}}.$$

XXXVI.

Je suppose à présent que je veux d'abord déterminer la variation de la densité vers le milieu de mon cylindre, qui dans notre exemple a 2 pouces de diamètre & 30 pouces de longueur; si, *fig. 7*, je fais passer par le point $\overset{3}{m}$, que je suppose répondre au milieu de mon cylindre, une ligne $d\,\overset{3}{m}\,d'$ parallèle à l'axe du cylindre, il sera facile de voir d'après toutes les observations qui précèdent, que la variation de la densité vers le milieu $\overset{3}{a}$ suit à peu-près une ligne droite jusqu'à une assez grande distance de ce point; qu'ainsi l'action des points éloignés diminuant comme la raison inverse du carré des distances, il ne peut résulter qu'une petite erreur de la supposition que la ligne qui exprime la densité, s'étend en ligne droite jusqu'aux extrémités du cylindre.

D'après cette réflexion, il sera facile d'appliquer la formule à notre exemple, en remarquant qu'ici $a = 0$, & que la moitié de la longueur du cylindre représentée par x est beaucoup plus grande que r; ainsi l'on aura pour la valeur de l'action de la moitié du cylindre $M\,g$ sur le point M, la quantité $\pi\, r\, \delta \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{x}\right) - \pi\, r\, n + \frac{n\,\pi\, r}{\mu}$ log. $\frac{2\,x}{r}$. Pour avoir l'action contraire de l'autre moitié du cylindre $M\,f$, il faut faire la quantité n négative, puisque la densité décroît de $\overset{3}{a}$ vers a, ce qui donnera

$\pi\, r\, \delta \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{x}\right) + \pi\, r\, n - \frac{n\,\pi\, r}{\mu}$ log. $2\,x$; ainsi l'action de tout le cylindre dans la direction $M\,f$ donnera

$\frac{2\,n\,\pi\, r}{\mu}$ log. $\frac{2\,x}{r} - 2\,n\,\pi\, r$; quantité qu'il faut égaler à l'action du globe C, qui, puisque x est la moitié de la

longueur du cylindre, sera $\frac{2\pi D R^2}{(R+x)^2}$; d'où résulte finalement l'équation $\frac{2\pi D R^2}{(R+x)^2} = 2 n \pi r \log. \frac{2x}{r} - 2 n \pi r$, qui exprimera la variation $n r$ de la densité au milieu du cylindre, sur une longueur égale au rayon. Dans notre exemple, le diamètre du cylindre est de 2 pouces, sa longueur de 30 pouces; le rayon du globe est de 4 pouces: ainsi $R = 4$, $r = 1$, $x = 15$, d'où résulte $n = 0{,}018\,D$; c'est-à-dire que, sur un pouce de longueur, la densité électrique croît à peu-près vers le milieu du cylindre, de la cinquantième partie de celle du globe.

Si nous prenons pour second exemple le cylindre d'une ligne de rayon, & de 30 pouces de longueur, dont nous avons déterminé la densité moyenne par nos expériences, pour lors $R = 48\,r$, $x = 180\,r$, ce qui donne $n = 0\ 09\,D$; c'est-à-dire que, dans un cylindre dont le diamètre seroit douze fois plus petit que le précédent, la densité sur une ligne de longueur croîtroit, au milieu du cylindre, de $\frac{1}{1000}$, & sur 12 lignes de longueur; elle croîtroit par conséquent six fois plus pour le cylindre de 2 lignes de diamètre que pour le cylindre de 2 pouces de diamètre.

Enfin, si nous prenons pour le rayon du cylindre un centième de ligne, nous trouverons que sur un pouce de longueur, la densité croît cinquante fois davantage que sur un cylindre d'une ligne de rayon, & par conséquent trois cents fois plus que sur un cylindre de 2 pouces de diamètre.

Si les cylindres avoient une longueur beaucoup plus considérable que dans l'exemple qui précède, pour lors les variations de la densité au milieu des deux cylindres, pour une même longueur d'un pouce, seroient entre elles dans un rapport plus approché de l'inverse des diamètres des deux cylindres; ainsi, par exemple, si la longueur des cylindres étoit de 300 pouces, notre formule nous donneroit au milieu des

cylindres, la variation de la densité du cylindre d'une ligne de rayon à celle du cylindre d'un pouce de rayon, à peu-près : : 8 : 1; rapport qui étoit : : 6 : 1, lorsque la longueur des cylindres n'étoit que de 30 pouces.

X X X V I I.

Si l'on veut, d'après la méthode des deux articles qui précèdent, déterminer d'une manière approchée les variations de la densité pour les différens points de notre cylindre $a\overset{5}{a}$, *fig.* 7, il faut diviser en différentes parties ce cylindre, & supposer que dans chaque partie la variation de la densité suit une ligne droite. Pour ne pas s'éloigner dans cette supposition beaucoup de la vérité, il faut que la première partie $a\overset{1}{a}$ soit très-courte. Ainsi le cylindre ayant 2 pouces de diamètre, je donnerois à cette première partie $a\overset{1}{a}$, 2 pouces de longueur; je donnerois à la deuxième $\overset{1}{a}\overset{2}{a}$, 4 pouces de longueur, à la troisième $\overset{2}{a}\overset{3}{a}$, 9 pouces; ce qui me conduit au milieu du cylindre. Je prends pour la variation de la densité, depuis le milieu $\overset{3}{a}$ du cylindre jusqu'à son extrémité $\overset{5}{a}$, celle qui m'a été donnée tout-à-l'heure; je cherche ensuite les conditions d'équilibre de ces quatre parties de cylindre relativement au point de contact f, & aux points 1 & 2 de l'axe du cylindre, ce qui fournit trois équations qui, combinées ensemble, déterminent la variation des densités à chaque division du cylindre, la courbe des densités considérée comme un polygone; & comme la densité du fluide électrique est nulle au point de rencontre du globe & du cylindre, il sera facile d'en conclure d'une manière approchée la densité électrique sur tous les points de la surface du cylindre.

L'on trouvera à la ſin de ce Mémoire une application aſſez détaillée de cette méthode.

XXXVIII.

Détermination théorique du rapport des denſités électriques moyennes de deux cylindres d'un très-petit diamètre, d'une très-grande longueur, en contact par leur extrémité avec un gros globe.

Si l'on cherchoit la variation au milieu de deux cylindres, dont la longueur ſeroit $2a$, que nous ſuppoſons d'un diamètre différent, mais très-petit, relativement à celui du globe, l'on auroit d'après les formules qui précèdent, *article XXXVI*,

$$\frac{2 D R}{(R + a)^2} = 2 n r \left(\frac{\text{Log. } 2a}{\mu} - 1 \right);$$

mais il faut remarquer que, pour tout cylindre de la même longueur, mais d'un autre diamètre, il n'y auroit dans cette formule que les quantités n & r qui varieroient, le diamètre du globe R, ainſi que la moitié de la longueur a des cylindres, étant ſuppoſés les mêmes; d'où réſulte que ſi $\overset{1}{n}$ repréſente la variation de la denſité au milieu du cylindre dont le rayon eſt $\overset{1}{r}$, & ſi $\overset{2}{n}$ repréſente la variation de la denſité au milieu du cylindre dont le rayon eſt $\overset{2}{r}$, les longueurs des deux cylindres étant les mêmes, l'on aura

$\overset{1}{n}\,\overset{1}{r} = \overset{2}{n}\,\overset{2}{r}$, ou $\dfrac{\overset{1}{r}}{\overset{2}{r}} = \dfrac{\overset{2}{n}}{\overset{1}{n}}$; c'eſt-à-dire que les variations des denſités au milieu des deux cylindres, ſeront entre elles comme l'inverſe des rayons.

Il eſt facile actuellement de ſentir que cette même

proportion doit avoir lieu, si l'on divise les deux cylindres égaux en longueur, dans un nombre de parties réciproquement égales, & que l'on compare dans les deux cylindres les parties correspondantes chacune à chacune. En effet, l'on conçoit d'après les principes sur lesquels sont fondés tous les calculs qui précèdent, que si dans un des cylindres l'on a pour exprimer la variation à une distance quelconque a' du globe, la formule $\frac{2DR^2}{(R+a')^2} = \overset{1}{n}\;\overset{1}{r}\;A'$, A' étant une fonction de a', l'on aura, en prenant un point à égale distance du globe dans le deuxième cylindre, dont la longueur est divisée en un nombre de parties égales à celles du premier, la formule $\frac{2DR^2}{(R+a')^2} = \overset{2}{n}\;\overset{2}{r}\;A'$, la quantité A' étant la même, puisque la distance a & le nombre des divisions sont les mêmes; ainsi pour chaque point correspondant, $\frac{\overset{1}{n}\;\overset{1}{r}}{\overset{2}{n}\;\overset{2}{r}}$ sera une même quantité; ainsi les variations de la densité pour des points à égale distance du globe, seront dans les deux cylindres en rayon inverse du rayon des cylindres, & par conséquent la somme de ces variations ou les densités moyennes de deux cylindres d'un très-petit diamètre en contact avec un gros globe, sont en raison inverse des rayons, ainsi que l'expérience nous l'a appris.

XXXIX.

De deux corps conducteurs placés à une distance assez grande l'un & l'autre, pour que l'électricité ne puisse pas se communiquer à travers la couche d'air qui les sépare.

DANS les articles qui précèdent, nous avons déterminé

la manière dont le fluide électrique se distribue entre deux corps conducteurs en contact; nous allons actuellement chercher l'état électrique des différentes parties d'un corps non électrisé présenté à un corps électrisé à une distance assez grande, pour que l'électricité du corps électrisé ne puisse pas se communiquer au corps non électrisé à travers la couche d'air qui les sépare. L'on sait depuis long-temps, que dans cette disposition le corps non électrisé, s'il est isolé, donnera par la seule influence du corps électrisé, des signes d'électricité contraire à celle du corps électrisé, dans les parties voisines de ce corps, & des signes de la même nature que le corps électrisé dans les parties qui en sont le plus éloignées. L'on sait encore que si le corps non électrisé présenté à un corps électrisé n'est pas isolé, il donnera sur tous les points de sa surface des signes d'électricité contraire à celle du corps électrisé.

L'évaluation de l'état électrique des différentes parties d'un corps non électrisé, isolé ou non, mais présenté à quelque distance d'un corps électrisé, est l'objet de cette dernière partie de mon Mémoire.

X L.

Des deux natures d'électricité.

QUELLE que soit la cause de l'électricité, l'on en expliquera tous les phénomènes, & le calcul se trouvera conforme aux résultats des expériences, en supposant deux fluides électriques, les parties du même fluide se repoussant en raison inverse du carré des distances, & attirant les parties de l'autre fluide dans la même raison inverse du carré des distances. Cette loi a été trouvée par l'expérience pour l'attraction & la répulsion électrique, dans les premier & deuxième Mémoires sur l'électricité, *volume de l'Académie de 1785*; d'après cette supposition, les deux fluides dans les corps conducteurs, tendent toujours à se réunir jusqu'à ce qu'il y ait équilibre, c'est-à-dire, jusqu'à ce que par

leur réunion, les forces attractives & répulsives se compensent mutuellement. C'est l'état où se trouvent tous les corps dans leur état naturel; mais si par une opération quelconque, l'on fait passer dans un corps conducteur isolé, une quantité surabondante d'un des fluides électriques, il sera électrisé, c'est-à-dire, qu'il repoussera les parties électriques de la même nature, & attirera les parties électriques d'une autre nature que le fluide surabondant dont il est chargé. Si le corps conducteur électrisé est mis en contact avec un autre corps conducteur isolé, il partagera avec lui le fluide électrique surabondant dans les proportions indiquées dans ce Mémoire & ceux qui précèdent; mais si on le fait communiquer à un corps non isolé, il perdra dans un instant toute son électricité, puisqu'il la partagera avec le globe de la terre, dont les dimensions relativement à lui sont infinies.

M. Œpinus a supposé dans la théorie de l'électricité, qu'il n'y avoit qu'un seul fluide électrique, dont les parties se repoussoient mutuellement & étoient attirées par les parties des corps avec la même force qu'elles se repoussoient. Mais pour expliquer l'état des corps dans leur situation naturelle, ainsi que la répulsion dans les deux genres d'électricité, il est obligé de supposer que les molécules des corps se repoussent mutuellement avec la même force qu'elles attirent les molécules électriques, & que ces molécules électriques se repoussent entr'elles. Il est facile de sentir que la supposition de M. Œpinus donne, quant au calcul, les mêmes résultats que celle des deux fluides. Je préfère celle des deux fluides qui a déjà été proposée par plusieurs physiciens, parce qu'il me paroît contradictoire d'admettre en même temps dans les parties des corps, une force attractive en raison inverse du carré des distances démontrée par la pesanteur universelle, & une force répulsive dans le même rapport inverse du carré des distances; force qui seroit nécessairement infiniment grande, relativement à l'action attractive d'où résulte la pesanteur,

La

La ſuppoſition des deux fluides eſt d'ailleurs conforme à toutes les découvertes modernes des chimiſtes & des phyſiciens, qui nous ont fait connoître différens gaz dont le mélange dans certaines proportions, détruit tout-à-coup & en entier l'élaſticité ; effet qui ne peut avoir lieu ſans quelque choſe d'équivalent à une répulſion entre les parties du même gaz qui conſtitue leur état élaſtique, & à une attraction entre les parties des différens gaz qui leur fait perdre tout-à-coup leur élaſticité.

Comme ces deux explications n'ont qu'un degré de probabilité plus ou moins grand, je préviens, pour mettre la théorie qui va ſuivre, a l'abri de toute diſpute ſyſtématique, que dans la ſuppoſition des deux fluides électriques, je n'ai d'autre intention que de préſenter avec le moins d'élémens poſſible, les réſultats du calcul & de l'expérience, & non d'indiquer les véritables cauſes de l'électricité. Je renverrai à la fin de mon travail ſur l'électricité, l'examen des principaux ſyſtèmes auxquels les phénomènes électriques ont donné naiſſance.

XLII.

DANS les Mémoires qui précèdent, , ainſi que dans les recherches qui vont ſuivre, j'ai ſouvent fait toucher différens points d'un corps électriſé, par un petit plan circulaire de papier doré iſolé, que je plaçois enſuite dans la balance pour déterminer ſon action ſur l'aiguille : dans les réſultats, j'ai ſuppoſé que la denſité électrique des points touchés étoit proportionelle à celle que prenoit le petit plan dans le contact avec le corps. Pour ſavoir ſi cette ſuppoſition peut être admiſe, il eſt néceſſaire de déterminer ſuivant quel rapport le fluide électrique ſe partage entre un corps & un petit plan qui le touche.

EXPÉRIENCE.

Distribution d'un seul fluide électrique entre un globe & un plan circulaire d'une très-petite épaisseur, qui touche le globe tangentiellement par le centre du cercle du plan.

J'AI placé un globe de 8 pouces de diamètre sur un isoloir décrit dans les Mémoires qui précèdent; je l'ai électrisé positivement, ainsi que l'aiguille de la balance. Au moyen d'un petit globe d'un pouce de diamètre, que je faisois toucher au gros globe, & que j'introduisois dans la balance, j'ai déterminé la densité électrique du globe de 8 pouces, que j'ai trouvée de 144 degrés. J'ai fait toucher au globe un plan circulaire isolé de 16 pouces de diamètre & d'un quart de ligne d'épaisseur, j'ai retiré tout de suite le plan; & au moyen de mon petit globe d'un pouce de diamètre, j'ai déterminé de nouveau la densité électrique qui restoit au globe de 8 pouces, je l'ai trouveé égale à 47 degrés.

XLIII.

Explication & résultat de cette Expérience.

LA densité primitive du fluide électrique, ou, ce qui revient au même, la quantité du fluide électrique répandue sur la surface du globe, étoit, avant le contact du plan, représentée par 144 degrés. Par le contact avec le plan, elle a été réduite à 47 degrés; ainsi dans le partage entre le globe & le plan, le globe en conserve 47 parties, & le plan en prend 97 parties; ainsi la quantité de fluide se partage entre le plan & le globe, de manière que celle du plan est double de celle du globe. Si l'on calcule à présent la surface du globe de 8 pouces de diamètre, on la trouvera égale à une des deux surfaces du plan de 16 pouces de diamètre; ainsi, comme ce plan a deux surfaces, il

paroît par cette expérience que le fluide électrique se distribue entre le plan & le globe proportionellement aux surfaces.

J'ai trouvé par un très-grand nombre d'expériences faites avec des plans plus petits que le précédent, que ce résultat avoit toujours lieu; c'est-à-dire, que, quels que fussent le diamètre du globe & celui du plan, toutes les fois que le plan étoit mis en contact tangentiellement avec le globe, il partageoit l'électricité du globe dans le rapport de la somme de l'étendue des deux surfaces du plan à celle du globe. L'expérience a sur-tout donné ce résultat d'une manière très-exacte, lorsque le plan mis en contact avec le globe étoit d'un très-petit diamètre, relativement à celui du globe; en sorte que, lorsque l'on touche, par exemple, le globe de 8 pouces de diamètre, avec un petit plan isolé de 6 lignes de diamètre, il prend à chacune de ces surfaces une densité électrique égale à celle de la surface du globe, c'est-à-dire, que ce petit plan de 6 lignes de diamètre se charge d'une quantité d'électricité double de celle de la portion de surface du globe qu'il a touchée.

X L I V.

Théorie de cette Expérience.

Le résultat de cette expérience est facile à expliquer par la théorie, au moins, lorsque le plan qui touche est d'un petit diamètre relativement à celui du globe touché; c'est le seul cas où je m'arrête, parce que c'est le seul dont j'aurai besoin dans les expériences qui vont suivre.

Plaçons, *fig. 8*, un petit plan b à une distance $a\,b$ du globe électrisé C, assez petite pour que la couche d'air interposée ne puisse pas empêcher le fluide électrique de passer du globe C au petit plan b. Ce plan étant très-petit, l'action du globe sur le point b dans la direction $a\,b$, sera égale à $2\,D\,R^2 : (R + a\,b)^2$, D étant supposé repré-

ſenter la denſité électrique de la ſurface du globe, & R ſon rayon. Comme $a\,b$ eſt ſuppoſé très-petit relativement au rayon R du globe, l'action du globe ſur le point b eſt très-approchant égale à $2\,D$; mais l'action d'un plan circulaire, dont le rayon eſt R' ſur un point à une diſtance a du centre de ce plan, eſt égale à $\delta\left(1 - \frac{a}{(R'R' + aa)^{\frac{1}{2}}}\right)$; & ſi a eſt une quantité infiniment petite, cette action ſe réduira à δ, δ étant la denſité électrique de tous les points du plan. Ainſi, comme il doit y avoir équilibre au point b dans la direction $b\,a$, entre l'action du plan & celle du globe, l'on aura l'équation $2\,D = \delta$; c'eſt-à-dire, que la denſité du plan, ou que la quantité d'électricité qui paſſera au plan dans le moment que l'on le ſéparera du globe, ſera double de la quantité d'électricité que contient une portion de la ſurface du globe égale à ce plan, ce qui ſe trouve tres-exactement conforme à l'expérience.

X L V.

Remarque générale ſur la Théorie de l'article qui précède, & ſur l'Expérience dont elle réſulte.

Le réſultat que nous venons de trouver par l'expérience & par la théorie, pour un petit plan mis en contact avec un globe, eſt général pour tous les corps terminés par une ſurface courbe, convexe d'une figure quelconque. Quelle que ſoit en effet la figure du corps, l'expérience apprend qu'un petit plan mis en contact avec ces ſurfaces, prend toujours, au moment qu'on le retire du contact, une quantité d'électricité double de celle de la portion de ſurface touchée. L'expérience donne encore ce même rapport double, en faiſant toucher un plan très-petit à un grand plan électriſé.

Ce réſultat général des expériences pour un petit plan mis en contact avec un corps conducteur, terminé par une ſurface d'une figure quelconque, auroit pu, comme

on va le voir, être prévu par le ſimple raiſonnement; mais dans ce Mémoire, ainſi que dans les précédens, tous les phénomènes ont été donnés par l'expérience avant d'eſſayer d'y appliquer le calcul. Voici en effet ce qu'indique la théorie.

A la place du globe *C*, *fig. 8*, ſuppoſons un corps d'une figure quelconque, que la petite ſurface repréſentée par $f\,a\,f'$, ait été touchée par le plan $e\,b\,e$; l'on demande, après que le petit plan $e\,b\,e$ a été ſéparé de $f\,a\,f'$, ſa denſité électrique, ou la quantité de fluide électrique qu'il contient relativement à celle que contient la portion égale de ſurface $f\,a\,f'$. Prenons deux points φ & φ' à une diſtance infiniment petite du point 2 & de la ſurface $f\,a\,f'$, l'un en dedans l'autre en dehors du corps *C*; ſoit δ la denſité électrique du plan $f\,f'$; l'action de ce petit plan circulaire $f\,f'$, décompoſée ſuivant la direction $a\,\varphi$, & agiſſant ſur le point φ ainſi que ſur le point φ', ſera par le calcul égale à δ, $\varphi\,a$ étant ſuppoſé infiniment petit relativement à $f\,f'$: mais l'action de $f\,f'$ ſur le point φ doit faire équilibre à l'action de toute la ſurface $f\,k\,f'$; ainſi l'action de toute cette ſurface ſur le point φ ſera auſſi égale à δ. Cette action de toute la ſurface $f\,k\,f'$, ſera la même ſur un point φ' placé en dehors du corps, puiſque $\varphi\,\varphi'$ eſt ſuppoſé infiniment petit; ainſi le point φ' éprouvant en même temps l'action du corps $f\,k\,f'$ & celle du plan $f\,f'$, il éprouvera une répulſion égale à $2\,\delta$. Ainſi, ſi nous ſuppoſons que le petit plan $e\,e'$ eſt aſſez proche du point a pour que l'électricité puiſſe paſſer du corps à ce petit plan, à travers la couche d'air qui les ſépare; & ſi l'on prend un point entre a & b à une diſtance infiniment petite de b, l'action de la petite ſurface circulaire $b\,e'$ ſur ce point dans la direction $b\,a$, ſera, en nommant *D* la denſité électrique du plan $e\,b\,e'$, égale à *D*; ainſi en nommant δ la denſité du petit plan $f\,f'$, l'on, aura pour l'action de la ſurface entière du corps $f\,a\,f\,k$ ſur le point b, la quantité $2\,\delta$, qui doit faire équilibre à l'action *D*

du plan $e\ e'$ ſur le même point; ainſi l'on aura généralement $2\ \delta = D$, c'eſt-à-dire, que la quantité d'électricité du petit plan $e\ e'$, quelle que ſoit la figure de la ſurface du corps $f\ k\ f'\ a$, ſera égale à une quantité d'électricité double de celle de la portion de ſurface $f\ a\ f'$, avec laquelle le petit plan $e\ e'$ aura été mis en contact. Ainſi la théorie ſe trouve avoir un accord parfait avec l'expérience.

XLVI.

COMME dans les expériences qui précèdent & dans celles qui vont ſuivre, nous avons principalement déterminé la denſité de chaque point des corps, en les faiſant toucher par un petit plan; il eſt clair, d'après les expériences & la théorie que nous venons d'expliquer, qu'en comparant pour la même diſtance les actions de notre petit plan ſur l'aiguille électriſée de notre balance, après que ce petit plan a été ſucceſſivement mis en contact avec différens points de la ſurface du corps, nous déterminons très-exactement le rapport des denſités électriques de deux points ſucceſſivement touchés.

Nous allons actuellement paſſer à la recherche des conditions d'équilibre dans des corps qui agiſſent l'un ſur l'autre; ces corps étant ſéparés par un intervalle aſſez grand pour que le fluide électrique ne puiſſe pas ſe communiquer de l'un à l'autre, à travers la couche d'air qui les ſépare.

XLVII.

Deux petits globes, fig. 9, *iſolés & non électriſés, ſont placés à une diſtance quelconque du gros globe* C *électriſé.*

EXPÉRIENCE.

L'ON iſole, *fig. 9*, un globe électriſé C de 8 pouces de diamètre. L'on iſole également deux petits globes

de 2 pouces chacun de diamètre : l'un *a'* est porté sur un support idio-électrique formé d'un cylindre de verre, enduit & surmonté de quatre branches de gomme laque; l'autre petit globe *a* est porté par un soutien vertical, tel qu'il puisse être introduit dans la balance électrique. Nous avons décrit ce soutien dans les Mémoires qui précèdent. Ayant électrisé positivement l'aiguille de la balance, ainsi que le globe *C'*, le petit globe *a* présenté dans la balance à une même distance de l'aiguille, a attiré l'aiguille, après avoir été placé en *a*, exactement avec la même force qu'il l'a repoussée, lorsqu'il a été placé en *a'*.

Résultat de cette Expérience.

Il est facile de voir que ce résultat s'accorde parfaitement avec le principe expliqué à l'*art. XLI*; car dans notre neuvième figure, le globe *C* étant électrisé positivement, une partie du fluide positif du globe *a* passe dans le globe *a'*; & *vice versâ*, une partie du fluide négatif du globe *a'* passe dans le globe *a*. Mais comme chacun des globes acquiert une portion de fluide égale à celle dont l'autre se dépouille, & que la quantité des deux fluides nécessaire pour la saturation, c'est-à-dire, pour qu'il n'y ait aucune action électrique, subsiste dans les deux corps, que ces fluides ne sont que déplacés; il en résulte que l'action attractive du globe *a*, relativement à l'aiguille de la balance, doit être exactement égale à l'action répulsive du corps *a'*.

XLVIII.

EXPÉRIENCE.

Comparaison, fig. 9, *de la densité électrique moyenne du globe placé en* a', *& de celle de la surface du globe* C.

CETTE expérience est destinée à déterminer, tout étant

comme dans la neuvième figure, quelle est pour une distance *R* 1 donnée, la quantité de fluide électrique positif surabondant dans le petit globe *a'*, &c.

Pour faire cette expérience, le globe *C'* ayant 8 pouces de diamètre, les globes *a* & *a'* deux pouces, le premier globe *a* étant placé à deux pouces du globe *C'*, j'ai présenté le dernier globe *a'* dans la balance, & j'ai déterminé son action répulsive, que j'ai trouvée de 21 degrés pour une distance donnée. J'ai fait ensuite toucher le globe *C'* par le globe *a'*, & l'introduisant de nouveau dans la balance, j'ai déterminé l'action du globe *a'* qui, à cause que la distance étoit la même que dans la première opération, se trouvoit proportionelle à la quantité d'électricité dont le petit globe *a'* s'étoit chargé dans le contact avec le globe *C'*. J'ai trouvé que l'aiguille étoit chassée, dans cette deuxième, expérience, avec une force de 66 degrés.

XLIX.

Résultat & théorie de cette expérience.

La quantité de fluide électrique, surabondante en plus ou en moins dans un corps, étant proportionelle à son action, lorsque l'on compare les actions à des distances égales, soit, *fig. 9*, δ la densité moyenne du fluide électrique répandu sur la surface du premier globe *a*, électricité qui sera négative dans notre expérience où le globe *C* est supposé électrisé positivement; soit δ' la densité électrique positive du globe *a'* qui, dans notre figure & notre expérience, se trouve électrisé positivement de la même quantité dont le globe *a* est électrisé négativement.

Si nous cherchons l'action des trois globes *C*, *a*, *a'*, sur le point de contact *b* des deux petits globes, point où il doit y avoir équilibre, nous trouverons que si les fluides électriques étoient répandus uniformément sur la surface des

des trois globes, l'on auroit pour l'équilibre d'action au point b, l'équation

$$\frac{2 D.(CR)^2}{(Cb)^2} = -\delta + \delta';$$

mais, comme la quantité de fluide électrique positif naturel, dont le globe a est dépouillé, est égale a la quantité du fluide surabondant du globe a, il en résulte que la somme des quantités de fluide des deux globes, est égale à o: ainsi l'on a $\delta' + \delta = 0$; ainsi, substituant dans la première équation la valeur de δ, l'on aura $\frac{2 D.(CR)^2}{(Cb)^2} = 2 \delta'$.

Il faut à présent remarquer que, dans la première équation, nous avons supposé que le fluide étoit uniformément répandu sur la surface de chaque globe, au lieu que ces fluides, ainsi que nous l'avons vu, au commencement de ce Mémoire, n'ont nulle action ou sont réunis à saturation au point de contact b, & sont séparés & portés à leur plus grand degré de densité aux points 1 & 2. Nous avons trouvé dans le même article, que l'action corrigée du globe a, sur le point b, étoit mesurée par $0,60\, \delta'$, & non pas par δ'; il en est de même de celle du corps a, ainsi notre équation corrigée nous donnera:

$$\frac{2 D (CR)^2}{(Cb)^2} = 1,20\, \delta'.$$

Dans notre expérience, $CR = 4$ pouces, $R\,1 = 2$ pouces, le rayon du globe $a = 1$ pouce; ainsi l'on aura $0,50\, D = 1,20\, \delta'$, d'où $D = 2,40\, \delta'$.

Nous avons trouvé dans notre expérience, que la densité moyenne du petit globe a' étant mesurée par 21 degrés, celle du même petit globe, lorsqu'il a touché a, étoit mesurée par 66 degrés: mais nous avons vu dans notre cinquième Mémoire, *vol. de 1787, pag. 437*, que, lorsqu'un globe d'un pouce de rayon touchoit un globe de 4 pouces de rayon, la densité moyenne sur la surface du globe d'un

pouce, étoit à celle du globe de 4 pouces, à peu-près comme 1,30 : 1,00; ainsi la densité moyenne du petit globe, après le contact, étant représentée par 66 degrés, celle du gros globe le seroit par 51 degrés: mais il faut remarquer que par le partage de l'électricité entre le gros globe & le petit globe, au moment du contact, le gros globe perd à peu-près $\frac{1}{12}$ de son fluide électrique, qu'il perdoit de plus dans l'intervalle des observations à peu-près $\frac{1}{20}$; ainsi la densité du globe C, avant le contact, étoit à peu-près mesurée par 57 degrés. Or nous avions trouvé par l'expérience la densité moyenne du globe a' placé comme dans la figure, mesurée par 21 degrés; ainsi la densité moyenne du fluide électrique positif de la surface du globe C', est à celle sur la surface du globe a' placé comme dans la neuvième figure, : : 57 : 21 : : 2,70 : 1,00; ainsi, d'après l'expérience, nous avons $\delta' = 2{,}70\, D$; quantité que nous venons de trouver égale à 2,40 D par la théorie; ainsi la théorie & l'expérience diffèrent peu entre elles, & les erreurs ne peuvent être attribuées qu'à l'imperfection des opérations.

L.

Comparaison, figure 10, *des densités électriques de quatre petits globes de 2 pouces de diamètre non électrisés, placés sur un isoloir, à 2 pouces de distance d'un globe* C' *électrisé, de 8 pouces de diamètre.*

QUATRIÈME EXPÉRIENCE.

LA figure dixième indique la position des globes. L'on a comparé, d'après les procédés indiqués dans l'expérience qui précède, la densité moyenne de l'électricité négative du globe $\overset{1}{a}$ avec la densité positive du globe $\overset{4}{a}$, & celle

du globe $\overset{4}{a}$ avec celle du globe C'; le globe C' étant électrisé positivement.

L'on a trouvé, en nommant $\overset{1}{\delta}$ la densité moyenne du globe $\overset{1}{a}$, $\overset{4}{\delta}$ la densité moyenne du globe $\overset{4}{a}$, D celle du gros globe C, que $D = -\ 1,50\ \overset{1}{\delta} = 2,20\ \overset{4}{\delta}$.

Théorie de cette Expérience.

D'après tout ce que nous avons dit dans les articles qui précèdent, il est facile de voir qu'en nommant $\overset{1}{\delta}$ la densité du globe $\overset{1}{a}$, $\overset{2}{\delta}$ la densité moyenne du globe $\overset{2}{a}$, $\overset{3}{\delta}$ la densité moyenne du globe $\overset{3}{a}$, $\overset{4}{\delta}$ la densité moyenne du globe $\overset{4}{a}$, D celle du globe C, R & r les rayons des globes C & a', faisant encore la distance R 1 $= a$, l'on aura les trois équations corrigées d'après l'*art. IV* de ce Mémoire :

Pour le point de contact 2 .... $\dfrac{2DR^2}{(R + a + 2r)^2}$

$$= -\ 0,60\ \overset{1}{\delta} + 0,70\ \overset{2}{\delta} + 0,22\ \overset{3}{\delta} + 0,08\ \overset{4}{\delta}.$$

Pour le point de contact 3 .... $\dfrac{2DR^2}{(R + a + 4r)^2}$

$$= -\ 0,22\ \overset{1}{\delta} - 0,70\ \overset{2}{\delta} + 0,70\ \overset{3}{\delta} + 0,22\ \overset{4}{\delta}.$$

Pour le point de contact 4 .... $\dfrac{2DR^2}{(R + a + 6r)^2}$

$$= -\ 0,08\ \overset{1}{\delta} - 0,22\ \overset{2}{\delta} - 0,70\ \overset{3}{\delta} + 0,60\ \overset{4}{\delta}.$$

Pour avoir une quatrième équation, il faut remarquer que les quatre petits globes étant primitivement dans leur

état naturel, leur fluide électrique n'eſt que dérangé par l'influence de l'action du gros globe, & que la ſomme des fluides électriques des quatre petits globes, n'eſt ni augmentée ni diminuée ; ainſi l'on aura la ſomme des denſités égale à zéro pour les quatre petits globes ; ainſi l'on aura

$$4.^e \textit{ équation. } \overset{1}{\delta} + \overset{2}{\delta} + \overset{3}{\delta} + \overset{4}{\delta} = 0.$$

Au moyen de ces quatre équations, l'on fera diſparoître à volonté trois des quatre inconnues $\overset{1}{\delta}$, $\overset{2}{\delta}$, $\overset{3}{\delta}$ $\overset{4}{\delta}$, & l'on comparera la quatrième avec la denſité D du globe C: ce calcul appliqué à notre expérience donnera $D = -1,53\,\overset{1}{\delta}$. L'expérience nous a donné $D = -1,550$; le calcul donnera $D = 2,12\,\overset{4}{\delta}$; l'expérience nous a donné $D = 2,2040\,\overset{4}{\delta}$: la théorie & l'expérience s'accordent encore ici auſſi-bien que l'on le peut eſpérer dans des opérations de ce genre.

Nous n'étendrons pas les expériences & les calculs qui précèdent, à un plus grand nombre de petits globes placés en contact, & dont les centres ſeroient une même ligne avec le centre d'un gros globe ; il eſt facile d'y appliquer les différentes méthodes d'approximation que nous avons déjà préſentées ; mais nous croyons néceſſaire de développer dans un aſſez grand détail la manière dont le fluide électrique paroît ſe manifeſter avec différens degrés de denſité dans les différentes parties d'un cylindre non iſolé, ou ce qui revient au même, iſolé, mais d'une longueur infinie, préſenté par une de ſes extrémités à une diſtance donnée d'un gros globe électriſé, la prolongation de l'axe du cylindre paſſant par le centre du globe. L'on ſent que cette recherche doit avoir un rapport immédiat avec la théorie des paratonnerres.

L I.

Résultat des expériences destinées à déterminer l'état électrique des différentes parties de la surface d'un cylindre non isolé, d'une très-grande longueur, présenté par une de ses extrémités à un gros globe électrisé, isolé.

DANS les résultats qui vont être présentés, je n'entrerai dans le détail des expériences, qu'autant que ces détails seront assez différens de ceux qui précèdent, pour exiger une explication particulière.

L'on sait, & il suit des recherches qui précèdent, que lorsque l'on présente un cylindre non isolé à une distance d'un globe électrisé, assez grande pour que le fluide électrique du globe ne puisse pas passer dans le cylindre, la surface du cylindre donne des signes d'électricité contraire à celle du globe, & que la densité électrique de chaque point du cylindre, ou ce qui revient au même, l'action de chacun de ces points est d'autant plus grande, que le point du cylindre est plus rapproché du globe électrisé: l'objet de cette partie de mon Mémoire est de déterminer,

1.° Pour un même cylindre placé à différentes distances du même globe électrisé, la densité électrique de l'extrémité du cylindre la plus proche du globe; la loi que suit cette densité; de comparer cette densité, en la supposant proportionelle à son degré d'action, avec celle du globe électrisé que l'on suppose de même proportionelle à son degré d'action;

2.° En plaçant des cylindres non isolés de différens diamètres, à la même distance d'un globe électrisé, de déterminer suivant quel rapport la densité de l'extrémité du cylindre augmente ou diminue, relativement aux diamètres de ces cylindres;

3.° Suivant quelle loi la densité des différens points

d'un même cylindre placé à une diſtance donnée d'un globe électriſé, diminue relativement à la diſtance de ces points au centre du globe électriſé;

4.° Enfin ſuivant quelle loi la denſité de la ſurface des cylindres augmente relativement au diamètre de différens globes, la denſité électrique des globes étant la même.

L I I.

PREMIER RÉSULTAT.

Un cylindre non iſolé placé à différentes diſtances d'un globe électriſé.

SI l'on place le même cylindre non iſolé, ou, ce qui revient au même, iſolé, mais d'une longeur infinie, de manière que l'axe du cylindre ſoit dans la direction du centre du globe électriſé, l'on trouvera par l'expérience, en faiſant varier la diſtance du centre du globe à l'extrémité du cylindre la plus proche de ce globe, que la denſité électrique de cette extrémité ſera dans un rapport un peu au-deſſous de la puiſſance $\frac{3}{2}$ de la raiſon inverſe de la diſtance de cette extrémité au centre du globe. L'expérience qui a donné ce réſultat s'eſt faite de deux manières; ou en touchant avec un petit plan iſolé l'extrémité du cylindre, & plaçant enſuite à l'ordinaire ce petit plan dans la balance électrique; ou en faiſant toucher l'extrémité du cylindre avec un petit globe du même diamètre que le cylindre, que l'on introduit enſuite dans la balance.

L I I I.

DEUXIÈME RÉSULTAT.

Denſités électriques de l'extrémité de deux cylindres de différens diamètres non iſolés, placés alternativement à la même diſtance du centre d'un globe électriſé.

EN plaçant ſucceſſivement deux cylindres de différens

diamètres à la même distance d'un même globe électrisé, l'on a trouvé que les densités électriques de l'extrémité des deux cylindres étoient entr'elles à peu-près en raison inverse des diamètres des deux cylindres, pourvu cependant que les diamètres des cylindres fussent beaucoup plus petits que le diamètre du globe.

LIV.

TROISÈME RÉSULTAT.

Rapport des densités électriques des différens points de la surface d'un même cylindre d'une grande longueur, & non isolé, suivant que ces points sont plus ou moins éloignés de l'extrémité du cylindre, ou du centre du globe électrisé.

EN plaçant un cylindre à une distance donnée d'un globe électrisé, l'on trouve que la densité électrique des différens points de la surface de ce cylindre, est en raison inverse du carré de la distance de ces points au centre du globe électrisé.

Cette loi n'est pas suivie vers l'extrémité du cylindre qui avoisine le globe sur une longueur égale à quatre ou cinq diamètres du cylindre, l'on trouve par l'expérience que dans cette partie la densité électrique croît en s'approchant de l'extrémité du cylindre dans un rapport beaucoup plus grand que l'inverse du carré des distances; & si, comme dans toutes les expériences que nous avons faites, le cylindre est terminé comme à la *onzième figure*, par une demi-sphère, l'on trouvera que la densité à l'extrémité de l'axe *a*, point le plus proche du globe *C*, est à peu-près double de celle du point *f*, qui n'est éloignée du point *a*, extrémité du cylindre, que d'une quantité *a e* égale au diamètre du cylindre, quelle que soit d'ailleurs la distance *A a*.

L V.

QUATRIÈME RÉSULTAT.

Un même cylindre non isolé, placé à la même distance du centre des deux globes électrisés de différens diamètres.

EN supposant la densité électrique de deux globes la même, l'on trouvera par l'expérience que la densité des points du cylindre placés à la même distance du centre des deux globes, sera comme le carré des rayons de ces globes. La théorie auroit annoncé *à priori* le résultat que l'expérience vient de donner; car l'action d'une surface sphérique sur un point quelconque placé en dehors de la sphère, est la même que si cette surface étoit réunie au centre de la sphère; ainsi son action sur tous les points placés en dehors de la surface, sera en raison directe de l'étendue de la surface multipliée par la densité électrique, & en raison inverse du carré de la distance au point sur lequel s'exerce l'action. Or comme le cylindre est le même, & que chaque point du cylindre sur lequel l'on évalue l'action, est supposé à la même distance du centre des deux globes; il en résulte que les densités électriques d'un même point du cylindre placé à la même distance du centre des deux globes électrisés, doivent toujours être en raison directe composée de la densité électrique de la surface des globes, & du carré des rayons des globes.

L V I.

Formule dérivée des résultats précédens.

POUR pouvoir, d'après les résultats qui précèdent, donner une formule qui indique tout de suite l'état électrique des différens points d'un cylindre non isolé, ou touché au point *G* par un corps non isolé, comme à la *figure*

figure II, à une très-grande diſtance du point *a*, l'on ſent qu'il faut déterminer ce rapport par l'expérience pour un cas particulier, afin d'avoir un coéfficient conſtant Parmi les différentes expériences qui m'ont ſervi à fixer les quatre réſultats qui précèdent, j'en vais choiſir une qui me donnera ce coéfficient.

EXPÉRIENCE.

J'AI iſolé, *fig. 11*, le globe *C* de 8 pouces de diamètre; je l'ai électriſé; j'ai placé ſur un iſoloir à 2 $\frac{1}{2}$ pouces de diſtance un cylindre *a G*, d'un pouce de diamètre : ce cylindre étoit terminé par une demi-ſphère *b a b*. J'ai touché alternativement à l'ordinaire, par un petit plan iſolé, le point *a* de la demi ſphère, & un point quelconque du globe *C*. Ayant électriſé l'aiguille de la balance de la même électricité que le globe, l'aiguille a été attirée par le petit plan lorſqu'il a eu touché en *a* l'extrémité du cylindre, & repouſſée lorſqu'il a eu touché le globe. En meſurant les forces pour une même diſtance, j'ai trouvé que la force attractive du petit plan, lorſqu'il avoit touché le point *a*, étoit à la force répulſive du même plan, lorſqu'il avoit touché le globe, comme 4,00 : 1,00.

Lorſque par la même méthode j'ai comparé le point *a* avec le point *f*, placé à une diſtance d'un pouce de l'extrémité du cylindre, j'ai trouvé que la denſité électrique du point *a*, étoit à celle du point *f*, comme 2,5 : 1,0 ; d'où il eſt facile de conclure que la denſité électrique négative à un pouce de l'extrémité du cylindre, ſera à la denſité électrique poſitive de la ſurface du globe, à peu-près comme 16: 10.

LVII.

EN réuniſſant à préſent les quatre réſultats qui précèdent, nous trouvons par l'expérience que les denſités électriques de la demi-ſphère qui termine différens cylindres préſentés à un globe électriſé, ſont d'une nature contraire

à celle du globe, en raison directe composée de la densité sur la surface du globe, du carré du diamètre de ce globe, & en raison inverse composée de la puissance $\frac{3}{2}$ de la distance *c a fig. 4*, du centre du globe à l'extrémité du cylindre & du rayon du cylindre

Ainsi, si D est la densité du fluide électrique positif, répandu sur la surface d'un globe, dont R est le rayon; si r est le rayon du cylindre; si a est la distance entre le centre du globe & l'extrémité du cylindre, l'on aura pour exprimer δ, densité électrique négative de l'extrémité du cylindre, la formule

$$\delta = -\frac{m\,D\,R^2}{r\,(R+a)^{\frac{3}{2}}},$$

dans laquelle l'on va déterminer la valeur de la constante m, d'après l'expérience de l'article qui précède. Dans cette expérience $R = 4$ pouces; $r = \frac{1}{2}$ pouce; $a = 2,5$ pouces, δ a été trouvée égale à $4\ D$: substituant ces quantités dans la formule, l'on aura $m = 2,07\sqrt{(1 \text{ pouce})}$ & la formule générale sera

$$\delta = 2,07\ D\,R^2 : r\,(R+a)^{\frac{3}{2}},$$

dans laquelle il faut réduire en pouces les valeurs de a; de r, & de R.

L V I I I.

Application de la formule précédente à un exemple analogue aux paratonnerres.

SUPPOSONS qu'un nuage chargé de fluide électrique ait la forme d'un globe de mille pieds de rayon, & passe à 500 pieds au-dessus de l'extrémité d'un cylindre d'un pouce de diamètre; dans cet exemple $R = 1000$ pieds; $a = 500$ pieds; $r = \frac{1}{2}$ pouce. Ces valeurs substituées dans la formule donnent

$$\delta = \frac{2,07 \cdot 12^2 \cdot (1000)^2}{\frac{1}{2}\,(1500)^{\frac{3}{2}}\,12^{\frac{3}{2}}} = 278\ D;$$

c'est-à-dire, que la densité électrique de l'extrémité du

cylindre, d'une nature contraire à celle du nuage, sera 278 fois plus grande que celle de la surface du nuage.

Mais comme l'expérience nous a indiqué, que dans notre formule $(R + a)$ étoit élevé à une puissance plus petite que $\frac{1}{2}$, la densité δ doit être plus grande que 278 D. Pour s'en convaincre, il suffit de supposer que dans la formule $(R + a)$ est élevé à la puissance 1; pour lors l'on aura $m = 1,23$, la formule donnera $\delta = 1,23\ DR^2 : r(R + a)$, qui, appliquée à notre exemple, donneroit $\delta = 19680\ D$; en sorte qu'une petite variation dans la puissance de $(R + a)$ en donneroit une très-grande dans celle de δ.

Il résulte de cette observation, que δ est plus grand que 278 D; mais nous ne savons pas de combien, car comme les expériences d'où nous avons tiré les quatre résultats qui précèdent, ont eu pour limite des globes d'un pied de diamètre & au-dessous, & des cylindres depuis 4 lignes jusqu'à 2 pouces de diamètre; & pour plus de facilité dans les calculs, nous avons supposé que les résultats étoient représentés par une formule d'un seul terme, ce qui m'a paru donner des valeurs suffisamment approchées dans les limites où les expériences ont été faites. Il se pourroit cependant que cette formule ne pût pas s'étendre à des limites très-éloignées de celles dans lesquelles les expériences sont renfermées; c'est ce qu'il sera facile de vérifier par les méthodes d'approximations théoriques qui vont terminer ce Mémoire, & qui nous indiqueront conformément à l'expérience, que la densité de l'extrémité du cylindre est plus grande pour les gros globes qui agissent sur l'extrémité d'un cylindre non isolé d'un petit diamètre, que celle donnée par la formule, & que par conséquent dans notre exemple, la densité de l'extrémité du cylindre d'un pouce de diamètre, présenté à 500 pieds d'un globe électrisé de 1000 pieds de rayon, est plus grande que 278 fois la densité électrique de la surface de ce globe.

L I X.

Application du résultat précédent à l'effet des Paratonnerres.

DE-LÀ il résulte que le nuage, ainsi que la couche d'air, très-imparfaitement idio-électrique, interposée entre le nuage & l'extrémité du cylindre, étant composés de parties mobiles, celles de ces parties qui avoisinent l'extrémité du cylindre, doivent s'y précipiter avec une très-grande rapidité, y perdre leur électricité, se charger d'une forte électricité d'une nature contraire à celle du nuage, s'élancer ensuite vers le nuage en fuyant l'extrémité du cylindre, & en détruisant l'électricité des parties du nuage qu'elles rencontrent. Mais comme le diamètre du cylindre est très-petit, son action, quoique très-grande relativement aux points qui avoisinent la surface de la demi-sphère qui le termine, est très-peu considérable relativement aux points qui sont à 30 ou 40 pieds de l'extrémité de ce cylindre. Ainsi, il doit arriver que l'extrémité du cylindre dépouillera les parties du nuage qui l'avoisinent, sans explosion électrique, & que tous les corps qui seront en-dessous de l'extrémité de ce cylindre, à une distance peu considérable du cylindre, seront préservés de l'explosion du nuage.

L X.

Calcul théorique destiné à déterminer par approximation l'état électrique d'un cylindre non isolé, dont l'axe passe par le centre d'un globe électrisé & isolé, placé à une distance de ce cylindre, assez grande pour que l'électricité du globe ne puisse pas se décharger à travers la couche d'air qui les sépare.

LES différentes méthodes d'approximation dont nous nous

sommes servi dans les différens articles qui précédent, peuvent être employés ici : nous allons en donner quelques exemples.

PREMIER EXEMPLE.

Commençons par appliquer ces méthodes à l'expérience dont nous avons donné les détails à l'*article LVI.* Dans cette expérience, *figure II,* un globe *C* électrisé de 4 pouces de rayon, est placé à 2 $\frac{1}{2}$ pouces de distance de l'extrémité demi-sphérique *a* d'un cylindre d'un pouce de diamètre & de 30 pouces de longueur. Ce cylindre est touché à son extrémité *G* la plus éloignée du globe, par un corps qui communique avec la terre.

Je suppose que dans la *figure II,* $m\,\overset{1}{m}\,\overset{2}{m}\,\overset{3}{m}\,\overset{4}{m}\,\overset{5}{m}$ représentent la courbe des densités électriques des différents points correspondans de la surface du cylindre. Je cherche d'après la méthode expliquée, *article XXXVI* de ce Mémoire, les variations de la densité de ces différents points, en supposant que cette variation suit une ligne droite. Je remarque d'abord que l'action du globe étant en raison inverse du carré de la distance aux points sur lesquels il agit, & la distance *C G* étant très-considérable, l'on peut supposer la densité nulle ou au moins très-petite, au point *G*, où le cylindre est touché par un corps indéfini. D'après cette supposition, si l'on cherche la variation $n\,r$ au milieu du cylindre, qui a 30 pouces de longueur ou soixante fois son rayon r, l'on aura, *article XXXVII & suivans.*

$$\frac{2\,D\,.\,4^2}{(21,5)^2} = 2\,n\,r\left(\log.\frac{60}{\mu} - 1\right) = 2\,n\,r\,(3,09),$$

d'où résulte $n\,r = 0,0112\,D$. Dans cette équation, $n\,r$ représente la variation ou l'accroissement de la densité sur une longueur égale au rayon du cylindre. Mais comme nous supposons la variation au point *G* nulle, la variation moyenne sur une longueur de rayon, depuis le point $\overset{4}{m}$,

milieu du cylindre, jusqu'au point G, sera 0,0056; ainsi la densité au point $\overset{4}{m}$ seroit égale à 0,168 D.

Pour déterminer à présent la variation au point $\overset{2}{b}$ de la surface du cylindre, point que nous supposons à 5 pouces de distance de l'extrémité a, prenons de l'autre côté du point $\overset{2}{b}$ une longueur $\overset{2}{b}\,\overset{3}{b}$ de 5 pouces; il restera depuis $\overset{3}{b}$ jusqu'au milieu du cylindre, une longueur $\overset{3}{b}\,\overset{4}{b}$ égale à 5 pouces. Comme la variation au point $\overset{4}{m}$ a été trouvée pour la longueur du rayon r égale 0,0112 D, l'accroissement de la densité, depuis $\overset{4}{m}$ jusqu'à $\overset{3}{m}$, seroit par une première approximation pour la longueur, de dix rayons, égale à 0,112 D, qui, ajouté à la densité trouvée pour $\overset{4}{m}$, donnera pour la densité en $\overset{3}{m}$ la quantité 0,28 D.

Si la densité que nous venons de trouver pour le point $\overset{3}{b}$, étoit uniforme jusqu'à l'extrémité G, l'on auroit l'action de la portion du cylindre $\overset{3}{b}\,\overset{5}{m}$ sur le point F, représentée par $0,28\,D(\frac{1}{10} - \frac{1}{50}) = 0,023\,D$, quantité un peu trop grande, parce que la densité va en décroissant de $\overset{3}{b}$ en $\overset{5}{m}$. Mais comme nous venons de supposer la variation de la densité constante, depuis le milieu $\overset{4}{b}$ jusqu'au point $\overset{3}{b}$, au lieu qu'elle va en croissant, les deux erreurs en sens contraire tendent à se compenser. A présent si nous cherchons l'action de la portion du cylindre $a\,\overset{3}{b}$ sur le point F placé à 5 pouces de distance de l'extrémité du cylindre, en supposant la variation en ligne droite sur toute cette

longueur $a\overset{3}{b}$, & égale à $n' r$ pour la longueur d'un rayon du cylindre; l'on aura, à cause que la portion $\overset{3}{b}\overset{5}{m}$ du cylindre agit dans le même sens que le globe C, l'électricité du globe & du cylindre étant d'une nature contraire, l'équation

$$\frac{2\, D\, 4^2}{(11,5)^2} + 0{,}023\, D = 2\, n' r \left(\frac{\log.\ 20}{\mu} - 1 \right)$$ d'où résulte $n' r = 0{,}082\, D$.

Ainsi, en prenant cette variation moyenne pour celle qui s'étend depuis le point b ou depuis un pouce, à compter de l'extrémité a jusqu'à 10 pouces, c'est-à-dire, sur une longueur de 18 rayons, l'on aura pour l'accroissement, depuis le point $\overset{3}{m}$ jusqu'à un pouce de l'extrémité, la quantité 1,476 D, qui, étant ajoutée à 0,28 D, densité à 10 pouces du point a, donnera pour la densité, à un pouce de l'extrémité du cylindre, la quantité 1,72 D. L'expérience nous a donné, *article LVI*, la densité de ce cylindre mesurée à un pouce de son extrémité a, égale à peu-près à 1,6 D, qui diffère peu de celle donnée par la théorie.

Les variations des différens points du cylindre étant données par l'approximation qui précède, l'on peut les déterminer de nouveau par une seconde approximation qui nous rapprochera beaucoup de leur véritable valeur. Je suppose que l'on veuille avoir dans la *figure 4*, la variation des densités au point i, qui tient le milieu entre $\overset{2}{b}$ & $\overset{3}{b}$, je calcule d'après les formules données, *article XXXVI & suivans*, l'action que la portion du milieu du cylindre $\overset{2}{b}\,a$, dont la densité, ainsi que la variation, sont à peu-près connues par l'approximation qui précède, exerce sur le point de l'axe qui répond à i. Je fais la même opération pour les

portions de cylindre $\overset{3}{b}\ \overset{4}{b}$ & $\overset{4}{b}\ \overset{5}{m}$ D'après ces actions données par le calcul, ainsi que d'après celle du globe *C;* je forme une équation analogue à celles qui précèdent; cette équation me donne la variation *n r* de la densité moyenne entre les points $\overset{2}{b}$ & $\overset{3}{b}$. Je fais les mêmes opérations pour un autre point quelconque du cylindre, & je détermine ainsi par une seconde approximation les variations dans tous les points de la surface, d'où je conclus la densité électrique du cylindre pour chaque point de sa surface. L'on pourroit, par une troisième approximation, en suivant la même méthode, s'approcher encore davantage de la vérité, si on le croyoit nécessaire; mais cette précision ne paroît pas devoir être jamais utile à la pratique dans les recherches électriques.

L X I.

SECOND EXEMPLE.

JE suppose, *fig. 12*, que *C'* soit un globe de mille pieds de rayon, que la densité du fluide électrique répandu sur la surface de ce globe soit *D;* que l'extrémité *a* du cylindre *a m* soit placée à 500 pieds de ce globe; que ce cylindre ayant un pouce de rayon & 60 pieds de longueur de *a* en *m''*, soit enfoncé au point *m''* perpendiculairement dans une surface plane indéfinie *H o* d'un corps conducteur.

D'après tout ce que nous avons dit, le cylindre *a m''* non isolé donnera dans toute sa longueur, des signes d'électricité contraire à celle du globe *C'*. Son électricité sera nulle au point *m''*, où il joint la surface *H o*, & cette surface sera elle-même électrisée d'une nature d'électricité contraire à celle du globe dans les parties qui avoisinent le globe; en sorte que pour avoir la variation de la densité sur un point quelconque *q* du cylindre, il faut déterminer cette variation, d'après l'action de chaque partie *a q* & *q m''* du cylindre sur le point *q*, & d'après l'action du globe *C* de

la

la ſurface *H o* ſur le même point *q*. Si nous n'avions pas égard à l'action de la ſurface *H o*, & que nous calculions la variation au milieu *q* du cylindre *a m''* à 30 pieds de ſon extrémité, d'après la méthode de l'article qui précède, l'on trouveroit pour cette variation ſur la longueur d'un rayon, $n\,r = 0{,}0766\ D$. Ainſi, ſi la variation étoit conſtante ſur toute la longueur du cylindre, qui a 60 pieds ou 720 *r* de longueur, l'on auroit la denſité à deux ou trois pouces de l'extrémité du cylindre, égale à 55 *D;* mais comme la variation augmente à meſure que l'on s'approche de l'extrémité *a* du cylindre, la denſité à 2 ou 3 pouces de cette extrémité, ſera beaucoup plus grande que celle que nous venons de trouver. En faiſant le calcul de la variation pour les différens points du cylindre, d'après les méthodes données dans les quatre derniers articles du Mémoire qui précède, j'ai trouvé que la denſité à cinq ou ſix pouces de l'extrémité *a*, ſeroit par une première approximation, égale à plus de 120 *D*, & qu'elle ſeroit égale à plus de 300 *D* ſur la demi-ſphère qui termine le cylindre.

Mais il faut remarquer que nous n'avons pas encore eu égard à l'action de la ſurface *O H*, dont l'électricité eſt de nature contraire à celle du globe *C*, & qui ſe réunit à celle du globe, pour pouſſer le point *q* ou un autre point quelconque du cylindre de *q* vers *C;* elle doit par conſéquent augmenter la variation de la denſité pour tous les points du cylindre; ainſi la denſité de chaque point du cylindre doit être encore plus grande que celle déterminée par le calcul précédent.

Cherchons donc quelle eſt la denſité électrique de la ſurface *H O*, préſentée à une certaine diſtance d'un globe électriſé *C*. Lorſque nous aurons l'évaluation de cette denſité, d'après l'expérience & la théorie, il ſera facile de déterminer l'action de la ſurface *H O* ſur un point quelconque du cylindre; & en réuniſſant cette action à celle du cylindre & du globe ſur le même point, de calculer d'une

manière assez précise la densité électrique des différentes parties de la surface du cylindre.

L X I I.

État électrique d'un plan non isolé, placé, fig. 13, *à une distance* A B *d'un globe électrisé, assez grande pour que l'électricité ne se communique pas du globe au plan, à travers la couche d'air qui les sépare.*

LA *figure 13* indique la disposition du globe *C* & du plan *B t* qui lui est présenté : le globe *C* est isolé & électrisé; le plan *B* est soutenu verticalement par un support idio-électrique *e f g*. Ce plan circulaire est percé en *B* vers son centre de deux pouces de diamètre, où l'on introduit un petit plan circulaire du même diamètre que ce trou. Ce petit plan peut être ensuite placé dans la balance électrique. Je ne donnerai ici que le détail d'une expérience, & le résultat général des autres.

EXPÉRIENCE.

Le plan *t B*, *figure 13*, avoit 16 pouces de diamètre; le globe *C* avoit 8 pouces de diamètre; le centre *B* de ce plan étoit placé à 4 pouces de la surface du globe *C;* l'on touchoit avec le doigt en *t* le plan *B t*, & en retirant le petit cercle *B*, on l'introduisoit dans la balance électrique, dont l'aiguille étoit électrisée de la même nature d'électricité que le globe *C*. Cette aiguille étoit attirée avec une force dont on prenoit la mesure au moyen de notre micromètre de torsion; l'on touchoit tout de suite le globe *C*, avec le même petit plan *B*, qui, présenté dans la balance, chasse l'aiguille; l'on déterminoit cette action & on la comparoit pour une même distance avec la première. Le résultat de cette expérience a été que l'action répulsive du petit plan

après avoir touché le globe, étoit quatre fois plus grande que l'action attractive du même petit plan, après avoir été placé en B au centre du grand plan $B\,t$ non iſolé.

Par une ſuite d'expérience analogue à la précédente, en faiſant varier la diſtance $C\,B$, & en comparant entre elles les denſités électriques du point B, relativement à cette diſtance $B\,C$, j'ai trouvé que les denſités électriques du point B, d'une nature contraire à celles du globe C, étoient exactement entre elles, en raiſon inverſe du carré des diſtances du point B au centre du globe C.

LXIII.

Réſultat de cette Expérience.

Il eſt facile de ſoumettre les réſultats de l'expérience au calcul. Soit D la denſité électrique de la ſurface du globe, δ celle du plan dans les parties qui avoiſinent le point B: l'action d'une ſurface dont la denſité uniforme eſt δ agiſſant en raiſon inverſe du carré des diſtances, ſera pour un point à diſtance infiniment petite de ce plan, égale à δ; celle d'une ſurface ſphérique agiſſant à une diſtance a du centre de la ſphère, ſi D eſt la denſité de la ſurface & R ſon rayon, ſera égale à $\frac{2\,D\,R^2}{a^2}$; ainſi, ſi l'on met en équation l'action du globe C & celle du plan D, les denſités électriques du globe & du plan étant d'une nature contraire, l'on aura $\left(\frac{2\,D\,R^2}{a^2} + \delta\right) = 0$ ou $-\delta = \frac{2\,D\,R^2}{a^2}$; dans l'expérience de l'article qui précède $R = 4$ pouces, $a = 8$ pouces; ainſi $-\delta = \frac{1}{2}\,D$, quantité que nous avons paru trouver égale à $\frac{1}{4}\,D$ par notre expérience. Mais il faut ſe reſſouvenir, ainſi que nous l'avons prouvé plus haut, *figure 8*, que lorſque le petit plan B touche le globe, il prend une quantité d'électricité double de celle de la ſurface touchée; d'où il ſuit que la quantité d'électricité

du petit plan *B*, après avoir touché le globe, eſt double de celle de la ſurface : ainſi comme en introduiſant le petit plan *B* dans le trou du grand plan *B I*, nous ne prenons qu'une denſité égale à celle du plan, il en réſulte que l'expérience, ainſi que la théorie, donnent $\delta = -\frac{1}{2} D$.

La même formule nous apprend que la denſité δ du centre *B* du plan *B t*, doit ſuivre la raiſon composée directe de la denſité électrique du gros globe & de ſa ſurface, & la raiſon inverſe du carré de la diſtance *B C* entre le milieu du plan & le centre du globe ; ce qui ſe trouve très-exactement conforme à l'expérience.

L X I V.

Remarque.

DANS l'expérience dont nous venons de donner la théorie, à l'article précédent, il ſe préſente une obſervation curieuſe, c'eſt que lorſque le plan *B t*, *figure 13*, eſt touché en *t*, le globe *C* étant électriſé, il n'y a que la ſurface du plan qui eſt du côté du globe, qui donne des ſignes d'électricité, la ſurface oppoſée reſte dans ſon état naturel ; c'eſt ce qu'il eſt facile de prouver par l'expérience, en touchant alternativement ces deux ſurfaces par un petit plan iſolé, que l'on préſente enſuite à un électromètre très-ſenſible. Lorſque ce petit plan touche le grand plan d'une ſurface du côté du globe, il donne des ſignes d'une forte électricité ; lorſqu'il le touche du côté oppoſé, il n'en donne aucun ſigne.

Ce phénomène eſt facile à expliquer par les conſidérations dont nous avons fait uſage dans les différens Mémoires qui précèdent, pour prouver que le fluide électrique ſe diſtribue ſeulement ſur la ſurface des corps. Nous y reviendrons dans le Mémoire qui ſuivra celui-ci, & qui complétera le travail que nous avons entrepris ſur l'électricité. Il aura pour objet de déterminer la manière dont le fluide électrique ſe

diſtribue, & pénètre la ſurface des corps idio-électriques, ainſi que ſur les corps conducteurs qui les touchent ou les avoiſinent.

L X V.

REVENONS à préſent à notre deuxième exemple, *art. LXI,* dans lequel *C, figure 12*, eſt un globe de 1000 pieds, placé à 500 pieds de diſtance de l'extrémité d'un cylindre, dont la longueur eſt 60 pieds & le rayon un pouce. Dans cet exemple, le plan *H o* ſe trouvant à 1560 pieds du centre du globe *C*, ſa denſité *D'* ſera repréſentée par $D' = \frac{2D.(1000)^2}{(1560)^2} = 0{,}822\ D$, *D* étant la denſité de la ſurface du globe. Si nous voulons déterminer par les méthodes d'approximation qui précèdent la variation du cylindre, nous trouverons que l'action du globe *C* ſur le point *q* placé au milieu du cylindre, ſera égale à $\frac{2D.(1000)^2}{(1530)^2} D = 0{,}854\, D$; l'action du plan *H o* ſur le même point *q*, en ſuppoſant le rayon de ce plan très-grand relativement à la diſtance, *m'' q* ſera, comme nous venons de le trouver, égale à $D' = 0{,}822\ D$, action qui pouſſe le point *q* vers le globe *C* dans le temps que le globe *C'* attire le même point; ainſi l'action réunie du globe & du plan *H o* ſollicite le point *q* dans le ſens *q C'* avec une force égale (à $0{,}822 + 0{,}854)\ D$.

Mais nous avons vu, dans les précédens articles, que ſi la variation des denſités du cylindre *a m''*, *figure 5*, ſuivoit une ligne droite, l'action de tout le cylindre ſur un point placé à ſon milieu ſeroit égale $2\, n\, r\, (\frac{\log. \frac{l}{r}}{\mu} - 1)$, où *n r* repréſente la variation de la denſité ſur une longueur égale au rayon *r* du cylindre, *l* eſt la longueur du cylindre, μ le module du ſyſtème logarithmique; ainſi, dans notre exemple, comme

r eſt égal à un pouce, comme la longueur du cylindre eſt de ſoixante pieds ou de 720 r, nous aurons pour l'action du cylindre ſur le point placé au milieu en q, la quantité $2 \,.\, 558 \,.\, n\,r$, action qui agit ſur le point q de q, vers m''; ainſi l'équilibre de ce point donnera

$$(0{,}822 + 0{,}854)\, D = 2\, n\, r.\, 5{,}58 \text{ ou } n\, r = \frac{0{,}838}{5{,}58} D$$

$= 0{,}15\, D$, quantité à peu-près double de celle que nous avons trouvée lorſque nous n'avions pas égard à l'action de la ſurface $H\,O$.

Si je veux à préſent avoir la variation au point φ, que je ſuppoſe à 5 pieds de l'extrémité a du cylindre $a\,m''$, je trouverois que l'action du plan $H\,o$ ſur le point φ eſt à peu-près égale D' ou à $0{,}822\, D$, la diſtance $m''\,\varphi$ étant très-petite relativement à l'étendue électriſée du plan $H\,o$: l'action du globe ſur le point φ ſera égale à $\frac{2\, D\, (1000)^2}{(1505)^2}$. Pour avoir à préſent l'action du cylindre ſur le point φ, je ſuppoſerai le cylindre diviſé en deux parties; la première $a\,p$, ayant 10 pieds de longueur; la deuxième $p\,m$, ayant 55 pieds de longueur. Si la variation de la denſité trouvée au milieu du cylindre égale à $0{,}15\, D$, s'étendoit juſqu'au point p, à 10 pieds de l'extrémité a, l'on auroit à ce point la denſité δ égale à $600 \times 0{,}15\, D = 90\, D$.

Ainſi, ſi l'on vouloit calculer l'action de la portion $p\, m''$ du cylindre ſur le point φ, la denſité électrique étant en p égale à δ, & décroiſſant de la quantité $n\,r$, ſur une longueur du rayon, l'on auroit, pour exprimer cette action, en nommant $\varphi\, p$, a, & $\varphi\, m''$, x, d'après les articles qui précèdent la formule $\delta\left(\frac{r}{a} - \frac{r}{x}\right) + n\, r\left(\frac{a - x}{x}\right) + \frac{n\, r}{\mu} \log.\left(\frac{x}{a}\right)$.

Il faut dans cette formule ſubſtituer à la place de δ, ſa valeur $90\, D$, à la place de a, ſa valeur $60\, r$, à la place de x, la quantité 660, & à la place de $n\, r$, ſa valeur $0{,}15\, D$; d'où réſultera pour l'action de cette partie $m\, p$ du cylindre,

la quantité 1,14 D. Si l'on suppose à présent, que la variation moyenne sur les dix derniers pieds est $n' r$, l'on aura au point p, milieu de ces dix derniers pieds, pour l'action dans le sens $a\ p$, des dix derniers pieds du cylindre, la quantité $2\ n'\ r\ (\frac{\log.\ 120}{\mu} - 1) = 7,58\ n'\ r$. Ainsi, en réunissant l'action du globe à celle de la surface $H\ o$ & à celle de la portion du cylindre $p\ m''$, qui agissent dans le même sens, l'on aura pour l'équilibre au point φ, à 5 pieds de l'extrémité a, l'équation

$$\frac{2\ D\ (1000)^2}{(1505)^2} + 0,82\ D + 1,14\ D = 7,58\ n'\ r;$$

d'où $n'\ r = \frac{1,42}{3,79}\ D = 0,37\ D$.

Ainsi la variation à 5 pieds de l'extrémité a seroit, par cette approximation, égale à 0,37; d'où l'on concluroit que la variation moyenne entre un point pris au milieu du cylindre où cette variation est égale 0,15 D, & un point à 5 pieds de l'extrémité où elle est égale à 0,37 D, sera 0,26. Ainsi l'accroissement de la densité, depuis le milieu du cylindre jusqu'à cinq pieds de distance de l'extrémité, sera sur vingt - cinq pieds ou sur 300 r de longueur, égal à $0,26 \times 300\ D = 78\ D$. La variation depuis le point q, milieu du cylindre, jusqu'au point m'', n'est pas tout-à-fait égale à 0,15 D que nous avons trouvé pour la variation au milieu du cylindre; mais en prenant cette valeur pour une première approximation, nous aurons pour l'accroissement de la densité, depuis le point m'' jusqu'au milieu q du cylindre ou sur 360 r de longueur, la quantité 54 D qui représentera la densité au milieu du cylindre; ainsi en y joignant 68 D, accroissement de densité que nous venons de trouver depuis le milieu du cylindre jusqu'au point φ, placé à 5 pieds de l'extrémité a du cylindre, nous aurons la densité à ce point φ égale à 132 D.

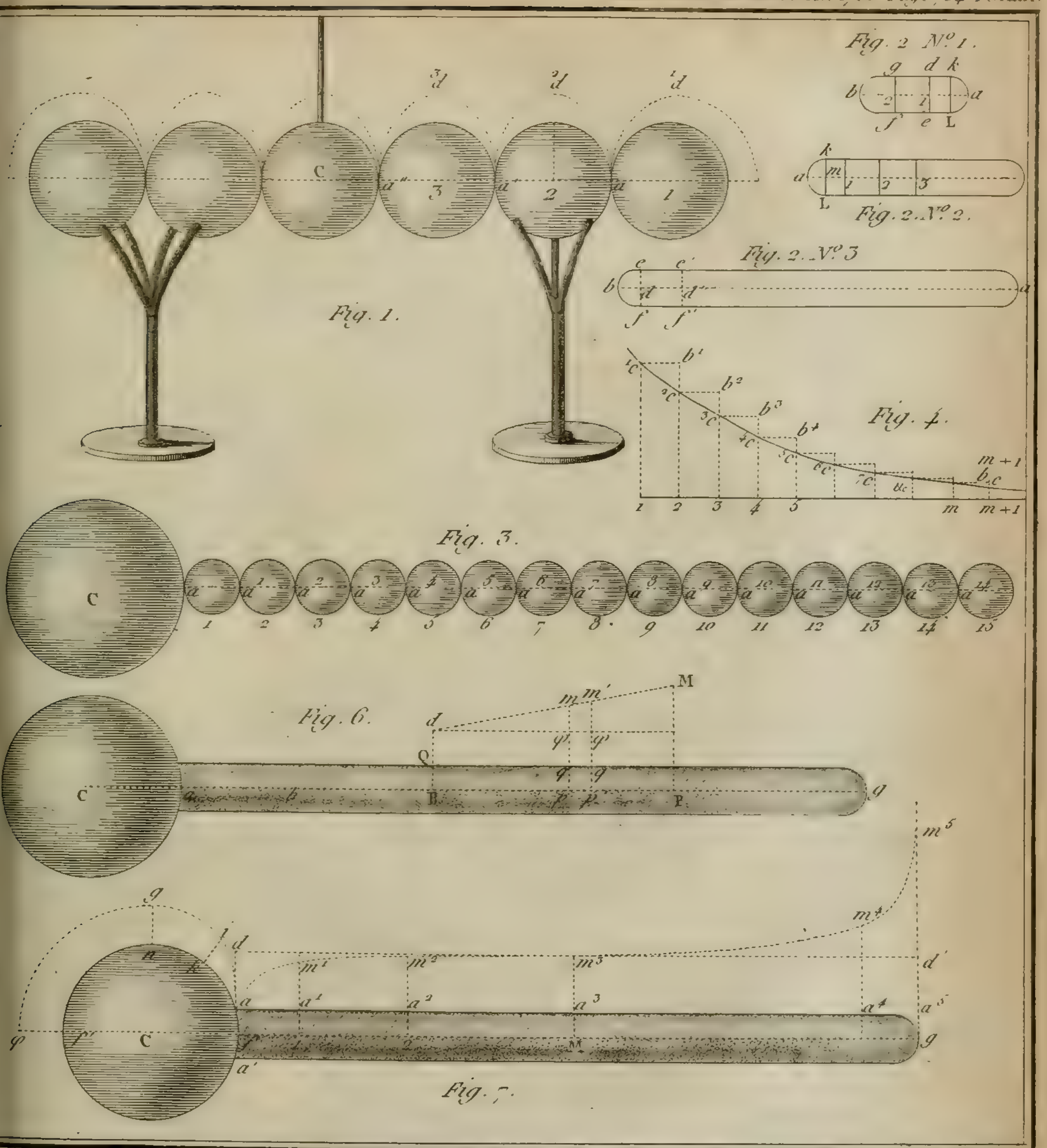
Si, en suivant la méthode qui précède, je cherchois la variation à 2 pieds ou à 24 r de distance de l'extrémité a

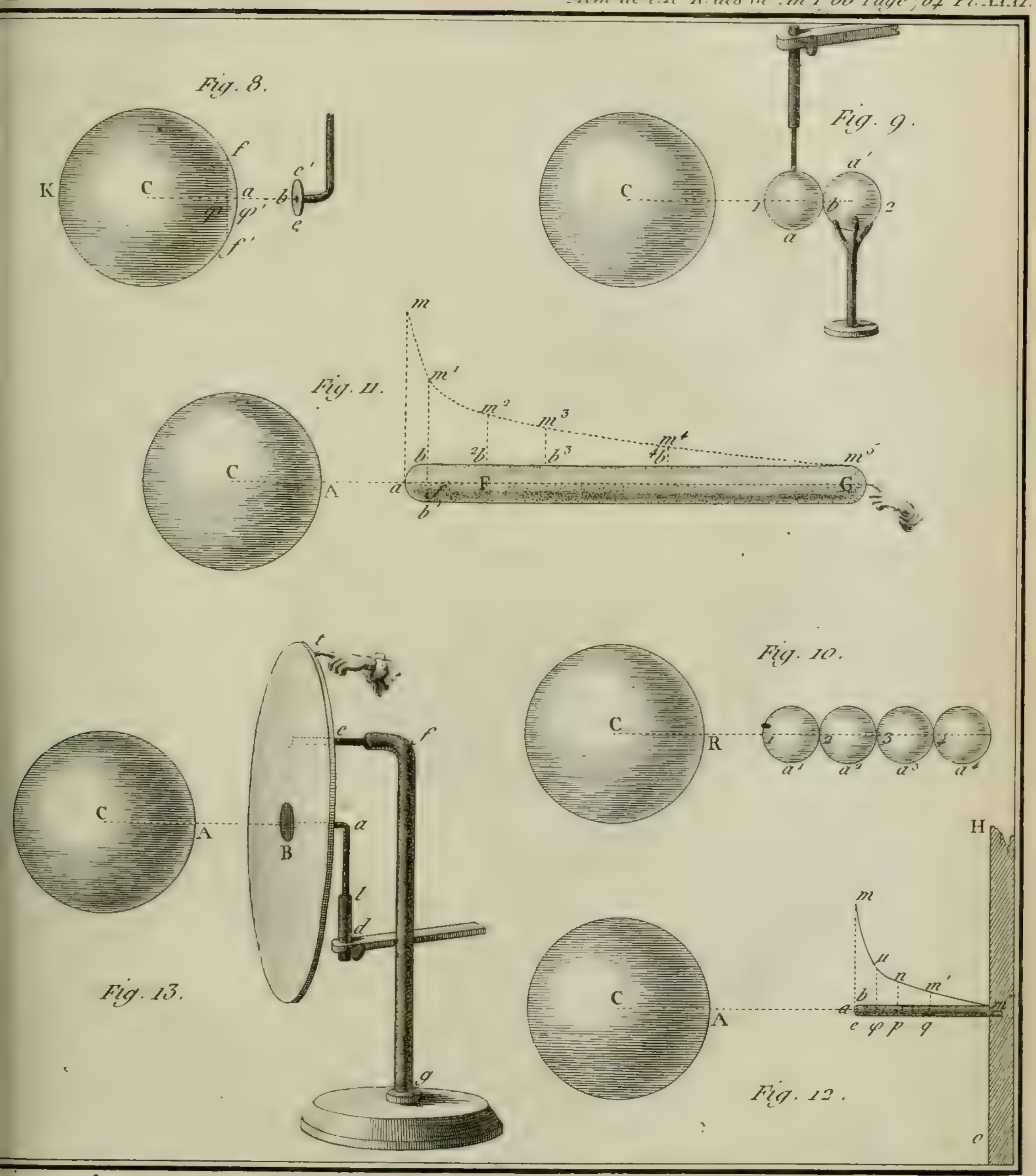
du cylindre, je la trouverois pour la longueur d'un rayon, égale à 1,07 D; je trouverois ensuite la variation, sur une longueur d'un rayon pris à 6 pouces du point a par la même méthode d'approximation, égale à 5 D, ou à cinq fois la densité du globe; & en concluant, d'après ces variations, la densité à 2 ou 3 pouces de l'extrémité a du cylindre, on la trouveroit de plus de 200 D.

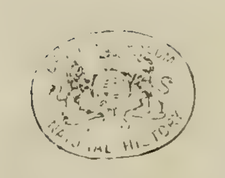
Si nous voulions à présent déterminer la densité électrique à l'extrémité a qui termine le cylindre, il seroit facile de voir, ainsi que l'expérience le prouve, que cette densité est au moins deux fois plus grande que celle du point b, qui n'en seroit éloignée que d'à peu-près une longueur égale au demi-diamètre du cylindre ou au rayon de la demi-sphère qui le termine. Pour le prouver, supposons que depuis le point b, qui répond à l'équateur de la demi-sphère jusqu'au point m'', la densité du cylindre soit uniforme & égale à δ; que la densité de la surface de la demi-sphère $a\ b$ est égale à δ'; l'on trouvera par un calcul très-facile, que l'action de la surface de la demi-spèhre $a\ b$ sur son centre e dans la direction $a\ m''$, est égale à $\frac{\delta'}{2}$; l'on trouvera que l'action de la surface du cylindre $b\ m''$ sur le point e dans la même direction, est égale à δ. Ainsi, en réunissant à cette action, celle de la sphère C' & celle de la surface $H\ o$, elles doivent faire équilibre à l'action de la demi-sphère $a\ b$, d'où résulte l'équation $\frac{\delta'}{2} = \delta + \frac{2\ D\ (1000)^2}{(1500)} + 0{,}82\ D$; & comme δ est beaucoup plus grand que D, il en résulte que δ' ou que la densité électrique sur la surface de la demi-sphère qui termine en a le cylindre, est plus que double de celle de la surface de ce même cylindre à un pouce de son extrémité. Ce résultat est conforme à ce que l'expérience nous a donné, *art. LVI.*

Les calculs de cet article, quoique très-imparfaits, sont presque suffisans pour tous les objets de pratique relatifs

à


Fig. 1.
Fig. 2 N.º 1.
Fig. 2. N.º 2.
Fig. 2. N.º 3
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 6.
Fig. 7.


Fig. 8.
K
C
f
a
b
c'
φ
φ'
e
f'
Fig. 9.
C
a'
1
b
2
a
m
m'
Fig. 11.
m²
m³
m⁴
b
²b
b³
⁴b
m⁵
C
A
a
F
G
b'
t
e
f
C
A
B
a
l
d
Fig. 13.
g
Fig. 10.
C
R
1
2
3
4
a¹
a²
a³
a⁴
H
m
μ
n
m'
C
A
a
b
c
φ
p
q
Fig. 12.
o



à l'électricité, où il pourroit être néceſſaire d'employer le calcul. Mais les valeurs données par cette première approximation, peuvent être corrigées & rapprochées de la vérité autant que l'on voudra, en regardant, ainſi que nous l'avons dit à la fin de l'*article LX*, la courbe des denſités comme un polygone, dont l'inclinaiſon des côtés ſeroit donnée relativement à l'*axe du cylindre*, par l'approximation qui précède : le calcul de l'action des différentes parties de la ſurface du cylindre ſur un point de ſon axe, ſe feroit par les méthodes expliquées à l'*art. XXXV* & *ſuiv.* & donneroit la variation au milieu d'une partie du cylindre, partie que l'on pourroit prendre plus ou moins grande, ſuivant que le point dont on voudroit déterminer la variation, ſeroit plus ou moins près de l'extrémité *a*.



DE LA JONCTION

Des Observatoires de Paris & de Greenwich, & Précis des travaux géographiques exécutés en France qui y ont donné lieu.

Par M. DE CASSINI.

Lû à la rentrée de Pâques 1787.

AUCUN siècle ne s'est occupé avec plus de lumières & de succès que celui-ci, de la perfection de la géographie; aucune nation n'a contribué plus que la nation Françoise, aux progrès de cette science. Je n'entreprendrai pas de faire le tableau des travaux immenses exécutés par des François au travers des montagnes du Pérou, sur les glaces du cercle polaire, au milieu des sables de l'Afrique. Je ne parlerai point des voyages & des essais multipliés faits sur mer, à l'occasion des diverses méthodes proposées pour la solution du problème des longitudes, & particulièrement des montres marines. Il ne sera question ici que des opérations faites dans l'intérieur de la France, & qui ont donné lieu à celles dont nous avons à rendre compte dans ce Mémoire.

Le célèbre Picard fut le premier qui, en 1669, réunissant les méthodes géométriques & astronomiques, mesura avec des soins & une précision jusqu'alors inconnus, la distance entre Malvoisine & Amiens, & nous donna la première mesure exacte du degré du méridien. Quatorze années après, J. D. Cassini entreprit de décrire d'un bout à l'autre du royaume la méridienne de l'Observatoire, en continuant du côté du midi la chaîne de triangle que Picard avoit commencée vers le nord. Il s'appuya sur la base de Villejuif, mesurée par cet académicien ; & partant de ce terme, il poussa ses opérations, dans la même année

1684, jufqu'à l'extrémité méridionale du Berry : mais ces travaux qu'il efpéroit pourfuivre l'année fuivante, furent interrompus par un événement funefte. Colbert mourut : la perte d'un miniftre protecteur des arts & des fciences, eft un coup affreux qui ne manque jamais d'arrêter ou de fufpendre leurs progrès ; ainfi, dans une grande machine, lorfqu'un des refforts principaux vient à manquer, tout mouvement eft auffitôt interrompu.

Dix-fept années s'écoulèrent avant que l'on reprît la defcription de la méridienne ; enfin, vers 1700, le Roi informé par M. le comte de Pontchartrain & M. l'abbé Bignon, des avantages à retirer de la continuation de ce travail, ordonna d'en pourfuivre l'exécution : elle fut reprife avec ardeur, & totalement achevée dans la partie méridionale du royaume en l'année 1701. Il ne reftoit plus qu'à prolonger dans un petit efpace depuis Amiens jufqu'à Dunkerque, les mefures de Picard vers le nord, afin d'avoir la méridienne tracée d'un bout à l'autre de la France, & la mefure de $8^d \frac{1}{2}$ du méridien : mais de nouveaux obftacles vinrent encore à la traverfe ; ils ne furent levés qu'en 1718, où, grâces à ce zèle & à cette perfévérance dont les fciences feules rendent les hommes capables, cette grande entreprife commencée en 1669, quittée & reprife à plufieurs fois, parvint à fon entière exécution au bout de cinquante années.

Les projets de la politique ou de l'ambition n'ont fouvent qu'une exiftence paffagère, ils meurent pour l'ordinaire avec ceux qui les ont enfantés : mais dans les entreprifes & les recherches des fciences exactes, il en eft autrement ; la vérité ne change jamais de face, fes fectateurs ne meurent point, ils fe fuccèdent ; & comme leurs principes font invariables, leurs efforts tendent conftamment au même but, & finiffent par furmonter tous les obftacles. C'eft ce qui aura toujours lieu chez une nation éclairée ; c'eft ce que nous voyons s'accomplir particulièrement dans ce moment où les entreprifes d'une véritable utilité, les établiffemens

véritablement grands, après bien des traverses & des obstacles, trouvent enfin auprès d'un ministre éclairé une protection forte qui hâte & opère leur exécution.

La description du méridien dans toute l'étendue du nord au sud de la France, en rectifiant des erreurs grossières dans la position d'un grand nombre de villes, en établissant une base exacte & des points invariables, venoit de procurer les connoissances géographiques les plus précieuses. On sentit dès-lors plus que jamais les grands avantages que la géographie pouvoit retirer des travaux ainsi réunis de la géométrie & de l'astronomie. Encouragé par les premiers succès, on osa former le vaste projet de tracer pareillement de distance en distance, dans toute la France, des méridiens & des parallèles qui, liés entr'eux, compléteroient la description géométrique de tout le royaume. Familiarisé avec les obstacles qu'on avoit appris à vaincre dans les premières opérations, on ne fut point effrayé du temps considérable que demandoit l'exécution d'une pareille entreprise, des fatigues & des difficultés nouvelles qu'on alloit éprouver dans la liaison & le raccordement des parties d'un si grand ensemble. Louis XV voulut bien lui-même applaudir à ce projet & en ordonner l'exécution. M. Orry, pour lors contrôleur général, le seconda; dès-lors tout devint possible : les travaux furent commencés en 1733, & poursuivis sans interruption pendant onze années consécutives, au bout desquelles on parvint à couvrir toute la superficie de la France d'une chaîne d'environ deux mille triangles. On fit plus; on embrassa dans ce travail une nouvelle description de cette fameuse méridienne dont nous avons parlé plus haut, & qui avoit déjà coûté tant de temps & tant de peines. Elle fut recommencée en 1739 par MM. l'abbé de la Caille & Cassini de Thury, & ce fut alors que l'on reconnut l'erreur qui s'étoit glissée dans les premières mesures, résultant de la trop grande confiance que l'on avoit eue dans la base de Picard, trop longue de six toises. Cette petite rectification eut de bien grandes conséquences,

puiſqu'elle changea totalement la figure de la terre dont la forme avoit paru alongée par le réſultat des anciennes opérations, & qui fut reconnue aplatie par celui des nouvelles, conformément aux principes de Newton, & d'accord avec les meſures faites au Pérou & au cercle polaire.

Un autre fruit de cette deſcription géométrique de la France, dont le tableau a été publié en 1744, fut l'exécution de la carte générale du royaume, en cent quatre-vingt feuilles; cet ouvrage immenſe dans ſon enſemble & les détails, commencé depuis quarante ans, doit être terminé à la fin de cette année, à la gravure près de quelques feuilles, dont on n'attendra pas long-temps la publication.

Tel eſt le précis des travaux géographiques entrepris dans l'intérieur de la France, pendant l'intervalle d'un ſiècle entier, ſous les auſpices de trois règnes conſécutifs, dirigés par les lumières de l'Académie royale des ſciences, & exécutés par pluſieurs de ſes membres. Une auſſi longue expérience, d'accord avec la théorie, avoit démontré l'avantage des opérations trigonométriques ſur les obſervations aſtronomiques, pour la détermination exacte de la poſition reſpective des lieux qui ne ſont éloignés que de quelques degrés. En effet, les meſures géométriques ſont à peine ſuſceptibles de ſe tromper d'une toiſe ſur quatorze mille de diſtance, tandis que dans les obſervations céleſtes qui fixent la latitude d'un lieu, on ne peut garantir une erreur de 5″ qui répond à quatre-vingts toiſes; & dans les obſervations de longitude, cette erreur peut être ſix & ſept fois plus grande.

Cette conſidération devoit naturellement faire déſirer de recourir à la méthode trigonométrique, pour lever les petites incertitudes qui reſtoient encore ſur la différence de longitude & de latitude entre les deux plus célèbres obſervatoires de l'Europe, celui de Greenwich & celui de Paris. M. Caſſini de Thury eut la confiance de s'adreſſer directement à Sa Majeſté Britannique, & de lui propoſer, en 1783,

cette vérification importante pour l'astronomie. Un projet utile, une opération qui tendoit à la perfection de la géographie intérieure de l'Angleterre, peu avancée jusqu'à ce jour, ne pouvoit manquer d'être accueillie par un souverain, amateur éclairé des sciences, protecteur des grandes découvertes & des entreprises glorieuses à la nation qu'il gouverne. Des ordres furent aussitôt donnés pour préparer la jonction de Londres & de Paris, par une suite de triangles qui s'étendant vers l'est jusqu'à Douvres, & traversant la mer pour se lier à la chaîne que mon pere avoit établie depuis la côte de France jusqu'à la méridienne, fixeroit invariablement les positions respectives des deux capitales, des deux observatoires & des deux côtes de l'un & de l'autre royaume.

Un ancien militaire, membre de la Société royale, dont les talens avoient déjà été éprouvés & reconnus dans ce genre de travail, le général major Roy, fut chargé de cette opération, & le célèbre Ramsden, de la construction des instrumens nécessaires. Si l'Angleterre jusqu'alors avoit pris peu de part aux grands travaux de la mesure de la terre, elle se distingua dans cette occasion particulière. Aidée des lumières & de l'expérience du siècle passé, secondée par les talens du plus grand artiste de l'Europe, elle s'appliqua à perfectionner toutes les parties de l'exécution d'une pareille opération : une base fut mesurée près de Londres avec des soins, un scrupule & des moyens tout nouveaux. Ce ne fut plus avec des perches de bois, ni des règles de fer, employées jusqu'alors ; on y substitua de longs tubes de verre, dont l'assemblage, les ajustages & toutes les parties répondoient à cette précision rigoureuse que l'on avoit à cœur d'atteindre. Un grand théodolyte, instrument inventé par M. Ramsden, d'une construction très-ingénieuse & d'une exécution non moins parfaite, fut destiné & employé à la mesure des angles. Enfin, pour éviter dans la partie de l'observation de ces angles, jusqu'aux petites erreurs qui peuvent résulter de l'aspect variable des objets terrestres en

plein jour, on diſpoſa pour ſignaux des réverbères & de nouveaux feux indiens, dont la lumière éclatante s'apercevant à une diſtance conſidérable, procuroit des points de mire invariables.

Tels furent les préparatifs & les moyens employés à la meſure de la diſtance de Londres à Douvres. Quant à la jonction de Douvres & de la côte d'Angleterre avec la nôtre, la Cour Britannique ayant déſiré qu'elle ſe fît par une coopération mutuelle de ſavans des deux nations, j'eus l'honneur d'être choiſi conjointement avec MM. Mechain & le Gendre, membres de cette Académie, pour concourir avec M. le général Roy à cette opération. On doit juger combien nous fûmes jaloux d'apporter dans la jonction, une préciſion équivalente à celle que l'on avoit miſe dans la première partie de l'ouvrage. Nous nous propoſâmes d'abord de ne point nous en tenir à la ſimple liaiſon des derniers triangles formés ſur les deux côtes, mais de reprendre l'ancienne chaîne, & de remonter par de nouvelles meſures juſqu'à la méridienne. Nous ignorions quel devoit être l'inſtrument employé par les ſavans Anglois à la meſure des angles, & dont il étoit eſſentiel que la préciſion répondît à l'exactitude de la meſure ſcrupuleuſe de la baſe. Nous ſavions ſeulement que cet inſtrument devoit être d'un aſſez grand rayon, & d'une grande perfection dans la diviſion, digne enfin de l'artiſte qui l'avoit exécuté, des ſoins & du temps conſidérable qu'il avoit mis à le conſtruire. Nous n'avions pas eu à beaucoup près le même temps pour nous préparer à notre opération; malgré cela, nous oſames nous flatter d'avoir de notre côté un inſtrument qui, pour la préciſion des réſultats, ne le céderoit pas à l'inſtrument Anglois: le ſieur Lenoir, dont les talens ſont parfaitement connus, fut chargé de conſtruire un cercle entier d'un pied de diamètre, ſuivant les principes de M. le chevalier de Borda, & dans le genre des cercles dont cet Académicien a introduit depuis pluſieurs années l'uſage dans la marine. La théorie nous indiquoit la poſſibilité d'obtenir avec

cet inſtrument la meſure des angles à la ſeconde, & la pratique nous a prouvé depuis qu'il y a peu de choſes à rabattre, de cette préciſion, que l'on eſt d'abord tenté de regarder comme imaginaire. En effet, on apprendra ſans doute avec ſurpriſe que, malgré les circonſtances défavorables de la ſaiſon la plus fâcheuſe, nous ſommes parvenus à des meſures tellement exactes, que l'erreur commune ſur les trois angles de chaque triangle, n'a été que de 1″ $\frac{1}{2}$, & la plus forte n'a pas paſſé 4″ $\frac{1}{2}$. Or, avec les anciens inſtrumens, ceux même de deux & trois pieds de rayon, on étoit ſatisfait de fermer chaque triangle à vingt & trente ſecondes près. Nous ne doutons pas que l'inſtrument du général Roy n'ait donné des réſultats auſſi ſatisfaiſans que le nôtre, d'autant que l'avantage de ne pointer que ſur des ſignaux de feux, a dû lui ſauver des erreurs dont nous n'avons pu nous garantir de notre côté, en viſant de jour ſur des objets différemment éclairés & inégalement diſtincts.

C'eſt le 23 ſeptembre de la préſente année que nous nous réunîmes à Douvres avec le général Roy & le docteur Blagden ſon adjoint, nommé par la Société royale pour aſſiſter aux opérations de la jonction. La ſaiſon avancée nous preſſoit de commencer: dès la première entrevue nous arrêtâmes notre plan de campagne. MM. les commiſſaires Anglois avoient apporté avec eux les nouveaux feux & les réverbères dont ils avoient coutume de ſe ſervir pour ſignaux; ils nous en donnèrent la quantité néceſſaire à allumer dans les divers endroits de la côte de France, que nous jugeâmes les plus favorables. Le docteur Blagden repaſſa la mer avec nous, & nous vînmes prendre nos différentes ſtations pour les ſignaux que le général Roy, reſté ſur la côte d'Angleterre, devoit obſerver de Douvres & de divers autres endroits. M. Mechain ſe chargea d'allumer les feux ſur le mont Lambert près Boulogne, M. Blagden ſur le clocher de Calais, M. le Gendre ſur la tour de Dunkerque, & moi ſur le cap Blancnez. Dans l'intervalle de dix-ſept jours que durèrent ces ſignaux donnés & rendus à diffé-

rentes

rentes heures convenues d'avance, il régna des temps épouvantables, & cependant presque tous nos feux furent observés par le général Roy : la plupart des siens nous furent aussi visibles; & ce que l'on aura peine à croire, nous avons aperçu un de ses réverbères à 40 milles de distance, malgré l'interposition des vapeurs de la mer qui nous séparoit. Nous n'avions osé nous flatter d'un succès aussi complet. Cette opération finie, M. Blagden repassa en Angleterre. Le général Roy qui avoit interrompu la chaîne des triangles qu'il conduisoit de Londres vers Douvres, s'occupa d'aller la rejoindre. De notre côté nous nous rendîmes à Dunkerque, & partant d'un des côtés de la méridienne, nous redescendîmes jusqu'aux triangles de jonction que nous venions de jeter d'une côte à l'autre : cette opération fut l'affaire de près d'un mois. Les pluies & les ouragans presque continuels nous firent craindre plus d'une fois d'être obligés de l'abandonner; mais en dépit de tous les obstacles, nous eûmes la satisfaction d'avoir terminé le 12 novembre, toutes les mesures que nous avions à prendre du côté de la France. Une seule chose nous restoit à désirer; c'étoit de pouvoir mesurer à Douvres, sur la côte d'Angleterre, un des mêmes angles observés avec le théodolite Anglois, & de nous procurer par-là une comparaison curieuse des deux instrumens. MM. Roy & Blagden ne le souhaitoient pas moins que nous : ils nous procurèrent à cet effet toutes les facilités & les commodités désirables ; mais nous l'essayâmes en vain dans deux voyages que nous fîmes à Douvres en allant à Londres, & en revenant en France. L'interposition des vapeurs de la mer & le mauvais temps ne nous permirent jamais d'apercevoir assez distinctement la côte de Calais. On sait combien la saison fut affreuse : elle étoit d'ailleurs trop avancée. MM. les commissaires Anglois, moins heureux que nous, avoient même été obligés d'interrompre leurs opérations, & ne purent relier les deux bouts de la chaîne de triangles.

Nous nous trouvons donc dans l'impossibilité de satisfaire aujourd'hui la curiosité du public sur le résultat définitif de

cette entreprise, c'est-à-dire, sur la différence précise des longitudes entre Paris & Londres. Nous ne la saurons que lorsque le général Roy, qui n'attend que le retour de la belle saison, pour reprendre ses observations, aura entièrement formé la suite de triangles de Londres à Douvres, & l'aura jointe, par nos communes mesures sur la côte, à celles que nous avons fait remonter jusqu'à la méridienne, ce qui lui donnera la distance précise de Greenwich au méridien de l'observatoire royal de Paris. Mais en attendant, nous avons cru devoir rendre compte au public d'une entreprise qui, quant à la partie qui nous concernoit, est entièrement achevée, & dont un des principaux résultats, que l'on me permettra sans doute d'annoncer avec quelque satisfaction, est l'exactitude de la position de Douvres, déterminée anciennement par mon père, & qu'après une vérification scrupuleuse, avec le secours d'un instrument plus précis que tous ceux qu'on avoit employés avant nous, nous avons trouvée absolument la même.

Nous aurions de la peine à terminer ce Mémoire sans dire un mot du voyage que nous avons fait en Angleterre. M. le baron de Breteuil, dont les vues tendent toujours à l'utilité générale, & saisissent tout ce qui peut contribuer aux progrès des sciences, nous avoit chargés de visiter les principaux observatoires de Londres & des environs, d'observer ce qu'ils nous présenteroient de nouveau & d'instructif dans la partie des instrumens. Nous nous rendîmes à Londres aussitôt après nos opérations : la vérité & la reconnoissance ne nous permettent point de passer sous silence l'accueil que nous avons reçu chez une nation où les arts & les sciences sont aussi honorés que cultivés, & qui, juste appréciatrice des talens, est dans ce genre plutôt notre émule que notre rivale. Accueillis de toute part, prévenus par les principaux membres de la Société royale & par son digne président, nous avions à peine énoncé les objets de notre curiosité, que nos désirs étoient satisfaits. On se doute bien qu'une de nos premières visites, je

pourrois dire le premier lieu de notre pélerinage, fut l'obſervatoire de Greenwich. Sa modeſte apparence à l'extérieur, ne fait que relever davantage la richeſſe intérieure des grands & nombreux inſtrumens dont il eſt orné; & ce mérite eſt bien le plus réel. A quelque diſtance de Greenwich eſt l'obſervatoire de M. Aubert, recommandable par le choix & la quantité d'inſtrumens de tout genre, mais moins grands que ceux de Greenwich. Nous paſſâmes enſuite à Oxford où ſe trouvent, comme à Greenwich, deux ſuperbes muraux du même rayon, & nombre d'autres excellens inſtrumens. L'obſervatoire d'Oxford a ſur les autres l'avantage d'une belle diſtribution intérieure & extérieure; le bâtiment tout neuf n'eſt pas même encore entièrement fini. Mais, nous l'avouerons, aucun de ces obſervatoires ne nous intéreſſa autant que celui de Bleinheim. Nous avions vu partout des inſtrumens dont la grandeur & la conſtruction nous étoient parfaitement connues: on en poſſède de pareils en France; mais à Bleinheim tout fut nouveau pour nous, tout excita notre curioſité. Il n'y a cependant que deux inſtrumens, mais ce ſont deux chef-d'œuvres de M. Ramſden, & c'eſt tout dire. Dans la lunette méridienne qui a ſix pieds de foyer & quatre pouces d'ouverture, nous admirâmes entr'autres cette manière ingénieuſe & nouvelle d'éclairer les fils de la lunette par l'axe, & de former toutes les dégradations & teintes de lumières que l'obſervateur peut déſirer. C'eſt par le moyen d'une couliſſe qui, portant des verres plans plus ou moins polis, ou différemment colorés, les préſente en ſe hauſſant ou ſe baiſſant au rayon de lumière qu'une lampe envoie dans l'axe conique de la lunette, d'où ils ſont réfléchis ſur l'oculaire par le moyen d'un miroir incliné. Dans le quart de cercle de ſix pieds, que nous nommerons improprement mural, nous ne pûmes voir ſans étonnement la hardieſſe & l'habileté de l'artiſte qui a ſuſpendu l'inſtrument ſur une eſpèce de chaſſis ou dé formé de quatre colonnes de cuivre, & mobile ſur deux pivots, l'un ſupérieur, l'autre inférieur; de ſorte que cet inſtrument fait la fonction de cercle mobile & de cercle

mural, ſe tourne avec une facilité extrême du côté du nord & du ſud, conformément à l'idée qu'avoit propoſée le premier M. le Monnier, de cette Académie, & qu'il a même depuis long-temps miſe en exécution, mais d'une autre manière, en fixant ſon mural contre un mur tournant ſur un boulet. Il ſeroit trop long de décrire ici tous les détails ingénieux de la conſtruction du mural mobile où le célèbre Ramſden nous a paru avoir, du côté de l'invention & de l'exécution, ſurpaſſé tout ce qui a été fait avant lui. Nous nous hâtons de parler de l'obſervatoire & de l'obſervateur de Slough, ſi célèbres depuis quelques années. M. Herſchel ne fut pas plutôt informé de notre arrivée à Londres, qu'il partit de chez lui, vint nous trouver & nous prendre pour nous conduire à Slough : c'étoit ſur le chemin d'Oxford & de Bleinheim ; cette poſition favorable nous procura l'avantage de faire deux viſites à M. Herſchel, & de profiter de cette complaiſance & de cette honnêteté qui forment le caractère propre de ce grand obſervateur.

Son téleſcope de quarante pieds de longueur & quatre pieds d'ouverture, étoit monté, mais point encore en état d'obſerver. Nous fûmes frappés de la ſimplicité & de la légèreté de ſa monture ; c'eſt la même, mais en plus grand, que celle du téleſcope de vingt pieds, dont les mouvemens ſont d'une facilité extrême. Rien n'eſt plus ſimple & plus ingénieux que les moyens employés par M. Herſchel pour diriger ſon téleſcope, pour lui faire parcourir telle ou telle partie du ciel par un mouvement tellement combiné qu'aucun objet ne lui échappe, & que le même aſtre traverſe trois fois le champ, pour ſe reconnoître au milieu de ce torrent d'étoiles qui paſſe à la fois dans l'ouverture, pour démêler celles qui méritent attention, en déterminer la poſition, & pouvoir la retrouver au beſoin. Les bornes qui nous ſont ici preſcrites, ne nous permettent pas des deſcriptions qui d'ailleurs ſeroient peu faciles à ſaiſir ſans l'aide d'une figure. Nous dirons ſeulement que dans les différentes nuits que nous paſſâmes à Sloug, le temps peu favorable ou la préſence de la lune nous empêcha d'obſerver la nou-

velle planette & ſes ſatellites : les vapeurs de l'horizon ne nous permirent de voir Saturne qu'un inſtant ; mais nous obſervâmes très-bien dans le téleſcope de vingt pieds, dont l'oculaire eſt placé au bout du tuyau, Jupiter, une des étoiles doubles, une nébuleuſe réſolue en étoile, une nébuleuſe planétaire.

M. Herſchel n'employa jamais un groſſiſſement plus fort que 157 fois, avec lequel Jupiter ne nous parut pas auſſi parfaitement terminé qu'on auroit pu le déſirer : la conſtitution de l'air y contribuoit peut-être ; mais ce que nous vîmes avec le plus de ſatisfaction, c'eſt la nébuleuſe du petit cheval, où nous diſtinguâmes parfaitement ſur un fond clair une quantité de petits points lumineux ; c'eſt la nébuleuſe planétaire de la main d'Andromède, dont la rondeur parfaite du diſque, la pâleur & l'égalité de lumière offrent l'aſpect d'une planette telle que Jupiter, qui ſeroit vue au travers d'un verre coloré qui lui ôteroit toute la vivacité de ſa lumière. Nous obſervâmes auſſi avec pluſieurs autres téleſcopes de ſept & de dix pieds, auxquels M. Herſchel n'appliquoit que des groſſiſſemens ordinaires d'environ quatre cents fois : nous lui parlâmes de ces apparences qu'il a obſervées anciennement ſur le diſque de la lune, & déſignées ſous le nom de *volcans*, & nous reconnûmes que l'on nous avoit mal indiqué leur poſition dans une figure qui nous avoit été envoyée d'Angleterre lors de la première découverte. Cette erreur nous avoit fait à tort révoquer en doute une obſervation de M. de Villeneuve, élève de l'Obſervatoire, qui, le 22 mai 1787, avoit cru apercevoir quelque choſe de lumineux à un endroit qui ſe trouve effectivement être la place d'un des volcans de M. Herſchel. La même apparence vient encore d'être aperçue le 13 de ce mois à l'Obſervatoire royal par M. l'abbé Nouet ; mais il faut, ce me ſemble, que ce phénomène, qui ne paroît qu'inſtantanément, ait été obſervé long-temps & revu pluſieurs fois, pour oſer prononcer ſur ſa nature. Raſſembler des faits avant de chercher les explications & les cauſes, c'eſt la conduite d'un eſprit ſage, qui aime mieux ſe mettre en état de conclure que de ſe piquer de deviner.

ÉCLIPSES
DES SATELLITES DE JUPITER,
Et autres Observations faites à Perivaldo, par M. Maraldi.

Par M. DE CASSINI.

LE grand âge & les infirmités de M. Maraldi, membre de cette Académie, ne lui permettant plus de faire les observations astronomiques qu'il avoit toujours continué de suivre à Perinaldo depuis son départ de France, M. son neveu, Jacques-Philippe Maraldi, s'est fait depuis quelques années un devoir de suppléer M. son oncle, & m'a adressé les observations suivantes des Satellites de Jupiter, depuis le 2 janvier 1787, jusqu'au 8 mai 1788. Il y a joint l'observation de la dernière éclipse de soleil du 4 juin, dont il n'a vu que le commencement.

Les observations ont été faites avec une lunette acromatique de trois pieds, de M. de l'Etang.

1787.	H. M. S.		
	Temps vrai.		
Janvier 1.	4.44. 8 f.	Émerf. I.	Beau temps : les bandes font diftinctes.
2.	6. 7.46 f.	Imm. III.	Beau temps : les bandes font diftinctes.
	7.47.41 f.	Émerfion	*Idem.*
3.	8.51.16 f.	Émer. II.	Beau temps.
7.	0. 7.25 m.	Émerf. I.	Beau temps : les bandes font diftinctes.
9.	10. 5. 2 f.	Imm. III.	Beau temps : les bandes font diftinctes.
	11.46.56 f.	Émerfion	*Idem.*
Mars 10.	7.25.10 f.	Émerf. I.	Beau temps : les bandes font diftinctes

1787.	H. M. S.		
	Temps vrai.		
Août 16.	4. 0.26 m.	Imm. I.	Beau temps.
20.	2.26.27 m.	Imm. III.	Beau temps : les bandes ſont diſtinctes.
	4.41.50 m.	Émerſion	Il fait grand jour, de ſorte qu'on ne voit plus que Jupiter ſeul.
Sept. 1.	2.21. 4 m.	Imm. I	Beau temps : les bandes ſont diſtinctes.
8.	4.17. 4 m.	Imm. I.	*idem.*
13.	2.34.10 m.	Imm. II.	Beau temps, bandes bien diſtinct.
20.	5.10.41 m.	Imm. II.	Les bandes ne ſont point diſtinct. il fait jour.
24.	2.37.41 m.	Imm. I.	Beau temps : les bandes ſont diſtinctes.
Octob. 7.	11.48. 6 ſ.	Imm. II.	On ne diſtingue pas les bandes; l'objectif eſt humide.
17.	2.53. 7 m.	Imm. I.	Beau temps : les bandes ſont diſtinctes.
22.	5. 2.58 m.	Imm. II.	Beau temps : les bandes ſont diſtinctes.
Nov. 1.	8.57.57 ſ.	Imm. II.	On ne diſtingue pas les bandes.
16.	2.10.18 m.	Imm. II.	Beau temps : les bandes ſont diſtinctes.
26.	7.45.39 ſ.	Imm. I.	Beau temps : les bandes ſont diſtinctes.
Déc. 3.	8.37.23 ſ.	Imm. II.	Ciel chargé de vapeurs; on ne diſtingue pas les bandes.
	9.35.59 ſ.	Imm. I.	Beau temps : les bandes ſont bien diſtinctes.

1788.	H. M. S.		
	Temps vrai.		
Janv. 11.	9.56.51 f.	Émer. I.	Beau temps: les bandes font bien diſtinctes; le vent agite la lunette.
12.	1.28.49 m.	Émer. II.	Beau temps: les bandes font bien diſtinctes.
20.	6.17.50 f.	Émer. I.	Beau temps: les bandes font diſtinctes; le vent agite la lunette.
24.	5.57.19 f.	Imm. III.	Beau temps: les bandes font diſtinctes.
	8.59.30 f.	Émerſion	*Idem.*
29.	7.59.27 f.	Émer. II.	Beau temps: bandes bien diſtinct.
Fév. 13.	1.14.42 m.	Émer. II.	Beau temps: les bandes font diſtinctes.
26.	10.21.40 f.	Émer. I.	Ciel chargé de vapeurs: on ne diſtingue pas les bandes.
Mars 2.	7.55.16 f.	Imm. IV.	Les bandes font diſtinctes; l'objectif étoit humide.
	9.38.18 f.	Émer. IV.	Ciel chargé de vapeurs: on ne diſtingue pas les bandes.
7.	8.43.24 f.	Émer. III.	Beau temps: les bandes font diſtinctes.
13.	8.44. 7 f.	Émer. I.	Beau temps: les bandes font bien diſtinctes.
20.	10.42.52 f.	Émer. I.	Le ciel chargé de vapeurs: on ne diſtingue pas les bandes.
29.	7. 9.25 f.	Émer. I.	On ne diſtingue point les bandes.
Avril 2.	7.47.42 f.	Émer. II.	On ne diſtingue pas les bandes; le vent agite très-fort la lunette.
9.	10.26.19 f.	Émer. II.	Beau temps: les bandes font bien diſtinctes.
19.	9. 8.55 f.	Émer. III.	Beau temps: les bandes font bien diſtinctes.
Mai 8.	8.19. 4 f.	Imm. IV.	Beau temps: les bandes font diſtinctes.

Obſervation

Observation de l'Eclipse de Soleil du 4 Juin 1788.

1788.	*H. M. S.* Temps vrai.	
Juin 4.	7. 37. 50. m.	Commencement de l'éclipse du ☉.
	7. 46. 44.	Commencement de l'immersion d'une tache.
	7. 47. 43.	Immersion totale de la tache.
	8. 14. 56.	Commencement de l'immersion de la tache ronde.
	8. 19. 3.	Immersion totale de la tache ronde.
		A 9^h 30′ le Soleil s'est couvert, & il ne s'est découvert qu'à 9^h 42′ 25″, & l'éclipse étoit finie.



ESSAI

Sur l'uniformité des Mesures, tant linéaires que de capacité & de poids ;

Et sur une nouvelle manière de construire les toises destinées à servir d'étalon.

Par M. BRISSON.

Lu le 14 avril 1790.

M. l'évêque d'Autun a proposé à l'Assemblée Nationale de rendre uniformes dans tout le royaume les poids & les mesures. Cette idée qui s'est présentée depuis long-temps à plusieurs savans, a été goûtée par de grands administrateurs : ils ont senti, avec raison, combien cette uniformité seroit utile au commerce. J'ai fait là-dessus quelques réflexions qui me l'ont fait juger facile à établir. J'ai l'honneur de les soumettre au jugement de l'Académie.

Je ne connois dans la nature, de longueur constante que celle du pendule pour un lieu déterminé: je ne connois de poids invariable, pour un volume déterminé & une température donnée, que celui de l'or à 24 karats ou de l'argent à 12 deniers, ou de l'eau distillée. Ce sont donc cette longueur constante & ce poids invariable qui doivent servir de base à l'établissement de l'uniformité des mesures, tant linéaires que de capacité & de poids.

Comme la longueur du pendule varie suivant les différentes latitudes, il est nécessaire de faire usage de celle d'une latitude déterminée ; mais il me paroît égal de choisir l'une ou l'autre, pourvu qu'elle soit bien connue. On a proposé de choisir pour mesure élémentaire, la longueur du pendule qui bat les secondes à 45 degrés de latitude : mais cette longueur n'a été que calculée; il faudroit la connoître par l'expérience, ce qui exigeroit un travail long & penible. Si l'on préféroit la longueur du pendule prise à la latitude

de 45 degrés, ce ſeroit ſans doute parce que ce point eſt le terme moyen entre l'équateur & le pôle, & que l'on croiroit avoir par-là une longueur moyenne entre celle du pendule qui bat les ſecondes à l'équateur & celle du pendule qui les battroit au pôle : mais on n'auroit point cette longueur moyenne; car la longueur du pendule, qui paroît devoir être proportionnelle à la latitude, ne l'eſt probablement pas dans le fait; c'eſt-à-dire, que cette longueur, exactement meſurée à une latitude quelconque, ne ſe trouvera pas proportionnelle à cette latitude : il faudroit, pour qu'elle ſe trouvât telle, que l'aplatiſſement de la terre eût donné à ſa ſurface une courbure régulière, ce qui n'eſt probablement pas. Pourquoi ne prendroit-on pas pour meſure élémentaire la longueur du pendule qui bat les ſecondes à Paris? celle-ci eſt bien connue; elle a été déterminée par des expériences rigoureuſes, faites par M. de Mairan *(Mém. de l'Acad. des Sc. an. 1735, pag. 153)*, & elle ne diffère que très-peu de celle du pendule à 45 degrés. Ce choix épargneroit beaucoup de temps, de travail & de dépenſes.

Suppoſons donc qu'on choiſiſſe pour meſure élémentaire, la longueur du pendule qui bat les ſecondes à Paris : cette longueur eſt de 3 pieds 0 pouce 8 $\frac{17}{30}$ lignes. Ce ſera d'après elle qu'on déterminera toutes les meſures linéaires : on comptera cette longueur totale pour 3 pieds ſeulement. La toiſe nouvelle aura une longueur double, c'eſt-à-dire, qu'elle aura 6 pieds 1 pouce 5 $\frac{2}{15}$ lignes de la meſure actuelle, qui ne ſeront comptés que pour 6 pieds. Chaque pied aura donc 1 pied 0 pouce 2 [illegible] lignes, & chaque pouce aura 1 pouce $\frac{257}{1080}$ de ligne de la meſure actuelle, auquel cas les toiſe, pied & pouce nouveaux ſeront aux toiſe, pied & pouce actuels, à très-peu de choſe près, comme 51 à 50.

Pour laiſſer à l'aune une longueur peu différente de celle de Paris, on pourra lui donner 3 pieds 6 pouces, pris ſur la nouvelle toiſe; ce qui vaudra de la meſure actuelle, 3 pieds 6 pouces 9 $\frac{\text{[illegible]}}{180}$ lignes; de ſorte que l'aune nouvelle ne

différera de l'aune uſitée que d'environ 1 pouce, dont elle ſera plus courte.

Le degré du méridien, meſuré à Paris avec la nouvelle toiſe, au lieu de 57070 toiſes, n'aura que 55960 toiſes 2 pieds 11 pouces 10 lignes. Cela n'empêche pas que ces deux longueurs ne ſoient la même, mais différemment exprimée, à cauſe des différences des meſures élémentaires.

Pour ne rien déranger aux calculs aſtronomiques, qui tous ſont faits dans la ſuppoſition de 25 lieues au degré, je penſe qu'il convient de continuer à diviſer le degré en 25 lieues, dont chacune, meſurée avec la nouvelle toiſe, ſera de 2238 toiſes 2 pieds 6 pouces $2\frac{4}{5}$ lignes; au lieu que cette même lieue, meſurée avec la toiſe actuelle, eſt de 2282 toiſes 4 pieds 9 pouces $7\frac{1}{5}$ lignes.

Le mille ſera compoſé de 1000 toiſes nouvelles, qui, comparées aux toiſes actuelles, équivaudront à 1019 toiſes 4 pieds 11 pouces $9\frac{1}{3}$ lignes. En conſéquence le nouveau mille ſera au mille actuel, à très-peu de choſe près, comme 51 à 50, dans le même rapport que la toiſe nouvelle à la toiſe actuelle.

Toutes les autres meſures linéaires ſeront, comme celles-ci, dérivées de la longueur conſtante du pendule qui bat les ſecondes à Paris.

Quant aux meſures de poids, j'ai dit ci-deſſus que je ne connoiſſois que trois ſubſtances qui pouvoient en donner une invariable, ſavoir l'or, l'argent & l'eau; mais comme il pourroit ſouvent être aſſez difficile de ſe procurer l'or & l'argent dans un état de pureté parfaite, ce qui ſeroit cependant néceſſaire pour l'invariabilité du poids, je penſe qu'on doit préférer l'eau diſtillée, qui eſt toujours la même; c'eſt donc de ſon poids dont je vais faire uſage.

Les meſures de capacité doivent toutes dériver du pied cube, meſuré ſur la nouvelle toiſe. La nouvelle toiſe étant plus grande que la toiſe actuelle, le nouveau pied cube ſera auſſi plus grand que le pied cube actuel. Ce dernier, d'eau diſtillée, pèſe 70 livres: le nouveau pèſera 74 livres 3 onces 7 gros 48 grains, poids de marc; de ſorte que le premier

ſera au dernier, à très-peu de choſe près, comme 33 à 35.

Je voudrois enſuite que la livre, la pinte, le ſetier, le boiſſeau, &c. fuſſent tous des parties aliquotes ou des multiples du pied cube. J'énonce donc le poids du nouveau pied cube d'eau par 64 livres. La livre d'eau ſera donc $\frac{1}{64}$ de ce pied cube, ou 27 pouces cubes, qui ſont le cube de 3 pouces; & la livre de toute autre ſubſtance ſera $\frac{1}{64}$ du poids du pied cube d'eau. Cette livre ſera à notre livre, poids de marc, à très-peu de choſe près, comme 29 à 25; car elle pèſera 1 livre 2 onces 4 gros 35 $\frac{5}{8}$ grains, poids de marc.

La pinte ſera d'une capacité double, c'eſt-à-dire, $\frac{1}{32}$ du pied cube, ou 54 pouces cubes. Cette pinte d'eau pèſeroit 2 livres 5 onces 0 gros 71 $\frac{1}{4}$ grains, poids de marc, qui ne vaudront que deux livres ſuivant la nouvelle meſure; & cette pinte ſera à la pinte de Paris, à très-peu de choſe près, comme 6 à 5.

Le ſetier de liqueur ſera $\frac{1}{4}$ de pied cube ou 8 pintes.

Le muid de liqueur ſera 36 ſetiers ou 9 pieds cubes, ou 288 pintes.

Le boiſſeau ſera $\frac{1}{2}$ de pied cube ou 864 pouces cubes, & ſera au boiſſeau de Paris, à peu-près, comme 10 à 7.

Le ſetier de grains ou 12 boiſſeaux ſeront 6 pieds cubes, &c. Il n'y a point de meſure, de quelque nature qu'elle ſoit, qu'on ne puiſſe régler ſur celles-ci.

Toutes ces nouvelles meſures étant une fois réglées, il me ſera facile de déterminer, d'après les nouveaux poids, celui du pouce cube & du pied cube des différentes ſubſtances dont j'ai fait connoître la peſanteur ſpécifique; & c'eſt un travail auquel je m'engage, ſi toutefois les nouveaux poids ſont réglés avant la fin de ma carrière.

On voit par ce que je viens de dire, que la longueur du pendule qui bat les ſecondes à Paris, devient l'élément de toutes les meſures linéaires, & que du pied cube, qui lui-même tire ſa meſure de cette longueur, dérivent toutes les meſures de capacité, tandis que les poids ſont déterminés par celui du nouveau pied cube d'eau.

Toutes ces déterminations ſont très-ſimples & très-faciles à exécuter, car elles ne dépendent que de deux quantités, qui ſont en elles-mêmes invariables; ſavoir, la longueur du pendule à une latitude déterminée, & le poids de l'eau à une température donnée.

Il ne reſte plus qu'un inconvénient, auquel il eſt néceſſaire de remédier; c'eſt la variation de la longueur de la toiſe, par la différence de la température. On ſait qu'une toiſe de fer ou d'acier, telle que ſont celles que l'on conſerve pour étalon, eſt ſuſceptible de s'alonger du plus grand froid au plus grand chaud, d'environ $\frac{4}{7}$ de ligne: une toiſe de cuivre jaune s'alongeroit bien davantage par la même variation de température. On ſait auſſi que le bois ne change de dimenſion que d'une quantité preſqu'inſenſible dans le ſens de la longueur de ſes fibres.

Je penſe donc qu'il faut faire une toiſe de quelque bois dur, comme, par exemple, de bois de gayac, ou tout autre, pourvu que ſes fibres ſoient droites & qu'il n'y ait point de nœuds, armée à ſes deux extrémités d'une plaque d'acier trempé de tout ſon dur, afin de les garantir de l'uſure. Une pareille toiſe variera infiniment peu de longueur, quels que ſoient les changemens de température qu'elle éprouvera. Il eſt vrai qu'elle pourroit ſe voiler, mais pour l'en empêcher, on donnera à la règle de bois qui formera la toiſe, environ 4 pouces de largeur & 10 à 12 lignes ſeulement d'épaiſſeur. Les ſurfaces larges feront, comme l'on ſait, les ſeules qui pourront ſe courber. On préviendra cette courbure, en appliquant ſur chacun des petits côtés une règle d'acier plus courte que la toiſe d'environ 1 pouce, & qui y ſera attachée par pluſieurs clous à vis, qui traverſeront la toiſe d'un petit côté à l'autre, en paſſant dans des trous, non pas ronds, mais ovales, afin de donner à la règle d'acier la liberté de changer de dimenſion, indépendamment de l'invariabilité de la longueur de la toiſe de bois; & ces clous ſeront retenus par des écrous à oreilles, que l'on pourra ſerrer ou deſſerrer, ſuivant les différentes variations de la largeur de la toiſe.

Je penſe qu'une toiſe ainſi conſtruite, ſeroit un étalon plus ſûr & moins variable que tous ceux qu'on a conſtruits juſqu'à préſent. Si le gouvernement le déſire, je me chargerai de la faire exécuter, ainſi que les étalons des autres meſures de capacité & de poids.

TABLE des comparaiſons des meſures actuelles avec les nouvelles ; de l'expreſſion de la valeur de ces nouvelles meſures, & leur rapport avec les meſures actuelles.

MESURES linéaires.	MESURES actuelles.	MESURES nouvelles.	EXPRESSION de leur valeur.	Rapport.
	pieds. pouc. lig.	pieds. pouc. lig.	pieds. pouc. lig.	Nouv. Act.
Long. du pendule à ſecondes à Paris..	3. 0. 8 $\frac{17}{30}$	3. 0. 8 $\frac{17}{30}$	3. 0. 0	
Toiſe.........	6. 0. 0	6. 1. 5 $\frac{2}{15}$	6. 0. 0	51 à 50
Pied..........	1. 0. 0	1. 0. 2 $\frac{77}{90}$	1. 0. 0	51 à 50
Pouce.........	0. 1. 0	1. 0 $\frac{257}{1080}$	0. 1. 0	51 à 50
Aune	3. 7. 10	3. 6. 9 $\frac{179}{180}$	3. 6. 0	43 à 44
Degré du méridien à Paris..	toiſes. 57070.........	....	toiſes. 55960. 2. 11. 10	1 à 1
Lieue de 25 au deg.	2282.4. 9. 7 $\frac{1}{5}$	....	2238. 2. 6. 2 $\frac{4}{5}$	1 à 1
Mille.........	1000.........	toiſes. 1019. 4. 11. 9 $\frac{1}{3}$	1000.........	51 à 50
Meſures de capacité & de poids.				
	liv. onc. gros. gr.	liv. onc. gros. gr.	liv. onc. gros. gr.	
Pied cube, d'eau .	70. 0. 0. 0	74. 3. 7. 48	64. 0. 0. 0	35 à 33
Pouce cube, d'eau .	.... 5. 13 $\frac{1}{3}$	...... 5. 35 $\frac{71}{72}$	.... 4. 53 $\frac{1}{3}$	35 à 33
Liv. 27 pouc. cub. d'eau.......	1............	1. 2. 4. 35 $\frac{5}{8}$	pied cube. 1........ $\frac{1}{64}$	29 à 25
Pinte, 54 pouces cubes d'eau.....	1. 15. 0. 64	2. 5. 0. 71 $\frac{1}{4}$	2........ $\frac{1}{32}$	6 à 5
Setier de liqueur..	pintes. 8..........	....	.... $\frac{1}{4}$	6 à 5
Muid de liqueur. .	288..........	....	 9	6 à 5
Boiſſeau de Paris..	pouc. cub. 644 $\frac{2}{3}$........	pouc. cub. 864........	.... $\frac{1}{2}$	10 à 7
Setier de grains, ou 12 boiſſeaux...	7736..........	10368........	 6	10 à 7

OBSERVATIONS

Sur la combinaiſon des Oxides métalliques avec les Alkalis & la Chaux.

Par M. BERTHOLLET.

Décembre 1788.

L'HABITUDE d'obſerver des propriétés oppoſées dans les acides & dans les ſubſtances qu'ils diſſolvent, a dû porter les anciens chimiſtes à ſuppoſer une nature alkaline dans tous les corps qui, en ſe combinant avec les acides, forment une ſubſtance nouvelle; & les précipités métalliques produits par les alkalis ont dû être regardés comme des alkalis moins forts qui cèdent à une affinité plus puiſſante.

Cependant on avoit déjà obſervé que les alkalis pouvoient diſſoudre quelques-uns de ces précipités, lorſque Margraff fit voir que la plupart étoient ſolubles; mais il confondit les alkalis purs, les alkalis combinés avec l'acide carbonique, & les pruſſiates d'alkalis. Ses expériences n'offrent que des réſultats vagues; quelques-unes ont été contredites, & à cette époque l'on diſtinguoit les diſſolutions des combinaiſons chimiques.

Schéele nous fit connoître que trois ſubſtances métalliques pouvoient prendre l'état d'acide, ce qui détermina Bergman à regarder les métaux comme des acides ſaturés de phlogiſtique, & les oxides ou chaux métalliques comme un état moyen entre celui des métaux & celui des acides métalliques, de ſorte que plus dépouillés de phlogiſtique, ils ſeroient de vrais acides. L'on ſe rappelle des découvertes importantes dont nous ſommes redevables à M. Lavoiſier, ſur l'acidification de pluſieurs ſubſtances qui ſe combinent avec l'oxigène.

Ces analogies ſont trompeuſes; il me paroît que les métaux qui ſont oxigénés & qui cependant n'ont pas le

caractère

caractère d'un acide, exercent les fonctions d'un alkali avec les acides & celles d'un acide avec les alkalis : je les considère comme un terme qui donne naissance à deux progressions opposées.

Je suivois des recherches sous ce point de vue, lorsqu'elles me conduisirent à l'argent fulminant que je présentai le 4 juin dernier. M. de Fourcroi s'est occupé du même objet; il a déjà lu un mémoire intéressant sur les combinaisons de l'ammoniaque, & il en a annoncé plusieurs autres. J'ai cru devoir, avant qu'il les publiât, présenter mes essais, quelqu'imparfaits qu'ils soient.

Bergman avoit observé que les alkalis fixes caustiques dissolvoient l'oxide de plomb. J'ai éprouvé que la chaux avoit aussi cette proprieté. J'ai fait bouillir de l'eau de chaux avec de l'oxide de plomb rouge ou minium, & avec de l'oxide demi-vitreux ou litharge; il s'est dissous de ces deux substances, mais une plus grande quantité de l'oxide demi-vitreux : c'est de cette dernière dissolution que je me suis servi pour les expériences suivantes.

Cette dissolution évaporée dans une cornue, a donné de très-petits cristaux qui sont transparens & qui forment des iris; ils ne m'ont pas paru beaucoup plus solubles dans l'eau, que ne l'est la chaux elle-même.

La combinaison dont je viens de parler, est décomposée par le sulfate de potasse, par le sulfate de soude & par le muriate de soude : l'acide sulfurique & l'acide muriatique se précipitent avec l'acide de plomb. C'est un moyen de séparer l'alcali de ces sels.

Les sulfures d'alkali en précipitent le plomb, ainsi que le gas hydrogène sulfuré.

Cette combinaison a la propriété de noircir quelques substances animales, telles que la laine, les ongles, les cheveux & le blanc d'œuf; mais elle n'agit pas sur la couleur de la soie, de la peau, du jaune d'œuf & de l'huile animale; c'est le plomb qui est précipité sur les

ſubſtances qu'il colore en noir, & il eſt encore dans l'état d'oxide; car tous les acides ont la propriété de le diſſoudre.

Le ſimple mélange de l'oxide de plomb avec la chaux, noircit les ſubſtances que j'ai nommées; ce qui indique que la combinaiſon ſe fait facilement, mais la chaleur favoriſe cet effet. Quelques perſonnes ſe ſervent de ce mélange pour noircir les cheveux blancs, & ce moyen eſt moins nuiſible aux cheveux que ne le ſont les diſſolutions métalliques; cependant il affoiblit les ſubſtances animales: il paroît que c'eſt en raiſon de la chaux; car ayant fait bouillir deux échantillons de laine dans l'eau de chaux & dans la diſſolution d'oxide de plomb par la chaux, le premier m'a paru autant affoibli que le ſecond.

L'ammoniaque ne précipite pas le nitrate d'argent lorſqu'il a un excès d'acide; mais s'il n'a point d'excès d'acide, il ſe forme un petit précipité noir, & la liqueur reſte claire. Il ne faut pas conclure de là que l'oxide d'argent a autant d'affinité avec l'acide nitrique que l'ammoniaque; c'eſt un ſel triple qui ſe forme, & qui par l'évaporation donne des criſtaux qui ont été obſervés par Margraff: c'eſt probablement ce même ſel qu'a vu Bergman, & dont il parle dans ſon traité des affinités, §. *LVII*, comme d'une combinaiſon de l'argent & de l'ammoniaque.

Ce qui arrive dans cette occaſion, eſt un phénomène qu'on pourroit obſerver dans la formation de la plupart des ſels triples qui prennent dans leur compoſition une plus petite quantité de chacun des compoſans, qu'il n'en falloit pour un ſel formé de deux de ces ſubſtances. C'eſt ainſi que M. Higgins a remarqué que l'ammoniaque ne précipite qu'une portion de la magnéſie tenue en diſſolution par un acide, parce que l'autre partie reſte en diſſolution & forme un ſel triple; ce qui explique des anomalies obſervées par pluſieurs chimiſtes dans les combinaiſons de cette terre.

Le nitrate d'argent abandonne donc une portion de l'oxide d'argent, lorſqu'il eſt dans un état de ſaturation;

mais lorſqu'il a un excès d'acide, ce ſuperflu d'argent ſe combine avec l'excès d'acide & avec l'ammoniaque pour former également un ſel triple. Le nitrate d'argent & d'ammoniaque ſe décompoſe par la chaleur ſans fulminer : lorſqu'il eſt en diſſolution, la chaux en précipite l'oxide d'argent, mais l'alkali volatil qui en eſt dégagé en retient une partie. Je n'ai pu conſtater ſi ce précipité, ainſi que celui qu'on obtient par la chaux d'une diſſolution nitrique, étoit combiné avec une petite portion de chaux.

Lorſqu'on a décompoſé le nitrate d'argent par la chaux ou par les alkalis fixes (cauſtiques), le précipité qui eſt d'une couleur brune, ſe diſſout preſque entièrement dans l'ammoniaque; mais ſi on le fait ſécher auparavant ſur du papier à filtrer, on le dépouille par-là du nitrate qui s'eſt formé pendant la précipitation, ſur-tout lorſque c'eſt un nitrate de chaux, & alors il préſente avec l'ammoniaque d'autres propriétés. J'avois attribué à l'action de la lumière, ce changement qui dépend uniquement de l'abſorption du papier à filtrer.

Dans cet état, l'oxide d'argent produit avec l'ammoniaque avec laquelle on le mêle, une eſpèce de frémiſſement ſemblable à celui qui a lieu lorſqu'on éteint la chaux vive dans l'eau, une partie ſeulement ſe diſſout. Qu'on laiſſe repoſer ce mélange dix à douze heures, on voit ſe former à ſa ſurface une pellicule brillante ; qu'après ce temps on ajoute encore de l'ammoniaque, la pellicule ſe rediſſout. Si cependant on avoit mis d'abord une grande quantité d'ammoniaque, l'on n'auroit pas beſoin d'en ajouter une ſeconde doſe, & la pellicule ne ſe feroit pas formée. Qu'enfin on décante la liqueur, & que pour ſécher le précipité qui eſt devenu noir, on le dépoſe ſans ſecouſſe ſur un papier à filtrer, on lui trouvera les propriétés ſuivantes.

Lorſque ce précipité eſt encore humide, ſi on le preſſe avec un corps dur, il fulmine avec violence, & l'argent ſe trouve réduit ; mais s'il eſt ſec, il ſuffit, pour le faire fulminer, de le toucher ou d'exciter un petit frottement en

le tranſportant; l'ébranlement qui naît d'une fulmination, peut la communiquer à plus de deux pouces de diſtance.

Si l'on remplit une petite cornue de la liqueur qu'on a décantée, & ſi on la fait entrer en ébullition, il ſe dégage des bulles qui ſont du gaz azote, & il ſe forme des petits criſtaux qui ſont opaques & qui ont un éclat métallique; ces criſtaux fulminent dès qu'on les touche, quoiqu'ils ſoient couverts de liqueur, & même ils la chaſſent avec violence, s'ils ſont en certaine quantité, & briſent les vaiſſeaux de verre d'une manière dangereuſe.

Les propriétés de l'argent fulminant ont une telle analogie avec celles de l'or fulminant dont j'ai donné l'explication dans les *Mémoires de l'Académie de 1785;* elles répondent tellement à la nature connue de l'ammoniaque & de l'oxide d'argent, que j'ai cru inutile de m'expoſer aux expériences dangereuſes qu'auroient exigées les phénomènes de cette fulmination pour en établir directement la théorie.

L'oxide d'argent s'eſt combiné avec l'ammoniaque comme fait l'oxide d'or pour former l'or fulminant: ſon oxigène y tient très-peu; de là vient ſa grande cauſticité, ainſi que je l'ai fait voir ailleurs, & la facilité avec laquelle il ſe réduit par la ſimple chaleur; cependant l'oxigène étant privé d'une grande partie de ſon élaſticité, il eſt très diſpoſé à former des combinaiſons. D'un autre côté, l'hydrogène de l'ammoniaque ſe trouve dans la même diſpoſition: une petite circonſtance peut donc déterminer cette combinaiſon qui forme de l'eau en laiſſant l'argent dans l'état métallique: (*a*) mais l'oxigène & l'hydrogène qui dans ce cas ſe trouvent l'un & l'autre peu comprimés, pour ainſi dire, vu la foible affinité qui agit ſur eux, contiennent beaucoup de caloriques,

---

(*a*) Dans la fulmination, tout l'argent n'eſt pas réduit, une partie reſte en oxide noir, de même qu'une partie de l'or reſte en oxide pourpre. Cette partie qui reſte non réduite & qui eſt variable ſelon les circonſtances, doit être conſidérée comme étrangère aux phénomènes de la fulmination.

& ils ſont obligés d'en abandonner beaucoup lorqu'ils ſe réuniſſent pour former l'eau ; de là vient que celle-ci reço t une grande expanſion dans l'inſtant même de ſa formation. Mais l'eau en vapeur n'eſt pas la ſeule cauſe de la dilatation ſubite ; le gaz azote qui ſe dégage de l'ammoniaque, y contribue auſſi *(voyez les Mémoires de l'Acad. 1785)*.

Dans la diſſolution d'argent qui donne naiſſance aux criſtaux fulminans dont j'ai parlé, le métal paroît trop oxigéné pour former l'argent fulminant ; mais par l'ébullition, une partie de l'ammoniaque ſe décompoſe, d'où vient le gaz azote qui ſe dégage ; ſon hydrogène ſe combine avec une partie de l'oxigène, & alors ſe forme l'argent fulminant ; dont les molécules qui ne ſont plus ſolubles dans l'eau ſe réuniſſent en criſtaux : c'eſt, pour ainſi parler, le commencement du phénomène de la fulmination qui s'exécute.

La pellicule qui ſe forme à la ſurface de la même liqueur, eſt due à l'oxide d'argent, auquel l'air paroît enlever l'ammoniaque par une ſupériorité d'affinité. Je recommande de la diſſoudre par une nouvelle affuſion d'ammoniaque, parce que ſon interpoſition diminueroit conſidérablement l'effet de l'argent fulminant.

Le nitrate & le muriate de Baryte ont précipité la diſſolution précédente ; mais je n'ai pas examiné les précipités.

Le carbonate d'ammoniaque diſſout l'oxide d'argent précipité par la chaux, & cela avec effervescence ; c'eſt une partie de l'acide carbonique qui ſe dégage : l'autre partie forme avec l'oxide d'argent & l'ammoniaque, un ſel triple qui étant deſſéché, laiſſe une poudre jaune qui noircit au feu ſans fulminer.

L'oxide d'argent précipité par la chaux reprend de l'acide carbonique, lorſqu'on le laiſſe long-temps expoſé à l'air ; & alors il n'eſt plus propre à former l'argent fulminant, ainſi que l'ont obſervé MM. de Virli & de Morveau, parce qu'il forme un ſel triple, ſemblable à celui dont je viens de parler.

Le mélange d'un peu de cuivre empêche la formation de l'argent fulminant; probablement il ſe fait auſſi un ſel triple, qui n'a plus les mêmes propriétés.

L'on peut donc ne pas réuſſir à la préparation de l'argent fulminant, ou parce qu'on a employé un argent allié d'une portion de cuivre; ou parce qu'on n'a pas ſéparé exactement les nitrates qui ſe ſont formés dans la précipitation de l'argent; ou parce qu'on s'eſt ſervi d'une ammoniaque qui n'étoit pas aſſez privée d'acide carbonique; ou parce que l'oxide d'argent en avoit repris dans l'atmoſphère. Je dois ajouter que, lorſqu'on a fait la précipitation avec les alkalis fixes, l'argent n'eſt pas auſſi fulminant que lorſqu'on s'eſt ſervi de la chaux.

L'on avoit déjà donné le nom d'*argent fulminant* au précipité du nitrate d'argent par l'acide oxalique, dans lequel M. Klaprot avoit découvert la propriété de fuſer avec vivacité, lorſqu'on l'expoſe à la chaleur. M. Ameilhon avoit auſſi depuis long-temps fait connoître que l'acide oxalique communiquoit cette propriété au mercure, quoiqu'à un dégré inférieur qu'a l'argent; mais cet effet eſt fort éloigné de celui qu'on déſigne par la fulmination, & au contraire celui que produit l'oxide d'argent ammoniacal répond tellement à cette dénomination, que j'ai cru devoir la lui tranſporter.

On a penſé juſqu'à préſent que l'inflammation des corps ſe produiſoit toujours, parce qu'on élevoit leur température; mais il étoit difficile d'expliquer par-là comment l'on pouvoit décider la combinaiſon des principes, qui, en ſe réuniſſant, devoit abandonner la chaleur & la lumière. M. Monge a expoſé avec énergie cette eſpèce de contradiction, lorſqu'il a diſcuté les phénomènes de la formation de l'eau: « Les » deux baſes, dit-il, en abandonnant le feu qui les diſſol» voit, ſe combinent pour produire de l'eau; il arrive » donc qu'en élevant la température, c'eſt-à-dire, qu'en » introduiſant du feu dans le mélange des deux gaz, ou, » pour mieux dire encore, qu'en augmentant la doſe

» du diſſolvant, on diminue l'adhérence qu'il avoit pour » ſes baſes ; ce qui eſt abſolument contraire à ce qu'on » obſerve dans toutes les opérations analogues de la chymie ».

» Il nous manque donc encore, ajoute-t-il, beaucoup » de lumière ſur cet objet, mais nous avons droit de les » attendre & du temps & du concours des travaux des » phyſiciens. » Ces lumières, nous les devons à M. Monge lui-même : en continuant de s'occuper de cet objet, il parvint à l'idée que la compreſſion produite, ſoit par un moyen mécanique, ſoit par la chaleur, pourroit bien être la principale cauſe qui, en rapprochant les molécules du centre de l'action de leur affinité, les obligeroit à ſe combiner & à relâcher la partie de leur calorique, qui ne pourroit pas entrer dans leur nouvelle combinaiſon.

Cette opinion me paroît prouvée non ſeulement par les propriétés de l'argent fulminant, mais encore par pluſieurs phénomènes dont je rappellerai quelques-uns.

En effet, l'argent ne fulmine pas à la chaleur de l'eau bouillante, il lui faut une température plus élevée; or l'on ne peut ſuppoſer que la légère compreſſion d'un ſimple contact produiſe une chaleur ſenſible.

L'accident arrivé chez M. Baumé, lorſqu'on comprima quelques molécules d'or fulminant qui ſe trouvoient dans le goulot d'un flacon, prouve bien que la compreſſion peut ſeule faire fulminer l'or, quoiqu'elle doive être plus forte que celle qu'exige l'argent. Nous avons obſervé que la poudre faite avec le muriate oxigéné de potaſſe, s'enflammoit lorſqu'on lui faiſoit éprouver un choc aſſez médiocre entre deux corps durs, lequel ſeroit incapable de produire une chaleur ſenſible; & un choc un peu plus fort produit le même effet ſur la poudre ordinaire. Enfin M. Lavoiſier a remarqué que, lorſqu'on comprimoit fortement ſur une table de pierre le muriate oxigéné de potaſſe, il ſe faiſoit une exploſion avec lumière.

Il me paroît que dans ces effets de la compreſſion, il faut diſtinguer deux eſpèces de phénomènes qui dépendent

cependant d'un même principe. Dans les uns, les molécules de nature différente sont déterminées par la compression & par le rapprochement qui en résulte, à former une nouvelle combinaison qui exprime le calorique, ou, selon une autre manière de voir, qui a une chaleur spécifique moindre : dans les autres, c'est le cas du muriate oxigéné de potasse ; les principes qui constituent un corps, sont forcés par la compression à former un autre ordre de combinaison. Ainsi l'alkali rapproché de la base muriatique est déterminé à former du muriate de potasse, en abandonnant une grande partie du calorique, qui en surchargeant l'oxigène, lui rend l'état élastique, & qui est obligé même de se dégager en partie; d'où vient la lumière, & sans doute la chaleur qui doit accompagner cette explosion.

N'est-ce pas un corollaire des explications que je viens de donner, qu'il peut se trouver des compressions & des frottemens dans lesquels il ne se dégage point de chaleur, si dans les combinaisons nouvelles qui se forment, il y en a qui puissent absorber tout le calorique que d'autres abandonnent, tout comme dans les dissolutions chimiques il ne se dégage point de chaleur, lorsqu'il se forme un gaz dans lequel le calorique peut se combiner ?

Ainsi les loix de la nature peuvent se modifier en apparence, quoiqu'elles restent invariables. C'est un fait qu'on a peut-être regardé comme trop général, que les substances gazeuses abandonnent le calorique auquel elles devoient l'élasticité, lorsqu'elles reprennent l'état liquide & sur-tout l'état solide; & cependant une prodigieuse quantité de gaz muriatique oxigéné se concentre pendant plusieurs heures dans une solution alkaline, & une quantité considérable de muriate oxigéné de potasse se dépose sous forme concrète, sans qu'il se dégage aucune chaleur sensible. Il peut arriver que le calorique ait une telle affinité avec les principes qui entrent dans une combinaison, qu'il puisse y être retenu en entier, quoiqu'elle prenne l'état solide. Je dirai même qu'il ne me paroît pas impossible qu'il se trouvât telle combinaison dans l'état de solide, qui, quoique formée

formée en partie par des ſubſtances gazeuſes, pourroit pendant ſa formation, abſorber du calorique & produire du froid. Cette conſidération me paroît mériter attention pour la théorie de la chaleur qui s'accroît & ſe perfectionne ſi fort de nos jours.

Je ne crois cependant pas qu'il faille borner la chaleur ſenſible aux effets de la compreſſion, pour expliquer tous les phénomènes qu'elle produit dans les compoſitions & décompoſitions chimiques; elle apporte un principe nouveau qui, dans les diſtillations, par exemple, ſe combine plus ou moins facilement avec les principes d'un mixte, & donne aux uns plus d'élaſticité qu'aux autres.

La propriété que les oxides métalliques ont de ſe combiner avec les acides & avec les alkalis, peut expliquer la diſpoſition qu'ils ont à former des ſels triples : le mercure en offre pluſieurs exemples.

Lorſqu'on précipite ce métal de l'acide muriatique par l'ammoniaque, l'on a un précipité blanc : M. Bayen a fait voir que ce précipité étoit dû, pour la plus grande partie, à un ſel compoſé d'acide muriatique & d'oxide de mercure. J'ai prouvé (*Mémoires de l'Académie 1780*) que les précipités obtenus par la chaux & par les alkalis fixes, étoient auſſi dûs en partie à une combinaiſon du même genre; mais Schéele a fait voir que cette combinaiſon que nous avions penſé n'être dûe qu'au mercure & à l'acide muriatique, contenoit auſſi de l'ammoniaque, de ſorte qu'elle doit être conſidérée comme un ſel triple. Il eſt probable, d'après cela, que le ſel blanc que j'ai retiré des précipités par l'alkali fixe & par la chaux, eſt auſſi un ſel triple qui retient une partie de ces ſubſtances.

Si l'on verſe une très-petite quantité du muriate corroſif dans l'eau de chaux, le précipité qu'on voit d'abord ſe former, ſe rediſſout à l'inſtant. Si enfin on continue à former un précipité avec l'eau de chaux, & qu'on filtre la liqueur, on y trouve des indices de l'exiſtence du mercure, & c'eſt de-là que dépendent les propriétés médicales que cette

liqueur, à laquelle on a donné le nom d'*eau phagédénique*, retient, lors même qu'on l'a séparée du précipité. L'oxide de mercure se combine dans ce cas, ou avec la chaux, ou avec le muriate de chaux; lorsqu'on a précipité le nitrate de mercure par la potasse, la liqueur retient aussi du mercure qu'on peut en précipiter par le sulfure d'alkali.

M. le Blanc nous a fait voir que l'oxide de mercure pouvoit se combiner avec le muriate de soude en assez grande quantité, & l'on connoît le muriate de mercure & d'ammoniaque auquel on a donné le nom de *sel alembroth*.

L'oxide de mercure entre aussi en combinaison directe avec les alkalis & avec la chaux. Si on le fait bouillir avec l'eau de chaux, il se fait un mercuriate de chaux, qui forme par l'évaporation des petits cristaux transparens & jaunes.

Depuis la lecture de ce Mémoire, M. Lavoisier m'a communiqué la note suivante, qu'il avoit consignée depuis long-temps dans son registre d'expériences. « Un fait que » j'ai eu occasion de remarquer, c'est que le mercure » précipité rouge se dissout abondamment dans l'alkali » volatil caustique, sans effervescence. Si on fait évaporer » la liqueur, on a un sel blanc qui fait pellicule; la chaux » de mercure fait alors l'office d'acide ».

M. Sage a décrit la cristallisation de la combinaison de l'oxide de cuivre avec l'ammoniaque. J'ai observé que la dissolution de ce sel est décomposée par la chaleur : le cuivre se précipite en prenant une couleur noirâtre, & il se dégage des bulles qui sont du gaz azote; le précipité forme du gaz nitreux, pendant qu'il se dissout dans l'acide nitrique, de manière qu'il s'est rapproché de l'état métallique. J'ai déjà décrit ailleurs les phénomènes de cette décomposition du cuivrate d'ammoniaque (Anal. de l'alk. *Mémoires de l'Acad. 1785*). On peut seulement remarquer qu'il ne faut qu'un degré de chaleur bien foible, pour opérer en partie cette décomposition.

La dissolution de l'oxide de cuivre ammoniacal laisse précipiter une portion d'oxide, lorsqu'on l'étend de beau-

coup d'eau diſtillée; mais la liqueur ſurnageante retient une teinte bleue. Une plus petite quantité d'eau de chaux précipite l'oxide de cuivre, de manière que la liqueur reſte ſans couleur. La chaux a donc la propriété de précipiter cet oxide, indépendamment de l'eau qui la tient en diſſolution. J'ai ſéché ce précipité en le comprimant dans du papier à filtrer pour en extraire toute l'eau de chaux, enſuite je l'ai diſſous dans un acide; la diſſolution s'eſt faite ſans efferveſcence : je l'ai décompoſée avec le carbonate de ſoude, & j'ai rediſſous le précipité cuivreux par l'ammoniaque ; il eſt reſté du carbonate de chaux. Il s'étoit donc combiné une partie de la chaux avec l'oxide de cuivre; auſſi voit-on, lorſqu'on mêle de la chaux avec un précipité verdâtre de cuivre fait récemment, & une quantité ſuffiſante d'eau, que ce précipité prend avec le temps une couleur bleue, qui approche beaucoup de la couleur de la cendre bleue dont on ſe ſert dans les arts.

La potaſſe précipite l'oxide de cuivre, ce qui paroît prouver que la potaſſe a auſſi la faculté de ſe combiner avec cet oxide.

Glauber avoit déjà obſervé que l'ammoniaque avoit la propriété de diſſoudre le zinc; & de Laſſonne a publié dans les Mémoires de l'Académie, des obſervations nombreuſes & intéreſſantes ſur cet objet : j'ai éprouvé que l'eau de chaux & la potaſſe pouvoient diſſoudre une petite partie d'oxide de zinc ſublimé.

L'on ſait que l'oxide d'antimoine forme des ſels triples avec pluſieurs ſels à baſe alkaline. Rouelle le jeune avoit remarqué que l'oxide d'antimoine, par le nitre ou antimoine diaphorétique, ſe diſſolvoit dans l'eau ; mais j'ai obſervé qu'on précipitoit cette diſſolution en y verſant un peu d'acide : j'ai oxidé l'antimoine en le faiſant détoner avec le muriate oxigéné de potaſſe, & en faiſant bouillir le réſidu avec de l'eau diſtillée; cette eau ne s'eſt point troublée par l'affuſion d'un acide. Lors donc qu'on fait détoner l'antimoine avec le nitre, ſon oxide ſe combine avec une

portion de l'alkali de ce ſel; mais lorſqu'on le fait détoner avec le muriate oxigéné de potaſſe, cette combinaiſon ne peut ſe former, parce que l'alkali reſte engagé avec l'acide muriatique. Je ne m'arrête pas à d'autres combinaiſons connues, ſur leſquelles je n'ai point encore d'obſervations particulières, telles que la combinaiſon de l'oxide de cobalt, & celle de l'oxide de nickel avec l'ammoniaque.

Les oxides métalliques ont non-ſeulement la propriété de ſe combiner avec les alkalis & la chaux, mais ils ſe combinent quelquefois entr'eux, comme les acides font avec les alkalis; c'eſt ce qui arrive dans la précipitation de l'or par l'étain. MM. Vogel & Baumé avoient obſervé que ce précipité contenoit de l'étain: M. Erxleben remarqua avec raiſon que ces deux métaux ſe ſéparoient des acides qui les tenoient en diſſolution par l'affinité qu'ils avoient l'un pour l'autre, & qu'il ne falloit pas confondre cette précipitation avec celle qui a lieu lorſqu'on ſépare l'or par le moyen du fer ou du ſulfate de fer; car dans cette dernière il eſt précipité dans l'état métallique, & il s'eſt ſéparé parce qu'il a cédé l'oxigène à une ſubſtance qui avoit plus d'affinité avec ce principe. M. Erxleben a encore obſervé qu'il falloit que l'étain ne fût oxidé qu'à un certain point pour pouvoir précipiter l'or; car ſi l'on a fait bouillir la diſſolution d'étain, elle n'a plus la propriété de précipiter l'or, & ce phénomène d'affinité eſt analogue à pluſieurs autres qu'on obſerve en chimie. Ce qui confirme cette explication, c'eſt que, comme l'a fait voir Bergman *(de præcipitatis metallicis)*, l'or & l'étain ſont réellement dans l'état d'oxide, lorſqu'ils forment le précipité pourpre de Caſſius, ou l'oxide pourpre d'or & d'étain.

On pourroit m'objecter que je compare des effets bien foibles à l'affinité puiſſante qu'exercent les acides ſur les alkalis ou même ſur les métaux; mais l'on vient de remarquer deux oxides métalliques qui ſe ſéparent mutuellement des acides qui les tenoient en diſſolution : l'oxide d'or a une telle affinité avec l'ammoniaque, qu'il l'enlève à

tous les acides, ainsi que l'a prouvé Bergman; l'oxide d'argent fulmine à une chaleur supérieure à celle de l'eau bouillante, & décompose l'ammoniaque, plutôt que de l'abandoner. L'observation pourra nous faire connoître d'autres faits, & nous donner d'autres preuves de la force de ces combinaisons; d'ailleurs a-t-on fait quelques difficultés de reconnoître pour acides, l'acide tunstique, le molibdique, le lithique, le boracique, quoiqu'ils ne paroissent former que de foibles combinaisons?



OBSERVATIONS ET CALCULS

De l'Éclipse de Soleil du 4 juin 1788, au matin.

Par M. JEAURAT.

Lû le 16 août 1788.

L'OBSCURITÉ du ciel & la pluie du 4 juin dernier ont empêché à Paris & dans les environs, qu'aucun obſervateur pût obſerver l'éclipſe de ſoleil du 4 juin dernier; il n'a même pas été poſſible d'en obſerver une ſeule phaſe. Mais MM. Maskelyne & d'Arquier ont complétement fait l'obſervation de cette éclipſe en Angleterre. A Rouen, M. Dulague en a obſervé la fin; & à Perinaldo, M. Maraldi en a obſervé le commencement. Ce ſont ces obſervations que je donne ici, & notamment le calcul de l'obſervation faite à Greenwich, ainſi que la légère correction qu'il convient de faire aux meilleures Tables de la lune que nous ayons.

Ce qu'on verra ici avec plaiſir, c'eſt que pour la longitude de la lune, la correction à faire aux Tables n'eſt que de 31″ pour les Tables d'Euler, quoiqu'elles n'aient pas encore été rectifiées d'après les obſervations; & que les Tables de Mayer corrigées récemment & déjà pour la troiſième fois, ne diffèrent cette fois du vrai que de 17″, & les avant-dernieres de 4′.

Les Tables de Mayer les plus récentes ſe ſont trouvées moins préciſes que les précédentes. Cependant ce degré d'infériorité aura rarement lieu pour les dernières Tables de Mayer; & ſi celles d'Euler étoient, comme j'eſpère pouvoir le faire, rectifiées de même que les autres, d'après les obſervations, elles jouiroient, comme les Tables de Mayer, de l'avantage d'être des plus utiles pour l'aſtronomie-pratique, dans la détermination des longitudes, tant ſur terre que ſur mer: alors elles auroient pour titre de préférence ſur celles de Mayer, l'avantage d'être plus

conformes à la théorie de la lune, ce dont se sont considérablement occupés les plus savans géomètres de l'Europe.

Ce qui surprend, c'est que la correction que j'assigne ici pour les Tables de la lune, est moins forte pour la longitude que pour la latitude ; car pour les dernières Tables de Mayer, la correction en latitude est cette fois-ci de 23", & pour les Tables d'Euler de 50", tandis que pour la longitude, ces corrections ne sont que de 17" & de 31".

Le calcul que je vais donner de l'observation de MM. Maskelyne & d'Arquier, faite à Greenwich, a été peu de chose pour moi ; car M. Rotrou, habile géomètre, qui ci-devant a pris la peine de dresser une excellente carte de cette éclipse de soleil, a de nouveau fait les calculs pour Greenwich ; savoir, le calcul de la différence de la conjonction apparente calculée, à la conjonction apparente observée. Or la différence en temps 57", 5 qui en résulte, est naturellement la correction demandée pour la différence de la longitude de la lune à celle du soleil; car la correction correspondante à la différence des temps 57", 5 est pour les Tables d'Euler de + 31", comme on va le voir par ce qui suit.

Les Tables du soleil dont je me suis servi sont celles de M. l'abbé de la Caille.

OBSERVATIONS de l'Éclipse de Soleil du 4 juin 1788, au matin, faites à Perinaldo, par M. Maraldi neveu; à Rouen, par M. Dulague, chanoine régulier de Sainte-Geneviève; & à Greenwich en Angleterre, par MM. Maskelyne & d'Arquier.

A Perinaldo, par M. Maraldi neveu.

Latitude de Perinaldo.........	43d 52′ 2″
Différence des méridiens en temps.	.. 21 0, or.
Comencement de l'éclipse.......	7h 37′ 50″, temps vrai à Perinaldo.
La fin n'a pu être observée.	

A Rouen, par M. Dulague.

Latitude de Rouen	49d 26′ 27″.
Différence des méridiens en temps	... 4′ 57″ oc.
Commencement estimé & non observé	7h 21′ 33″, temps vrai à Rouen.
Sensiblement, & certainement l'éclipse étoit commencée	7. 28. 30.
Fin de l'éclipse observée	9. 7. 14.

A Greenwich, par MM. Maskelyne & d'Arquier.

Latitude de Greenwich	51d 28′ 40″.
Différence des méridiens en temps	... 9. 18, oc.
Commencement de l'éclipse	7h 24′ 46″ 5, temps vrai à Greenwich
Milieu moyen	8. 13. 6. 0.
Fin de l'éclipse	9. 1. 25. 5.
Demi-durée de l'éclipse	... 48. 19. 0.

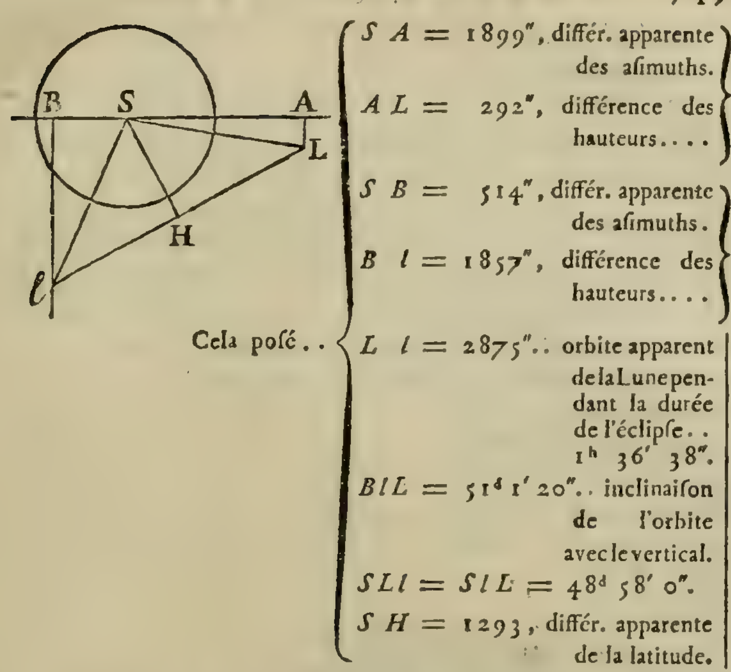
Calcul de cette dernière observation faite à Greenwich.

Ces calculs sont faits suivant les Tables de la lune d'Euler, & suivant les Tables du soleil de M. l'abbé de la Caille.

Commencement de l'éclipse	7h 27′ 7″ 0. temps vrai à Greenwich.
Milieu moyen	8. 14. 3, 5.
Fin de l'éclipse	9. 1. 0, 0.
Demi-durée de l'éclipse	.. 46. 56, 5.

Soit	*S*, centre du soleil.	
	L, centre de la lune au commencement de l'éclipse	7h 27′ 7″
	l, centre de la lune à la fin de l'éclipse	9 1. 0.

S A



1.° Calcul de la correction à faire à la différence en longitude des Tables de la lune à celles du ſoleil.

Milieu moyen de l'éclipſe ou conjonction moyenne.	Selon les Tables d'Euler	$8^h\ 14'\ 3'', 5$.
	Selon l'obſervation....	8. 13. 6, 0.

Différence de la conjonction calculée à la conjonction obſervée 57", 5; donc relativement au mouvement horaire de la lune 57", 5, différence des oppoſitions trouvées, donne pour correction cherchée à faire aux Tables de la lune d'Euler, en longitude... + 31".

Conſéquemment à $7^h\ 26'\ 26''$, temps vrai à Paris le 4 juin 1788, au matin, on a pour longitude de la Lune obſervée $2^f\ 13^d\ 14'\ 31''$

Calculée ſelon Mayer	nouvelles Tables......	2. 13. 14. 48.	erreur + 17".
	anciennes Tables.....	2. 13. 14. 27......	— 4.
Calculée ſelon les Tables d'Euler...........		2. 13. 14. 0......	— 31.

2.° Calcul, savoir, correction à faire en la latitude aux Tables de la lune, d'Euler.

Par calcul, selon Euler, on a.......... $l\,H = L\,H = 1438''$.
Par observation, suivant M. Maskelyne... $l\,H = H\,L = 1482$.
D'ailleurs la somme des demi-diamètres... $S\,l = S\,L = 1934$.

Alors { ayant supposé................. $l\,H = H\,L = 1438$,
on a trouvé......................... $S\,H = 1293''$
Présentement ayant............. $l\,H = H\,L = 1483$,
on trouvera......................... $S\,H = 1243$. }

Donc pour correction cherchée à faire en latitude, aux Tables + 50",
conséquemment à $7^h\ 26'\ 26''$, temps vrai à Paris le 4 juin 1788, au

matin, on a pour la latitude de la Lune observée..	21′ 11″ boréale.
Calculée selon Mayer, { nouvelles Tables.......	20. 48.....erreur — 23.
Calculée selon Mayer, { anciennes Tables.......	20. 44.......... — 27.
Calculée selon Euler....................	20. 21.......... — 50.



SUITE DU CALCUL
DES TRIANGLES

Qui servent à déterminer la différence de longitude entre l'Observatoire de Paris & celui de Greenwich.

(Voyez le vol. précéd. *pag. 373*).

Par M. LE GENDRE.

POUR continuer les calculs commencés dans le volume précédent, il étoit nécessaire de connoître les côtés & les angles de quelques triangles depuis Douvres jusqu'à Greenwich. Le géneral Roy a eu la bonté de nous donner communication de ses mesures & de ses résultats dès la fin de 1789 ; le travail entier a paru depuis dans le volume des *Transactions philosophiques* publié en 1790. Nous renvoyons à cet ouvrage ceux qui voudront prendre une connoissance détaillée de la belle opération faite en Angleterre. Nous nous contenterons pour le présent de donner la position de quelques points de la chaîne de triangles tracés depuis Douvres jusqu'à Greenwich, d'où nous conclurons la différence de longitude des deux observatoires.

Le tableau suivant présente à la fois les élémens empruntés des Anglois, & les résultats que nous en avons tirés par la méthode expliquée dans le volume précédent. Les côtés des triangles sont évalués en pieds Anglois dans l'ouvrage du général Roy ; nous les avons réduits en toises, en retranchant de leurs logarithmes la quantité constante 0,8058068 , ou simplement 0,805807 lorsque les logarithmes n'ont que six décimales.

	Tour nord du Château de Douvres.
Longitude	$1^d\ 0'\ 928 - 218\,\beta - 11\,\omega + 8\,\theta + 3\,z + 22\,x - 1000\,y.$
Latitude	$51.\ 7.\ 813 - 4\,\beta - \omega - 12\,z + 1000\,x.$
Az. E. de Calais..	$116.\ 53.\ 334 + 169\,\beta + 8\,\omega - 6\,\theta - 30\,x - 1002\,z.$
	Folkſtone Turnpike.
Élémens	Logarithme de la diſtance à Douvres.. 3,6932556. * Angle à Douvres, entre Blannez & Folkſtone .... $117^d\ 14'\ 40'',75.$
Longitude	$1.\ 8.\ 506 - 244\,\beta - 12\,\omega + 8\,\theta + 2\,z + 25\,x - 1000\,y.$
Latitude	$51.\ 5.\ 775 - \beta - \omega - 13\,z + 1000\,x.$
Az. E. de Douvres.	$66.\ 48.\ 881 + 189\,\beta + 9\,\omega - 6\,\theta - 33\,x - 1001\,z.$
	Allington Knoll.
Élémens	Logarithme de la diſtance à Folkſtone 3,9381864. Angle à Folkſtone, entre Douvres & Allington .... $162^d\ 56'\ 26',75.$
Longitude	$1.\ 22.\ 899 - 294\,\beta - 15\,\omega + 8\,\theta + z + 30\,x - 1000\,y.$
Latitude	$51.\ 4.\ 787 + \beta - \omega - 16\,z + 1000\,x.$
Az. E. de Folkſtone	$83.\ 41.\ 230 + 227\,\beta + 11\,\omega - 6\,\theta - 40\,x - 1001\,z.$

* Cet angle, & tous les ſemblables parmi les élémens, ſont ouverts du côté du ſud.

	Hollingborn Hill.
Élémens.......	Logarithme de la diſtance à Allington. 4,1766293. Angle à Allington, entre Folkſtone & Hollingborn................ $231^d\ 15'\ 45''\frac{1}{2}$.
Longitude......	$1^d\ 40'\ 709 - 355\ \beta - 18\ \omega + 8\ \theta + 6 z + 36 x - 1000\ y$.
Latitude.........	$51.\ 15.\ 917 - 10\ \beta - 3\ \omega - 19 z + 1000\ x$.
Az. E. Allington..	$134.\ 43.\ 113 + 276\ \beta + 13\ \omega - 6\ \theta - 49\ x - 1005\ z$.

	Wrotham Hill.
Élémens.......	Logarith. de la diſtance à Hollingborn 4,1037309. Angle à Hollingborn, entre Allington & Wrotham................. $148^d\ 26'\ 27''$.
Longitude......	$2.\ 1.\ 450 - 428\ \beta - 21\ \omega + 8\ \theta + 7 z + 44\ x - 1000\ y$.
Latitude........	$51.\ 18.\ 925 - 12\ \beta - 3\ \omega - 23\ z + 1000\ x$.
Az. E. Holl......	$102.\ 53.\ 378 + 332\ \beta + 16\ \omega - 6\ \theta - 59\ x - 1006\ z$.

	Severndroog Caſtle.
Élémens.......	Logarithme de la diſtance à Wrotham. 4,0970775. Angle à Wrotham, entre Hollingborn & Severndroog.................. $211^d 2'\ 56'', 5$
Longitude......	$2.\ 16.\ 605 - 481\ \beta - 24\ \omega + 7\ \theta + 50 x + 12 z - 1000\ y$.
Latitude........	$51.\ 28.\ 030 - 20\ \beta - 5\ \omega - 26\ z + 1000\ x$.
Az. E. Wrotham..	$133.\ 44.\ 478 + 375\ \beta + 18\ \omega - 5\ \theta - 66\ x - 1009\ z$.

	Greenwich.
Élémens.	Logarith. de la diſtance à Severndroog. 3,3588606. Angle à Severndroog, entre Wrotham & Greenwich . . . . $152^d\ 28'\ 57'',75$.
Longitude	$2.\ 20.\ 298 - 494\,\beta - 25\,\omega + 7\,\theta + 51\,x + 12\,z - 1000\,y$.
Latitude.	$51.\ 28.\ 700 - 20\,\beta - 5\,\omega - 26\,z + 1000\,x$.
Az. E. Severn. . . .	$106.\ 10.\ 551 + 385\,\beta + 19\,\omega - 5\,\theta - 68\,x - 1009\,z$.

Si on jette un coup-d'œil ſur la carte des triangles Anglois, dans les Tranſactions philoſophiques, on verra qu'on peut vérifier le réſultat précédent, en choiſiſſant une autre route pour déterminer la poſition de Greenwich. Ainſi en partant du cap Blannez, on peut calculer ſucceſſivement les poſitions de Fairlight Down, Goudhurſt, Wrothamhill, Severndroog-Caſtle & Greenwich : on trouve pour ce dernier point,

Longitude $2^d\ 20'\ 296 - 495\,\beta - 24\,\omega + 5\,\theta + 52\,x + 13\,z - 1000\,y$;

Latitude $51.\ 28.\ 702 - 21\,\beta - 5\,\omega - \theta - 28\,z + 1000\,x$;

Az. *E* Severn. $106.\ 10.\ 741 + 386\,\beta + 19\,\omega - 4\,\theta - 69\,x - 1008\,z$;

La différence de ce réſultat avec le précédent, eſt à peu-près nulle ſur la longitude & la latitude; elle monte à 0',19 ſur l'azimuth de Severndroog obſervé de Greenwich. Mais il n'eſt pas étonnant que la combinaiſon d'un très-grand nombre d'angles horizontaux produiſe cette erreur, d'autant plus que nous avons employé ces angles tels que l'obſervation les a donnés, ſans y faire aucune correction.

Si nous prenons un milieu entre ces deux azimuths,

nous aurons

$$106^d\ 10',646 + 385\,\beta + 19\,\omega - 5\,\theta - 68\,x - 1009\,z.$$

Le même angle obſervé immédiatement à Greenwich a été trouvé de $106^d\ 10'\ 433$: la différence eſt en millièmes de minute

$$213 + 385\,\beta + 19\,\omega - 5\,\theta - 68\,x - 1009\,z.$$

D'autres obſervations d'azimuth faites à Folkſtone & à Goudhurſt, ont donné avec le calcul les différences,

$$295 + 189\,\beta + 9\,\omega - 6\,\theta - 33\,x - 1001\,z$$
$$435 + 309\,\beta + 15\,\omega - 4\,\theta - 56\,x - 1001\,z.$$

On voit que ces différences augmenteroient en ſuppoſant β poſitif; ainſi, il ne paroît pas que l'aplatiſſement doive être plus grand que nous ne l'avons ſuppoſé. Quant à la valeur de z, il paroît qu'elle doit être poſitive, & que pour réduire les différences à une valeur probable, il faut ſuppoſer au moins $z = \frac{1}{4}$, ou encore mieux $z = 0{,}3$, ce qui ſurpaſſe un peu la limite que nous avions attribuée à cette erreur : les erreurs des autres élémens ne ſont pas manifeſtées par les obſervations d'azimuth.

Prenant donc $z = 0{,}3$, on aura pour la poſition de Greenwich,

Longitude $2^d\ 20'\ 294 - 494\,\beta - 25\,\omega + 7\,\theta + 51\,x - 1000\,y;$

Latitude $51\ 28\ 692 - 20\,\beta - 5\,\omega + 1000\,x.$

La latitude eſt reconnue de

$$51^d\ 28'\ 40'' = 51^d\ 28',667;$$

ainſi nous aurons

$$0 = 25 - 20\,\beta - 5\,\omega + 1000\,x;$$

ce qui donne

$$x = -\tfrac{1}{40} + \tfrac{1}{50}\,\mathcal{C},$$

& enfin la longitude devient

$$2^d\ 20'\ 293 - 493\,\mathcal{C} - 25\,\omega + 7\,\theta - 1000\,y.$$

Les erreurs ω & θ influent très-peu fur ce réfultat : l'erreur 1000 y, eft la quantité dont on peut s'être trompé fur la longitude de Dunkerque dans l'opération de la méridienne ; elle ne peut guère furpaffer une feconde, quoique nous ayons dit dans *le volume précédent*, qu'elle pouvoit aller à trois ou quatre. Ainfi on peut juger de l'incertitude qui refte encore fur la différence de longitude des deux obfervatoires. La quantité qui influe le plus dans fa détermination eft l'aplatiffement ; fi on le fuppofe de $\frac{1}{320}$, ce qui donne $\mathcal{C} = 0$, la différence de longitude fera $2^d\ 20'\ 17'',6$, & cette quantité ne doit pas s'écarter de la vérité de plus d'une feconde.

Si on fuppofe l'aplatiffement de $\frac{1}{178}$, ce qui donne $\mathcal{C} = \frac{142}{178}$, la différence de longitude fera $2^d\ 19'\ 54''$, à une feconde près.

Cette incertitude ne provient nullement de l'opération trigonométrique, dont l'exactitude eft plus que fuffifante pour cet objet ; elle eft due toute entière à l'aplatiffement, dont l'effet pouvoit être déterminé *a priori*.

Comme le plus petit aplatiffement nous paroît le plus probable, nous fixerons à $2^d\ 20'\ 15''$ la différence de longitude entre les obfervatoires de Paris & de Greenwich, ce qui fait en temps $9'\ 21''$.

Le général Roy trouve $2^d\ 19'\ 42''$ ou $9'\ 18'',8$ en temps, réfultat affez différent du nôtre, & que nous ne pourrions obtenir qu'en fuppofant l'aplatiffement de $\frac{1}{145}$. Nous n'entrerons dans aucun détail fur cette différence de réfultats ; nous obferverons feulement que les calculs du général

général Roy *(a)* ne paroissent pas fondés sur des principes bien géométriques. Il s'appuie principalement sur l'hypothèse de Bouguer, dans laquelle les accroissemens des degrés sont proportionnels aux carré-carrés des sinus de latitude; mais il joint de plus à cette hypothèse qui devroit suffire, d'autres moyens d'approximation dont on n'aperçoit pas la légitimité. C'est aux géomètres à décider laquelle des méthodes mérite la préférence. Nous reviendrons sur cet objet lorsque la grande opération ordonnée par l'Assemblée Nationale pour déterminer l'unité de poids & de mesure, aura été exécutée. Cette entreprise, l'une des plus belles qui ayent été conçues en faveur des sciences & de l'humanité, ne peut manquer de jeter un nouveau jour sur la grande question de la figure de la terre. Nous pouvons même espérer que tous les doutes seront levés à cet égard, si les autres nations secondant les vues de la France, ordonnent des travaux semblables pour la détermination de la mesure universelle.

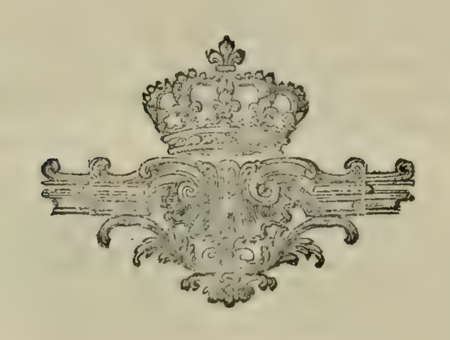
(a) Nous avons aussi quelque reproche à faire au général Roy, dans la manière dont il a corrigé les angles de ses triangles. Ces corrections, dont il n'indique point le fondement, sont souvent assez fortes; il paroît qu'elles sont faites dans l'intention de faire coïncider les deux bases, & que sans cela la base de vérification différeroit de sa valeur calculée d'après la première base, d'environ un vingt-cinq millième, ce qui est beaucoup, eu égard au degré d'exactitude que présentent les autres parties de l'opération. Un autre défaut de ces corrections, c'est que le général Roy a négligé la courbure des triangles; il les calcule tous comme rectilignes, & comme si la chaîne entière pouvoit se développer sur un plan; il ne fait donc aucune différence entre le véritable angle de chaque triangle sphérique, & celui qu'il convient de prendre, pour que son sinus soit proportionnel au côté opposé; cependant le premier angle est plus grand que le second du tiers de l'aire du triangle, conformément au théorème que nous avons donné dans le *vol. préc. pag. 358.* Au reste, ces erreurs sont trop légères pour influer sur la position de Greenwich; elles ne concluent pas non plus contre l'opération Angloise, dont l'exactitude est au-dessus de tout reproche, & dont les différentes parties se concilient aisément avec des corrections moindres que celles du général Roy. Il paroît seulement que la base de vérification n'a pas été mesurée avec la même précision que le reste; c'est sur quoi nous pourrons revenir dans une autre occasion.

Fautes à corriger dans le volume précédent.

Pag. 364, *vers le milieu* $- \frac{2}{3} \delta^3 (\frac{1}{2} + \text{tang.}^2 L)$,
lisez $- \frac{2}{3} \cdot \frac{\delta^3}{\text{cos.} L} (\frac{1}{2} + \text{tang.}^2 L)$.

Pag. 373, *longitude de Calais* 0 29, 217,
lisez 0 29, 017.

Pag. 372, *vers le milieu*, l'incertitude 1000 *y*, &c.
lisez l'incertitude 1000 *y* n'eſt que d'environ une ſeconde.



SUITE DE L'ESSAI

Poür connoître la Population du Royaume, & le nombre de ses habitans, en adaptant aux Villes, Bourgs & Villages, portés sur chacune des Cartes de M. de Cassini, l'année commune des Naissances, & en la multipliant par 26.

Par M.rs DU SÉJOUR, DE CONDORCET & DE LA PLACE.

Population de la Carte de France, n.° 168.

SAINT-POL-DE-LÉON.

« CETTE Carte contient les villes de Landernau, de » Morlaix & de Saint-Pol-de-Léon, & 113 bourgs ou » villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Landernau, est de.. 158.
Dans celle de Morlaix................................ 427.
Dans celle de Saint-Pol-de-Léon................. 222.
Et dans les 113 bourgs ou villages, de........... 6653.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes.	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue car.
146.	3.	113.	20982.	172978.	193960.	1184.

Cette carte ne contient que 146 lieues carrées; le surplus est couvert par la Manche.

S.t Brieuc

Population de la Carte de France, n.° 156.

« CETTE Carte contient les villes de Saint-Brieux; » de Guincamp, de Lannion & de Tréguier, & 140 bourgs » ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Saint-Brieux, est de.......................... 267.
Dans celle de Guincamp, de.......................... 188.
Dans celle de Lannion, de.......................... 111.
Dans celle de Tréguier, de.......................... 148.
Et dans les 140 bourgs ou villages, de.......................... 6418.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue car.
156.	4.	140.	18564.	166868.	185432.	1070.
Cette Carte ne contient que 156 lieues carrées; le surplus est couvert par la Manche.						

SAINTES.

Population de la Carte de France, n.° 102.

« CETTE Carte contient les villes de Cognac, de » Saint-Jean-d'Angely, de Marennes, de Pons, de » Rochefort & de Saintes, & 259 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Cognac, est de.......................... 135.
Dans celle de Saint-Jean-d'Angely, de.......................... 144.
Dans celle de Marennes, de.......................... 244.
Dans celle de Pons, de.......................... 147.
Dans celle de Rochefort, de.......................... 519.
Dans celle de Saintes.......................... 100.
Et dans les 259 bourgs ou villages, de.......................... 5917.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue car.
234.	6.	259.	34320.	153842.	188162.	657.

La superficie de cette Carte n'est que de 234 lieues carrées; le surplus est couvert par la mer.

Population de la Carte de France, n.° 37. MONTAUBAN.

« CETTE Carte contient les villes de Castel-Sarrasin, » de Moissac, de Montauban, de Rabastens, de Verdun, » & 345 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Castel-Sarrasin, est de........................ 175.
Dans celle de Moissac, de........................ 227.
Dans celle de Montauban, de........................ 733.
Dans celle de Rabastens, de........................ 118.
Dans celle de Verdun, de........................ 93.
Et dans les 345 bourgs ou villages, de........... 6195.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue car.
250.	5.	345.	34996.	161070.	196066.	644.

Population de la Carte de France, n.° 172. OUESSANT.

« CETTE Carte ne contient que 27 bourgs ou villages, » & point de ville. »

L'année commune de naiſſances dans ces 27 bourgs ou villages, eſt de . . . . 1153.

NOMBRE des LIEUES de ſuperficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue car.
27.	0.	27.	0.	29978.	29978.	1110.

La ſuperficie de cette Carte n'eſt que de 27 lieues carrées; le ſurplus eſt couvert par la mer.

TARASCON.

Population de la Carte de France, n.° 40.

« CETTE Carte contient la ville de Maſſat, & 67 » bourgs ou villages. »

L'année commune des naiſſances dans la ville de Maſſat, eſt de. . . . . 297.

Et dans les 67 bourgs ou villages, de. . . . . 1827.

NOMBRE des LIEUES de ſuperficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue car.
141.	1.	67.	7722.	47502.	55224.	337.

Cette Carte ne contient que 141 lieues carrées; le ſurplus fait partie de l'Eſpagne.

DINAN.

Population de la Carte de France, n.° 128.

« CETTE Carte contient la ville de Dinan, & 117 » bourgs ou villages. »

L'année commune des naiſſances dans la ville de Dinan, eſt de. . . . . 293.
Et dans les 217 bourgs ou villages, de. . . . . 8520.

NOMBRE des LIEUES de ſuperficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue car.
250.	1.	217.	7618.	221520.	229138.	886.

Population de la Carte de France, n.° 144.

REMIREMONT.

« CETTE Carte contient la ville de Remiremont, » & 159 bourgs ou villages. »

L'année commune des naiſſances dans la ville de Remiremont, eſt de. . . . . 130.
Et dans les 159 bourgs ou villages, de. . . . . 7067.

NOMBRE des LIEUES de ſuperficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue car.
248.	1.	159.	3380.	183742.	187122.	741.

Population de la Carte de France, n.° 173.

LE CONQUET.

« CETTE Carte ne contient que 15 bourgs ou villages, » & point de villes. »

L'année commune des naiſſances dans les 15 bourgs ou villages, eſt de. . . . . 638.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue car.
28.	0.	15.	0.	16588.	16588.	592.

Périgueux.

Population de la Carte de France, n.° 70.

« Cette Carte contient les villes de Périgueux, » de Barbesieux & de Montron, & 256 bourgs ou » villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Perigueux, est de .... 272.
Dans celle de Barbesieux, de .... 81.
Dans celle de Montron, de .... 113.
Et dans les 256 bourgs ou villages, de .... 5992.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue car.
250.	3.	256.	12116.	155792.	167908.	623.

Montmédy.

Population de la Carte de France, n.° 109.

« Cette Carte contient les villes de Montmédy, » de Longwy, de Stenay, & 118 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Montmédy, est de .... 31.

Dans

Dans celle de Longwy, de . . . . 81.
Dans celle de Stenay, de . . . . 109.
Et dans les 118 bourgs ou villages, de . . . . 1586.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue car.
72.	3.	118.	5746.	41236.	46992.	725.

Population de la Carte de France, n.° 19.

CARCASSONNE.

« CETTE Carte contient les villes d'Aleth, de Carcassonne, » de Castelnaudary, de Limoux, de Mirepoix, & 330 » bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville d'Aleth, est de . . . . 23.
Dans celle de Carcassonne, de . . . . 445.
Dans celle de Castelnaudary, de . . . . 301.
Dans celle de Limoux, de . . . . 171.
Dans celle de Mirepoix, de . . . . 90.
Et dans les 330 bourgs ou villages, de . . . . 14998.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue car.
250.	5.	330.	26780.	114998.	141778.	460.

Population de la Carte de France, n.° 110.

VERDUN.

« CETTE Carte contient les villes de Verdun, d'Étain » & de Varennes, & 350 bourgs ou villages »

L'année commune des naiſſances dans la ville d'Etain, eſt de.................................. 88.
Dans celle de Varennes, de......................... 64.
Dans celle de Verdun, de.......................... 389.
Et dans les 350 bourgs ou villages, de............ 4773.

NOMBRE des LIEUES de ſuperficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue car.
250.	3.	350.	14066.	124098.	138164.	496.

L'ORIENT.

Population de la Carte de France, n.° 170.

« CETTE Carte contient les villes de l'Orient, de » Ploémur, de Port-Louis, de Quimper & de Quimperlé, » & 85 bourgs ou villages. »

L'année commune des naiſſances dans la ville de l'Orient eſt de.................................. 626.
Dans celle de Ploémur, de......................... 370.
Dans celle de Port-Louis, de...................... 106.
Dans celle de Quimper, de......................... 271.
Dans celle de Quimperlé, de....................... 117
Et dans les 85 bourgs ou villages, de............. 4634.

NOMBRE des LIEUES de ſuperficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des villages.	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue car.
142.	5.	85.	38740.	120484.	159224.	841.
La ſuperficie de cetre Carte n'eſt que de 142 lieues carrées; le ſurplus eſt couvert par l'Océan.						

VANNES.

Population de la Carte de France, n.° 158.

« CETTE Carte contient les villes de Vannes, d'Auray, » de Hennebond, de Josselin, de Ploermel, & 122 bourgs » ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Vannes est de	359.
Dans celle d'Auray, de	139.
Dans celle de Hennebond, de	139.
Dans celle de Josselin, de	138.
Dans celle de Ploermel, de	206.
Et dans les 122 bourgs ou villages, de	7269.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des villages.	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue. car.
248.	5.	122.	25506.	188994.	214500.	762.

La superficie de cette Carte n'est que de 248 lieues carrées; le surplus est couvert par l'Océan.

Saint-Jean-Pied-de-Port.

Population de la Carte de France, n.° 140.

« CETTE Carte contient la ville de Saint-Jean-Pied- » de-Port, & 45 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Saint-Jean-Pied-de-Port, est de	20.
Et dans les 45 bourgs ou villages, de	874.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue car.
50.	1.	45.	520.	22724.	23244.	454.

La superficie de cette Carte n'est que de 50 lieues; le surplus est couvert par la mer & par l'Espagne.

QUINTIN.

Population de la Carte de France, n.° 157.

« CETTE Carte contient les villes de Quintin, de » Pontivy, de Lamballe, & 156 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Quintin, est de. . . . . 209.
Dans celle de Pontivy, de. 142.
Dans celle de Lamballe, de. . . . . 95.
Et dans les 156 bourgs ou villages, de. . . . . 8940.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue car.
250.	3.	156.	11596.	233844.	245440.	935.

GUERRANDE.

Population de la Carte de France, n.° 159.

« CETTE Carte contient les villes de Guerrande, » de Rhuis, & 47 bourgs ou villages. »

L'année commune des naiſſances dans la ville de Guerrande, eſt de. . . . . 248.

Dans celle de Rhuis, de. . . . . 225.

Et dans les 47 bourgs ou villages, de. . . . . 2457.

NOMBRE des LIEUES de ſuperficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue car.
124.	2.	47.	12298.	63882.	76180.	515.
La ſuperficie de cette Carte n'eſt que de 124 lieues; le ſurplus eſt couvert par la mer.						

RENNES.

Population de la Carte de France, n.° 129.

« CETTE Carte contient les villes de Rennes, de Châteaubrillant, & 142 bourgs ou villages. »

L'année commune des naiſſances dans la ville de Rennes, eſt de. . . . . 1349.

Dans celle de Chateaubrillant, de. . . . . 134.

Et dans les 142 bourgs ou villages, de. . . . . 7946.

NOMBRE des LIEUES de ſuperficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue car.
250.	2.	142.	38558.	206596.	245154.	826.

NANTES.

Population de la Carte de France, n.° 131.

« CETTE Carte contient les ville de Nantes, de » Machecoul, & 114 bourgs ou villages. »

L'année commune des naiſſances dans la ville de Nantes, eſt de.. 2026.

Dans celle de Machecoul, de.................... 157.

Et dans les 114 bourgs ou villages, de.......... 6677.

NOMBRE des LIEUES de ſuperficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue car.
234.	2.	114.	56758.	173602.	230360.	742.
La ſuperficie de cette Carte n'eſt que de 234 lieues carrées ; le ſurplus eſt couvert par la mer.						

BREST.

Population de la Carte de France, n.° 169.

« CETTE Carte contient la ville de Breſt, & 109 » bourgs ou villages. »

L'année commune des naiſſances dans la ville de Breſt, eſt de.. 1107.

Et dans les 109 bourgs ou villages, de........... 6368.

NOMBRE des LIEUES de ſuperficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue car.
235.	1.	109.	28782.	165568.	194350.	704.
La ſuperficie de cette Carte n'eſt que de 235 lieues carrées ; le ſurplus eſt couvert par la mer.						

Population de la Carte de France, n.° 130. RÉDON.

« CETTE Carte contient les villes de Rédon,
» de Paimbœuf, & 92 bourgs ou villages. »

L'année commune des naiſſances dans la ville de Rédon, eſt de.................................. 133.
Dans celle de Paimbœuf, de...................... 148.
Et dans les 92 bourgs ou villages, de............. 4931.

NOMBRE des LIEUES de ſuperficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue car.
247.	2.	92.	7306.	128206.	135512.	519.

La ſuperficie de cette Carte n'eſt que de 247 lieues carrées; le ſurplus eſt couvert par la mer.





MESSIEURS DE LA SOCIÉTÉ Royale des Sciences établie à Montpellier, ont envoyé à l'Académie le Mémoire ſuivant, pour entretenir l'union intime qui doit être entre elles, comme ne faiſant qu'un ſeul corps, aux termes des Statuts accordés par le Roi, au mois de Février 1706.

OBSERVATIONS

Sur la manière de former l'Alun par la combinaiſon directe de ſes principes conſtituans.

Par M. CHAPTAL.

L'ALUN réſulte de la combinaiſon de l'acide ſulfurique avec l'alumine ou argile pure.

Cette combinaiſon ſe fait ou par la nature ou par l'art.

Dans le premier cas, elle eſt preſque toujours le produit de la décompoſition du ſchiſte pyriteux; dans le ſecond, la combinaiſon directe de l'acide ſulfurique avec l'alumine.

Le premier effet de la décompoſition du ſchiſte pyriteux, eſt la formation de l'acide ſulfurique; le ſecond, c'eſt ſa combinaiſon avec les métaux & les terres qui forment la baſe du ſchiſte, d'où il réſulte des ſulfates de fer, de chaux, d'alumine, de magnéſie, &c.

La

La ſuite d'opérations uſitées dans les ateliers d'alun, n'eſt deſtinée qu'à hâter la décompoſition du ſchiſte, extraire l'alun & le dégager de tous les autres ſels qui ſe trouvent mêlés avec lui.

L'étendue des uſages de l'alun en fait une des ſubſtances les plus précieuſes dans les arts, mais les bonnes mines d'alun ſont rares, & notre vaſte royaume tire de l'étranger preſque tout celui qu'il emploie *(a)*.

Il étoit donc intéreſſant de former l'alun de toutes pièces, & aſſez économiquement, pour pouvoir concourir avec les fabriques où l'on ne fait que l'extraire des terres qui le contiennent; on paroît avoir rempli le double but dans quelques endroits.

Tous les procédés connus ſe réduiſent en général à imprégner l'argile d'acide ſulfurique, & à faciliter la combinaiſon en expoſant le mélange à une chaleur modérée. M. Sage nous a décrit avec exactitude le procédé qu'on ſuit à Javelle, & l'on peut voir dans ſes écrits les détails qu'il nous a fait connoître de cette opération intéreſſante; mais ce procédé varié de mille manières m'a toujours paru coûteux & pénible, & on ne peut pas le pratiquer avec économie dans notre province, où les aluns étrangers ne ſe vendent en ce moment que de 16 à 25 livres le quintal: une fabrication en grand pendant 15 mois m'en a fourni la preuve, & on peut acquérir la même conviction, ſans courir les mêmes riſques, en évaluant au plus bas prix la terre, l'acide, la main-d'œuvre & généralement tous les élémens qu'un fabricant fait entrer dans ſes calculs.

J'ai été donc forcé à rechercher des moyens plus économiques & plus ſimples, & c'eſt ſur les principes ſuivans que j'ai établi mes recherches.

(a) C'eſt d'après mes analyſes, mes conſeils & mes procédés qu'on a formé un établiſſement d'alun ſur les mines de Saint-Georges, à une lieue de Milhau: je déſire que cet exemple ſoit ſuivi.

L'acide sulfurique qu'on emploie, est le principe qui renchérit les aluns. Cet acide, me suis-je dit, n'est que le mélange de l'eau & de la vapeur qui est produite par la combustion du salpêtre & du soufre : exposons nos terres préparées à l'atmosphère de cette vapeur ; l'effet doit être d'autant plus sensible, que l'acide à l'état de vapeur est infiniment plus énergique, que lorsqu'il est à l'état liquide *(a)*. Il étoit question de soumettre les idées à l'expérience, & c'est ce que j'ai fait : des argiles de toutes espèces, préparées de toutes manières, présentées sous toutes les formes, ont été exposées à la vapeur sulfurique dans l'intérieur de mes chambres de plomb : ces expériences m'ont offert divers résultats dont j'aurai occasion de parler dans ce Mémoire; il me suffira d'observer en ce moment, que les mêmes expériences ont été variées & répétées jusqu'à ce que j'aie eu acquis des principes assez sûrs & assez positifs pour travailler en grand, & me décider à former un atelier des plus considérables. Mon établissement est en pleine activité depuis deux ans, & je crois mes principes assez éprouvés pour pouvoir les présenter avec quelque confiance.

Je diviserai tout ce que j'ai à dire sur ce sujet en trois chapitres. Dans le premier, je parlerai de la manière de disposer le local pour brûler le mélange de soufre & de salpètre. Dans le second, je m'occuperai du choix & de la préparation des terres. Dans le troisième, je ferai connoître ce que l'expérience m'a appris sur les phénomènes que présentent les terres exposées à la vapeur, sur le temps qu'il convient de les y laisser, sur la manière de les gouverner dans les chambres.

(a) La vapeur qui se dépose sur les parois des chambres de plomb, ne marque que 45 à 50 degrés, parce que cette vapeur s'est affoiblie en se combinant avec l'eau de l'atmosphère; mais si on reçoit cette même vapeur dans des vaisseaux secs, au moment où elle se dégage, elle se dépose en cristaux mal prononcés sur les parois des vases, par un refroidissement artificiel, & devient liquide dès qu'on y laisse pénétrer l'air extérieur plus ou moins aqueux.

I.° Nos chambres de plomb sont très-propres aux usages dont nous venons de parler : les vapeurs d'acide sulfurique attaquent peu le plomb, celles d'acide nitreux qui se forment & se développent dès qu'on ouvre les chambres pour les aérer, ont plus d'action sur le métal; mais lorsque la surface est enfin corrodée, il en résulte une couche d'oxide ou chaux blanche de plomb, qui garantit le métal sur lequel elle forme comme un vernis qui le défend. Mais le plomb est pesant & coûteux, & sous ce double rapport, peu favorable à des entreprises vastes & étendues : ces considérations m'ont engagé à chercher un mastic qui ne fût pas sensiblement attaqué par l'acide à l'état de vapeur, ne se ramollît point à une température de 40 à 50 degrés *(thermom. Réaumur)*, & fût si uni, qu'il ne présentât ni fentes ni gerçures, lorsqu'une fois il étoit appliqué. Il étoit difficile de remplir toutes ces conditions, & pour me livrer aux essais convenables, je fis construire une chambre en bois, supportée par des piliers de pierre à 5 pieds au-dessus du sol, & isolée de toutes parts, pour qu'elle fût exposée à une observation plus rigoureuse. Cette chambre a 30 pieds de long, 12 de large & 6 de haut. J'ai successivement enduit les parois de cette chambre, avec tous les mastics sur lesquels des expériences en petit me faisoient fonder quelque espoir ; je brûlois le mélange ordinaire de soufre & de salpêtre pendant un ou deux mois, & au bout de ce temps-là je retirois le produit de la combustion, & examinois attentivement l'état du mastic dont les parois étoient revêtues. Quelquefois je le trouvois gercé & tout fendillé, d'autre fois fondu & ayant coulé sur le sol, souvent détaché du bois quoiqu'appliqué soigneusement avec le pinceau ; plus souvent encore l'huile qui ruisseloit sur les bords, s'y coloroit & le dissolvoit : dans l'un & dans l'autre de ces cas je me décidois à racler les parois, à enlever tout le mastic, & à en substituer un autre qui n'eût point les défauts dont je venois d'être témoin. Enfin après 12 à 15 mois de tentatives, je

parvins à trouver une composition qui me parut réunir le plus d'avantages; & l'enduit que j'appliquai alors existe depuis trois ans, sans dégradation sensible, quoique la chambre ait été employée sans interruption pour la fabrication de l'huile de vitriol. Le seul défaut que je lui ai reconnu c'est d'être un peu trop sensible, mais cet inconvénient disparoît en brûlant au dehors de la chambre & maîtrisant la combustion de manière que la chaleur de l'intérieur ne s'élève pas au dessus du 45.e degré du thermomètre de Réaumur *(a)*.

D'après les premiers résultats, je me décidai à former un établissement plus considérable pour y fabriquer l'alun: l'atelier construit à cet effet est en activité depuis deux ans.

La chambre dans laquelle on brûle le mélange de salpêtre & de soufre a 48 pieds de long, 44 de large, & 27 dans sa plus grande élévation : les murs des côtés sont en maçonnerie ordinaire & sont revêtus intérieurement d'une couche aussi épaisse de plâtre blanc; le sol est un pavé de briques, noyé dans un mortier formé par le mélange de l'argile calcinée & de l'argile crue. Le premier pavé est encore recouvert d'un second pour couper & couvrir les joints que forment les briques du premier, & les briques de ce second pavé sont appliquées & noyées dans une couche de mon mastic, qu'on emploie chaud en guise de mortier.

(*a*) Cet enduit est le mélange de parties égales de poix résine, térébenthine & cire. On fait fondre ces trois substances dans un chaudron, on laisse dissiper toute l'huile volatile qui fait monter la matière, & on l'applique bouillant avec un pinceau. Les usages de ce mastic sont très-étendus : on peut s'en servir pour en enduire les tonneaux qui servent sur les vaisseaux; l'eau & les vivres qu'on y renferme ne seroient pas sujets à se corrompre: on peut en vernisser les vaisseaux eux-mêmes. Cet enduit a sur le goudron le double avantage de ne pas se gercer, d'être moins collant, plus souple, & d'offrir une surface plus unie. Une planche de six pieds de long sur dix-huit pouces de large, enduite de cette matière & exposée pendant dix-neuf mois dans un bassin, ne s'est pas imbibée d'eau, & le mastic n'a pas été altéré. On peut donner de la consistance à ce mastic en y mêlant de la brique pilée.

Le toit de cette chambre eſt en bois, mais les poutres ſont très rapprochées; elles offrent dans leur mileu & dans le ſens de leur longueur, des rainures dans leſquelles s'enchaſſent les planches qui rempliſſent l'intervalle entre les poutres, de façon que cette immenſe charpente ne préſente pas un ſeul clou.

Cette chambre ainſi diſpoſée a été enduite avec mon maſtic, & on en a appliqué trois ou quatre couches, dans l'intention d'effacer tous les petits trous que laiſſe la première couche, & de donner le plus beau poli à la ſurface. On a eu la précaution encore d'appliquer le maſtic de la première couche le plus chaud poſſible afin d'en imprégner le bois, le plâtre & les briques; avec ces ſoins, le maſtic pénètre dans le tiſſu même de ces ſubſtances & ne fait qu'un ſeul & même corps avec elles. Cette opération eſt ſi délicate, elle eſt ſi eſſentielle, & les conſéquences en ſont ſi terribles, qu'il ne faut pas s'en repoſer ſur une main purement mercenaire, & on ſera étonné lorſque je dirai que huit mois du travail le plus aſſidu ont à peine ſuffi pour terminer cet ouvrage. J'avois d'abord appliqué le vernis ſur la ſurface intérieure du toit, parce que je craignois déjà que l'impreſſion du froid & du chaud, & l'alternative de l'humidité & de la ſécchereſſe ne fiſſent travailler ma charpente, & dans ce cas j'aurois pu en juger & y porter remède. Mes doutes ne furent pas long-temps à être éclaircis, & trois ou quatre mois après je vis ſe former des crevaſſes & des fentes qui m'allarmèrent; alors je me décidai à enlever les tuiles du toit appliquées immédiatement ſur la charpente de ma chambre, & à paſſer une couche de vernis ſur toute la ſurface extérieure des planches; par ce moyen je mis les planches & tout le couvert entre deux couches de vernis, j'enlevai au bois ſa propriété hygrométrique : je reparai la ſurface inférieure, & le toit exiſte depuis deux ans & trois mois dans un état d'intégrité & de perfection qui eſt vraiment étonnant.

Ce maſtic a un tel avantage ſur le plomb, par rapport

au but économique, que l'intérieur de cette chambre immenſe appropriée à ſes uſages ne m'a coûté que ſix à ſept mille livres, tandis qu'il eſt facile de calculer qu'il faudroit pour huit à neuf cent mille livres de plomb pour en revétir toutes les ſurfaces.

II. Le choix & la préparation des terres demandent quelques ſoins qu'il eſt néceſſaire d'indiquer, afin d'éviter les tâtonnemens à tous ceux qui voudroient ſuivre la même carrière; ces connoiſſances préliminaires ſont indiſpenſables, ſur-tout dans les grandes entrepriſes, parce que les eſſais y ſont tous importans.

Les argiles les plus pures ſont les meilleures : ce n'eſt pas que l'aluminiſation y ſoit plus prompte, mais l'alun y eſt plus pur & d'une plus facile extraction. Lorſqu'on emploie des argiles colorées, telles que les griſes, les noires ou les jaunes, qui doivent toutes en général leur couleur à des altérations du fer, ces argiles effleuriſſent plus promptement, & elles paroiſſent d'abord devoir fournir plus d'alun; mais les premiers indices ſont trompeurs, & le ſulfate de fer dont il faut le débarraſſer, entraîne des ſoins & des manipulations pénibles & coûteuſes.

Lorſqu'on emploie des argiles légérement marneuſes, telles que celles que nous préſente preſque par-tout notre province, l'alunation s'annonce en peu de temps, mais le ſulfate de chaux qu'il faut extraire du mélange nuit à la criſtalliſation. J'ai obſervé que dans ce dernier cas, les criſtaux n'ont point la même conſiſtance; ils s'égrènent entre les doigts, ſe délayent dans l'eau avant de s'y diſſoudre, & les teinturiers rejettent cette eſpèce.

Il eſt donc convenable de choiſir une argile blanche & pure; j'en ai trouvé de cette nature à *Cornillon*, diocèſe d'*Uſès*; & de toutes celles que j'ai eſſayées, celle-ci m'a préſenté le plus d'avantages.

Lorſqu'il eſt queſtion de la diſpoſer à ſe combiner avec l'acide ſulfurique, il faut d'abord la calciner : cette calcination doit être modérée & égale dans toutes les parties

de l'argile ; pour remplir cette double condition, il est indispensable de faire concourir la construction du fourneau avec la manière de disposer les argiles. Le fourneau que j'emploie à cet usage, a neuf pieds de haut sur sept de diamètre : on peut se le représenter comme une portion de cylindre terminée par deux voûtes, l'une à sa base & l'autre à son sommet; les voûtes sont percées de plusieurs trous pour disperser la flamme d'une manière égale dans toute la capacité.

La préparation que je donne aux terres, consiste à les piler & les humecter avec de l'eau, & à former avec cette pâte des boules de 5 à 6 pouces de diamètre; on remplit le fourneau de ces boules, & ces corps sphériques ne se touchant que par un point, laissent des intervalles qui établissent des cheminées & conséquemment une aspiration égale dans toute la masse. La première impression de la flamme c'est de noircir les boules, mais cette couleur disparoît dès que la masse est fortement chauffée, & alors j'arrête le feu *(a)*.

III. Les boules extraites du fourneau sont pilées ou simplement concassées, & c'est dans cet état que je les expose à la vapeur de l'acide sulfurique dans la chambre dont j'ai parlé; on en forme une couche sur le sol, & au bout de quelques jours on s'aperçoit que les fragmens calcinés de ces terres commencent à se gercer & à s'ouvrir : les crevasses laissent bientôt apercevoir des feuillets d'alun pur, quelquefois même des cristaux formés par la réunion de plusieurs lames apposées les unes sur les autres. *(b)*

(a) C'est par un procédé semblable que je calcine les argiles ferrugineuses, & en forme des pozzolanes, qui remplacent avec avantage celles que nous tirons à grands frais d'Italie.

(b) En pratiquant des cloisons & formant des *partenemens* dans le bas de ces chambres, on peut exposer aux vapeurs, du fer, de l'alumine, du cuivre, de l'eau, & faire tout-à-la-fois des sulfates de fer, de cuivre, d'alumine & de l'acide sulfurique. J'ai fabriqué tous ces sels dans la même chambre & dans le même temps. Mais j'ai observé que cette vapeur sèche se combinoit difficilement avec le cuivre, & qu'il étoit même avantageux d'humecter le fer pour faciliter la dissolution.

Lorſque les terres ſont parfaitement effleuries & que tout leur tiſſu préſente de l'alun bien caractériſé, je les retire de la chambre & les expoſe ſous un hangard bien aéré & très-découvert, pour que la terre ſe pénètre plus intimement de l'acide, & faire diſparoître par-là celui qui y prédomine.

Cela fait, on porte les terres dans de grands baquets, on y fait paſſer de l'eau pour les leſſiver ſelon l'uſage généralement ſuivi dans tous les ateliers de ce genre, on évapore dans des chaudières de plomb & l'on met à criſtalliſer.

Dans toutes les fabriques, on eſt dans l'uſage d'employer des alkalis pour ſaturer l'excès d'acide que préſentent preſque toujours les leſſives; ces matières ſervent encore à favoriſer la criſtalliſation, & ſans leur ſecours on n'obtient qu'un *magma* ou un précipité grenu, qui ne préſente aucune apparence de criſtaux. J'ai même obſervé que lorſqu'on parvenoit à faire criſtalliſer l'alun ſans cette addition d'alkalis, les criſtaux n'avoient point la même dureté ni la même peſanteur qu'ils ont ordinairement.

Le célèbre Bergman avoit annoncé que pour ſaturer l'excès d'acide des leſſives alumineuſes, il ſuffiſoit de faire bouillir de l'argile dans la leſſive. Ce procédé paroît ſimple & économique, & ſous ce double point de vue il paroît devoir être ſuivi, mais je me ſuis convaincu qu'il n'étoit point praticable. Si l'on fait bouillir la leſſive acide avec de largile cuite ou crue, la diſſolution ne ſe fait que très-lentement & par une forte ébullition; lorſque la leſſive paroît ſaturée, ſi on la filtre, elle laiſſe précipiter par le refroidiſſement une grande partie de l'argile qu'elle avoit diſſoute; ſi dans cet état on rapproche la diſſolution, l'argile ſe dégage & forme un précipité qui s'oppoſe à toute criſtalliſation: voilà ce que des expériences nombreuſes m'ont préſenté. Mais lorſqu'au lieu d'employer une terre *aluminiſée* avec un excès d'acide, on ſe contente de diſſoudre de l'alun dans l'eau & d'y ajouter quelques gouttes d'acide, on

on peut ſaturer cet acide, & obtenir par évaporation des criſtaux ſuperbes d'alun, mêlés & confondus avec l'argile qui ſe dépoſe, & la quantité d'alun n'augmente pas par cette opération. Ces expériences m'ont paru prouver que la leſſive acide diſſolvoit la terre alumineuſe en tant que diſſolution d'alun, & non en raiſon du ſeul acide qui ſurabonde,

Je n'inſiſterai point ſur les avantages que préſente cette méthode de fabriquer l'alun ; j'obſerverai ſeulement qu'en prenant l'acide ſulfurique à l'état de vapeur, on évite les opérations longues, pénibles & coûteuſes par leſquelles on le concentre & on le rectifie. J'obſerverai encore qu'en ſuivant le procédé, on peut commodément établir des fabriques aſſez nombreuſes pour fournir aux arts une matière précieuſe que nous avons juſqu'ici tirée de l'étranger.

FIN.

Errata pour les Mémoires de 1788.

Page 246, ligne 25, *ajoutez :* Déjà en prenant 12 années d'obſervations de 1777 à 1788, j'ai trouvé 3 pieds 9 pouces ſeulement pour la hauteur moyenne.

Errata pour le Mémoire intitulé : Recherches ſur les principes de la Différentiation, &c.

Page 116, ligne 8, *multiplie*, liſez *diviſe*.

Ligne 9, 10, 11 & 12 de la même page, mettez avant les coſinus le caractère de diviſion (:), parce que ces coſinus doivent être diviſeurs & non multiplicateurs.

Page 117, ligne 4, à compter d'en bas, $- n\,b\,g$ coſ. $\pi\,\mu$, liſez $+ n\,b\,g$ coſ. $\pi\,\mu$.

Dans les 8.e & 9.e lignes de la 118.e page, à compter d'en bas, mettez à la place des cosinus, l'unité divisée par ces cosinus. De plus, dans lesdites lignes & dans la 7.e changez le signe du terme qui contient $n\,d\,x$.

Page 120, ligne 6, $T\,V'$: lisez $T'\,V'$.

J'invite le lecteur à ne lire ni l'exemple de la page 121, ni les deux suivans. Je les croyois nécessaires pour éclaircir cette théorie, je ne le crois plus.

Page 132, avant dernière ligne, $\frac{\Delta\, y^2}{g^2}$, lisez $\frac{\Delta\, y^2}{4\, n^2\, g^2}$.

Ligne dernière de la même page, b^2, lisez $b^2\, (\text{cos.}\ \pi\, \frac{x}{g})^2$.

Page 138, ligne 9, $\sqrt{[(c + 2\,c\,x^2)]}$, lisez $\sqrt{[c\,(c + 2\,c\,x^2)]}$.

Errata pour le Mémoire de M. le Gentil, 1788.

Page 392, ligne 30, la zodiaque; *lisez* le zodiaque.

Page 427, ligne 10, mes mythologistés, *lisez* les mythologistes.

Page 430, ligne 17, de l'été à l'hiver, *lisez* de l'hiver à l'été.

Page 435, ligne 30, dans le lien des gémeaux, *lisez* dans le lieu des gémeaux.

Page 440, ligne 35, la plus grande, *lisez* la plus petite.

